ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ СИСТЕМЫ. МАССА. ЦЕНТР МАСС. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ.

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. ДИНАМИКА

ЛЕКЦИЯ 6

Цель лекции

Познакомиться с механической системой и с ее основными характеристиками и свойствами.

План лекции

Введение

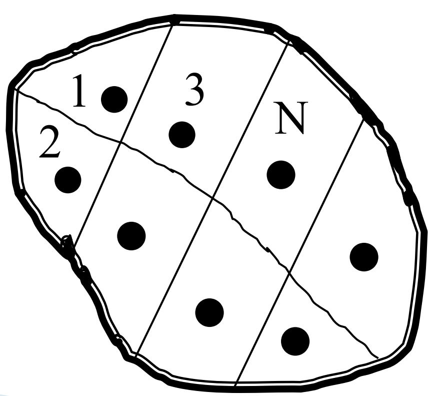
- **Механическая система. Силы внутренние и внешние.**
- **Масса системы. Центр масс**
- **Момент инерции относительно оси.**
- **Теорема Гюйгенса**

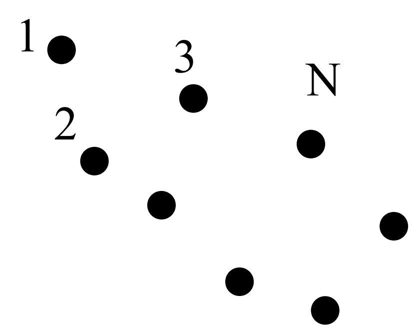
Заключение

Механическая система

Совокупность материальных точек, движения которых взаимосвязаны, называют *механической системой*.

Твердые тела или системы тел **частный случай механической системы.**





Внешние и внутренние силы

Силы

Внутренние

Внешние

Внешние и внутренние силы

Силы

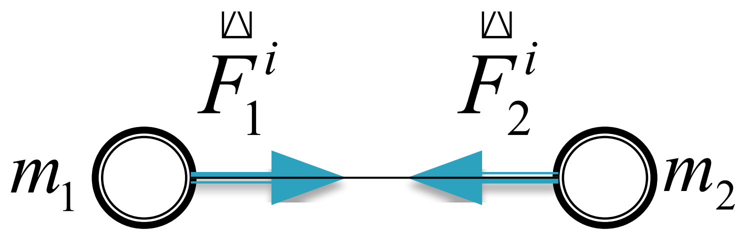
Внутренние

Внешние

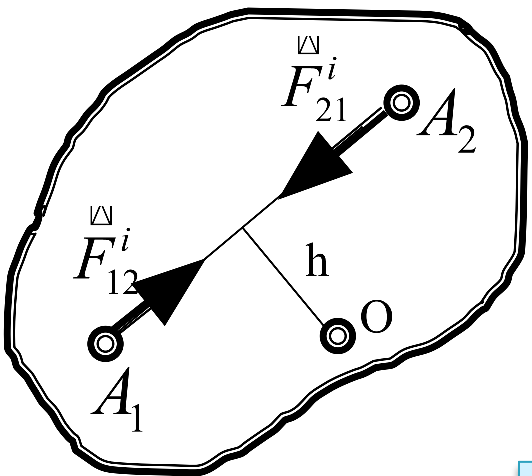
-силы взаимодействия между точками данной механической системы.

$$\vec{F}_k^{\,i}$$

interior



Свойства внутренних сил



$$m_O(\vec{F}^{i}_{12}) + m_O(\vec{F}^{i}_{21}) = 0$$

$$-h \cdot F^{i}_{12} + h \cdot F^{i}_{21} = 0$$

2. Сумма моментов всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равняется нулю.

$$\left|\vec{F}^{i}_{12}\right| = \left|\vec{F}^{i}_{21}\right|$$

$$\vec{F}^{i}_{21} = -\vec{F}^{i}_{12}$$

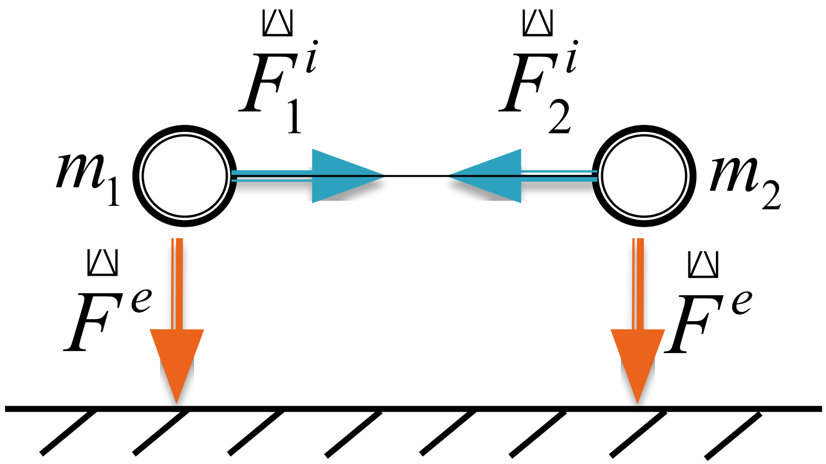
$$\sum m_O(\vec{F}^{i}_{k}) = 0 \quad \sum m_x(\vec{F}^{i}_{k}) = 0$$

Внешние и внутренние силы

Силы

Внутренние

Внешние

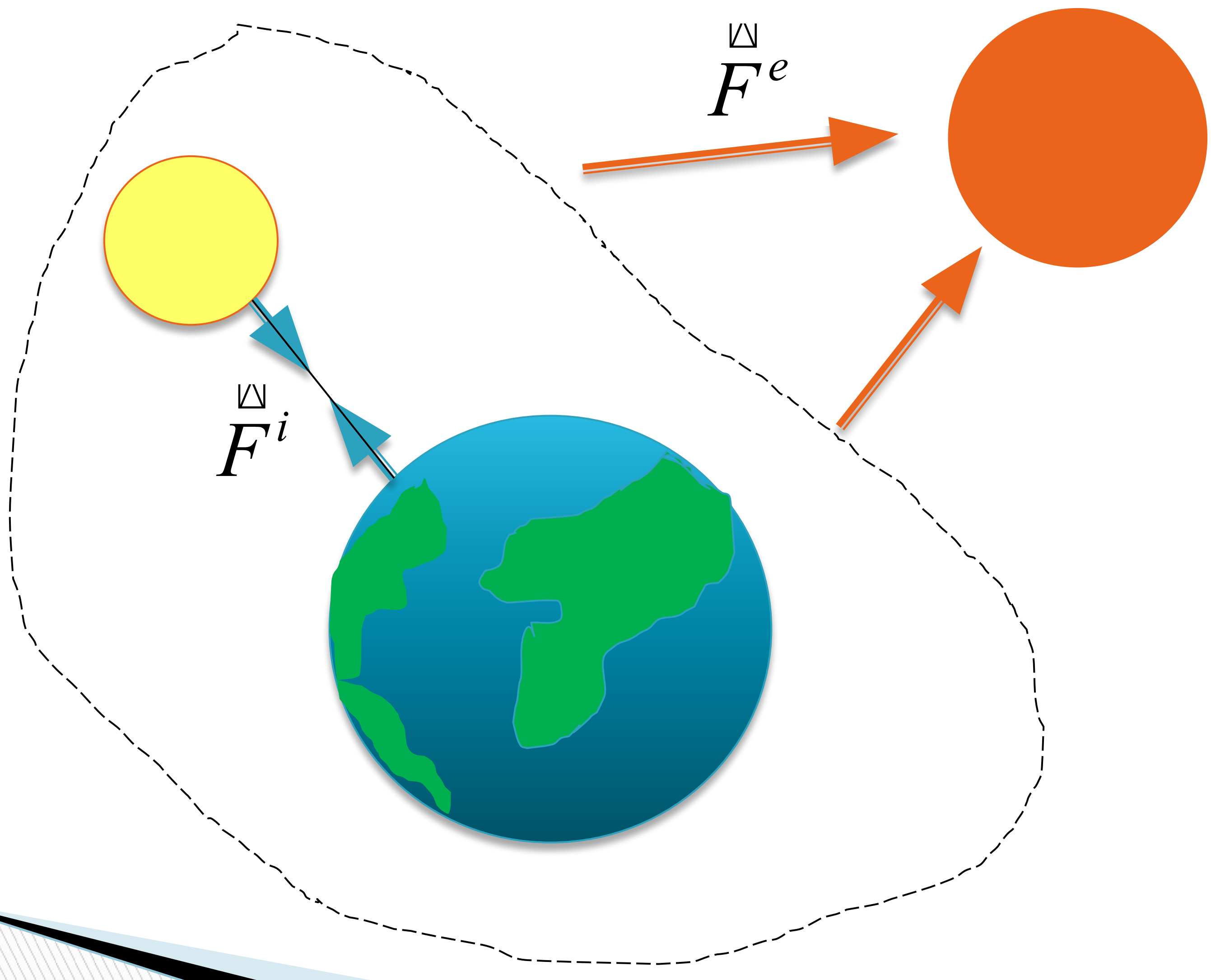


-силы, действующие на точки этой системы со стороны тел, не входящих в нее.

$$\vec{F}_k^e$$

exterior

Внешние и внутренние силы



ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Масса

Центр масс

Момент инерции

МАССА СИСТЕМЫ. ЦЕНТР МАСС

Масса системы **равна арифметической сумме масс всех точек или тел образующих систему:**

Масса- мера инертности

системы называется геометрическая точка С, координаты которой определяются формулами

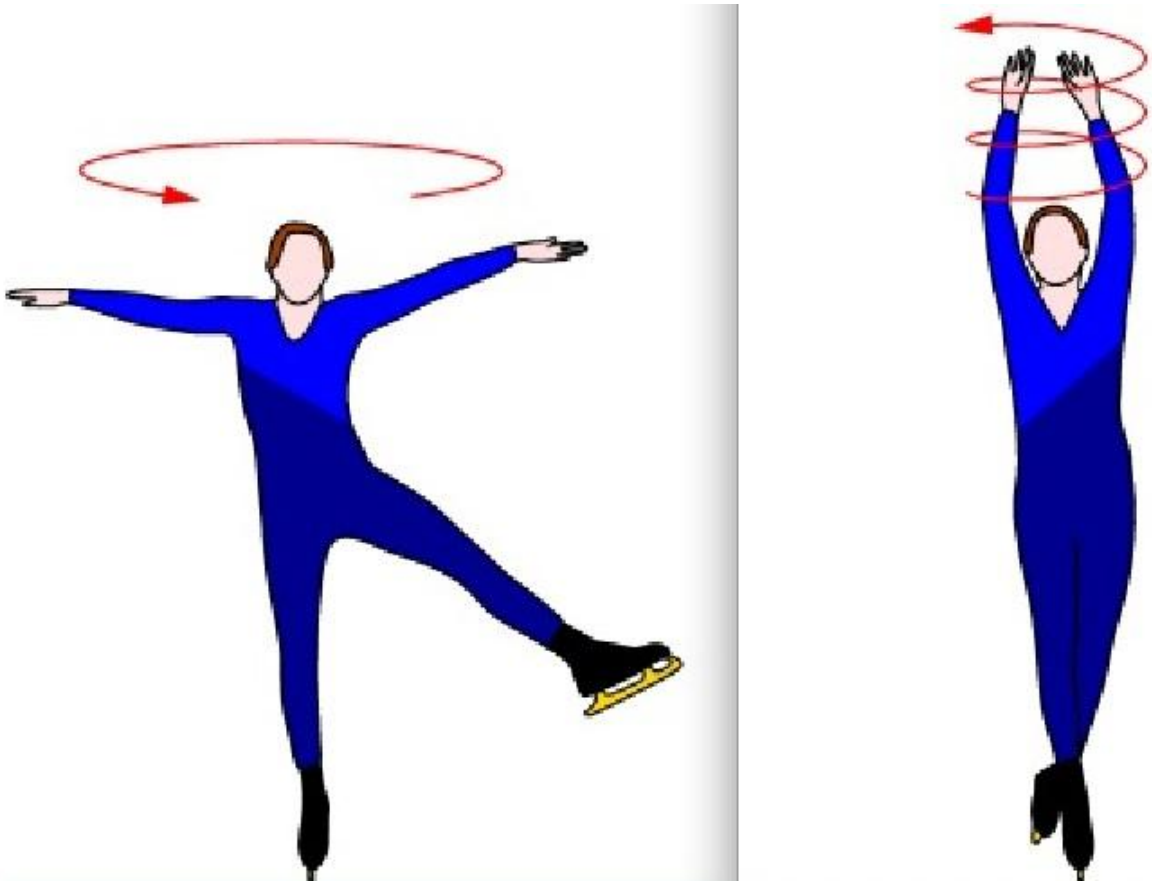
$$M = \sum m_k$$

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M} \qquad y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M} \qquad z_c = \frac{\sum m_k z_k}{M}$$

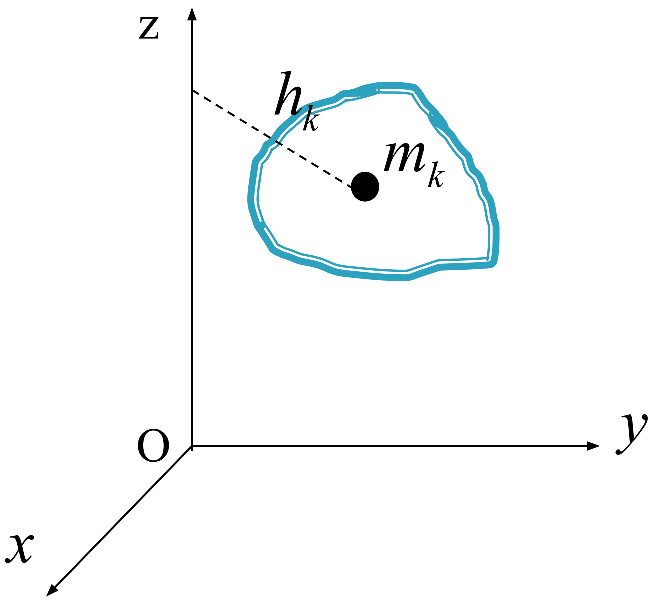
или

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M}$$


TWIZZLE
www.twizzle.ru



МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ



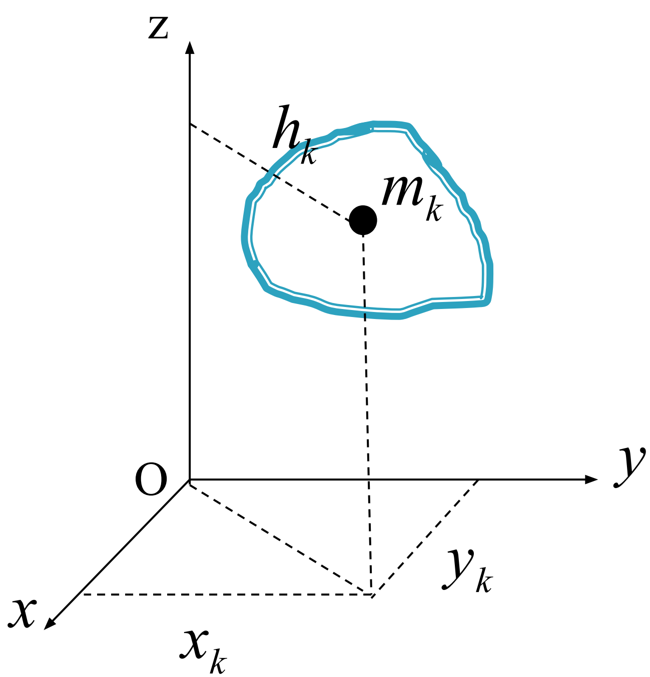
$$J_z = m_k h_k^2$$

$$J_z = \sum m_k h_k^2$$

$$[J_z] = кг \cdot м^2$$

Моментом инерции тела (системы) **относительно данной оси Oz называется величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний до этой оси**

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСЕЙ



Зная, что $h_k^2 = x_k^2 + y_k^2$

Тогда моменты инерции относительно осей будут определяться формулами:

$$J_x = \sum m_k (z_k^2 + y_k^2)$$

$$J_y = \sum m_k (z_k^2 + x_k^2)$$

$$J_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

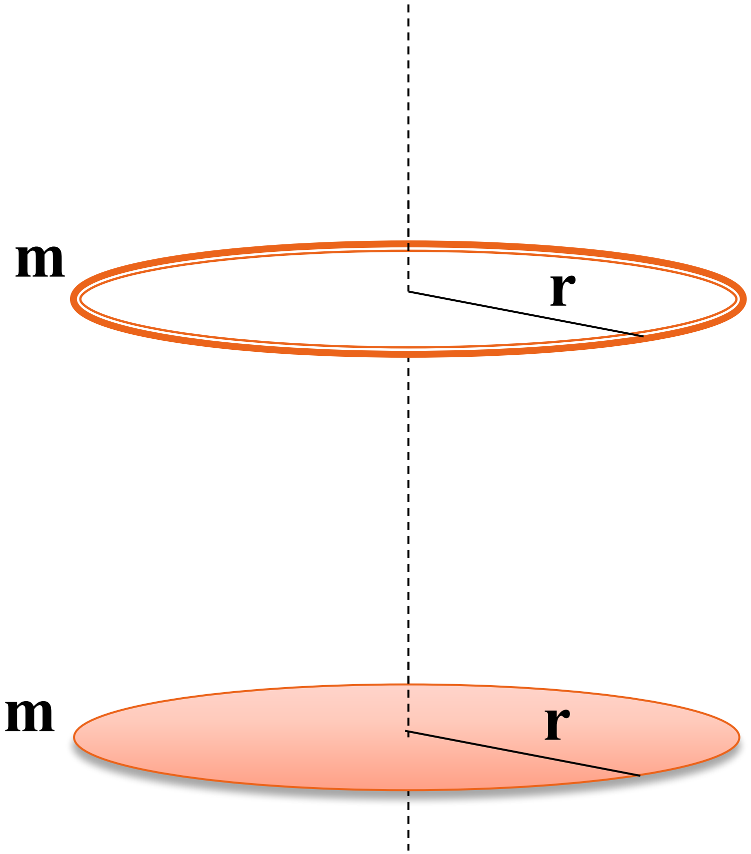
МОМЕНТ ИНЕРЦИИ СПЛОШНОГО ТЕЛА

$$J_z = \sum m_k h_k^2$$

Учитывая, что $dm = \rho dV$

$$J_z = \int_M h^2 dm \quad \text{или} \quad J_z = \int_V \rho h^2 dV$$

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ КОЛЬЦА И ДИСКА



Момент инерции больше у кольца или у пластины?

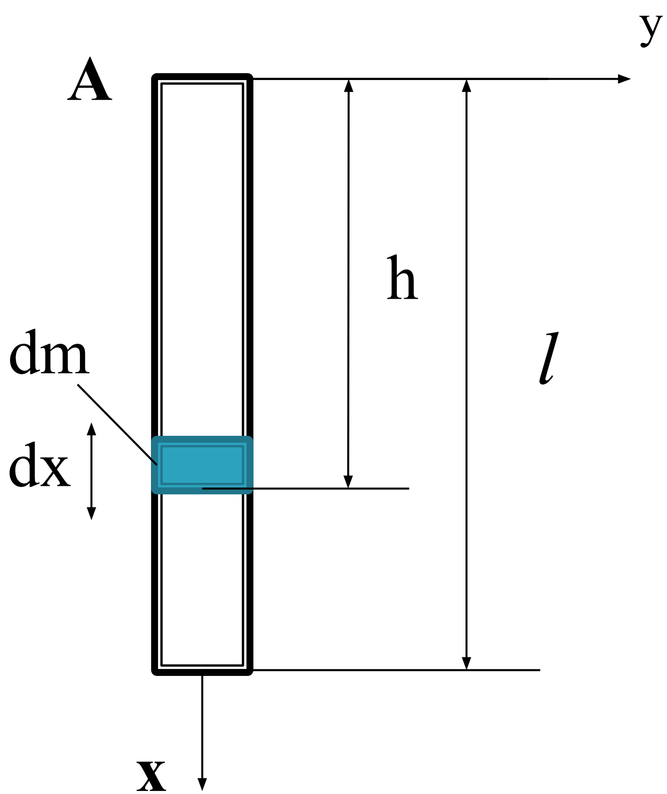
$$J_z = \int m_k h_k^2$$

ПРИМЕРЫ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ

Тонкий стержень

$$J_z = \int_M h^2 dm \qquad dm = \rho_l dl$$

<u>Дано</u>: m и *l*



$$J_A = \int_M x^2 dm = \int_0^l x^2 \rho_l dx = \rho_l \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^l$$

Зная $\rho_l = \frac{m}{l}$ **, получаем:**

$$J_A = \frac{ml^2}{3}$$

ПРИМЕРЫ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ

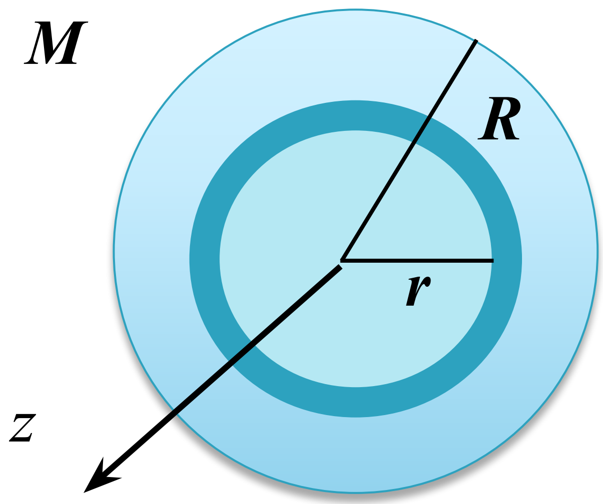
Тонкое кольцо:

$$J_A = \sum m_k R^2 = \left(\sum m_k\right) R^2 = MR^2$$

$$J_A = MR^2$$

ПРИМЕРЫ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ

Диск

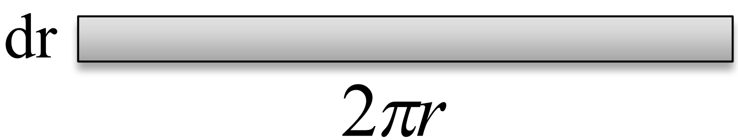


$$J_Z = \int\limits_M r^2 dm =$$

$$= \int\limits_0^R r^2 \rho_S 2\pi r dr = 2\pi\rho_S \int\limits_0^R r^3 dr =$$

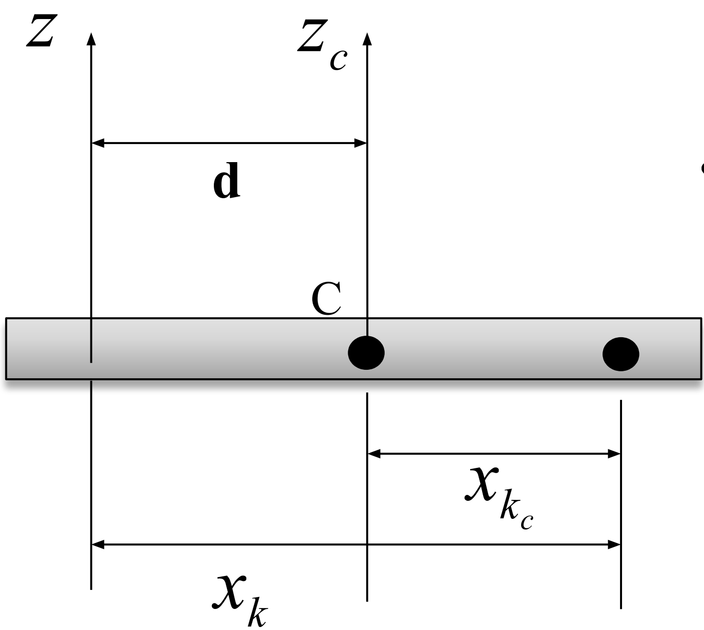
$$= \frac{2\pi\rho_S R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

$$dm = \rho_s dS \quad \rho_s = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi R^2}$$



$$J_z = \frac{MR^2}{2}$$

Моменты инерции относительно параллельных осей



$$J_z = \sum m_k x_k^2 = \sum m_k (x_{k_c} + d)^2 =$$

$$= \sum m_k (x_{k_c}^2 + 2x_{k_c} d + d^2) =$$

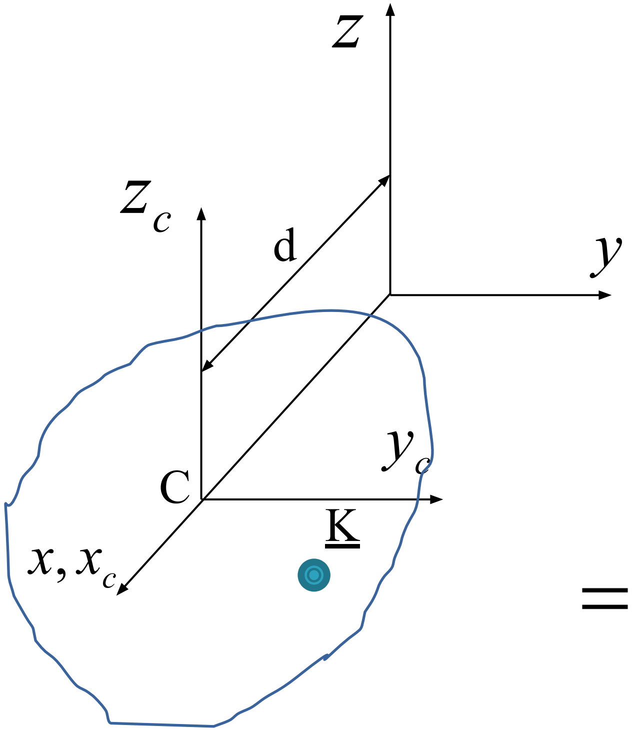
$$x_k = x_{k_c} + d$$

$$Mx_{kc} = \sum m_k x_{kc}$$

$$= \underbrace{\sum m_k x_{k_c}^2}_{J_{cz_1}} + 2d \underbrace{\sum m_k x_{k_c}}_{0} + Md^2) =$$

$$J_z = J_{cz_1} + Md^2$$

Моменты инерции относительно параллельных осей



$$y_k = y_{kc}$$

$$J_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) =$$

$$= \sum m_k (x_{k_c}^2 + 2x_{k_c} d + d^2 + y_k^2) \quad =$$

$$J_z = \sum m_k (x_{kc}^2 + y_{kc}^2) + \left(\sum m_k\right) d^2 + 2\left(\sum m_k x_{kc}\right) d$$

$$J_z = J_{cz_1} + Md^2$$

Теорема Гюйгенса

Момент инерции тела относительно данной оси равен сумее момента инерции относительно оси, ей параллельной и проходящей через центр масс тела, и произведениея массы тела на квадрат расстояния между осями.

$$J_z = J_{cz_1} + Md^2$$

ЦЕНТРОБЕЖНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Центробежные моменты инерции **по отношению к осям Ox, Oy, Oz – величины, определяемые равенствами**

$$J_{xy} = \sum m_k x_k y_k \, , \; J_{yz} = \sum m_k y_k z_k \, , \; J_{zx} = \sum m_k z_k x_k$$

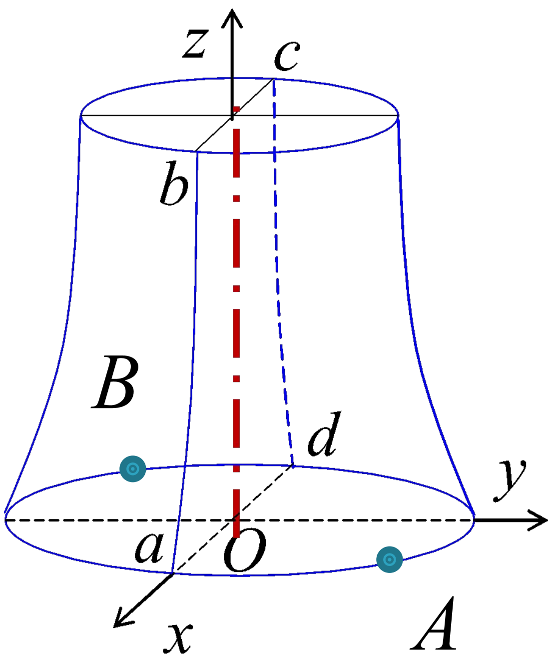
Центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

$$\left[J_{yz} \right] = кг \cdot м^2$$

Оси, для которых центробежные моменты инерции, содержащие в своих индексах их наименования, равны нулю, называют главными осями инерции.

ГЛАВНЫЕ ОСИ ИНЕРЦИИ

Для однородного тела, имеющего ось симметрии, данная ось является её главной осью инерции.



$$\sum m_k z_k x_k = J_{zx} = 0, \quad \sum m_k y_k z_k = J_{yz} = 0$$

$$x_A = -x_B \qquad y_A = -y_B$$

$$z_A = z_B$$

Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то любая ось, перпендикулярная ей является главной осью инерции.

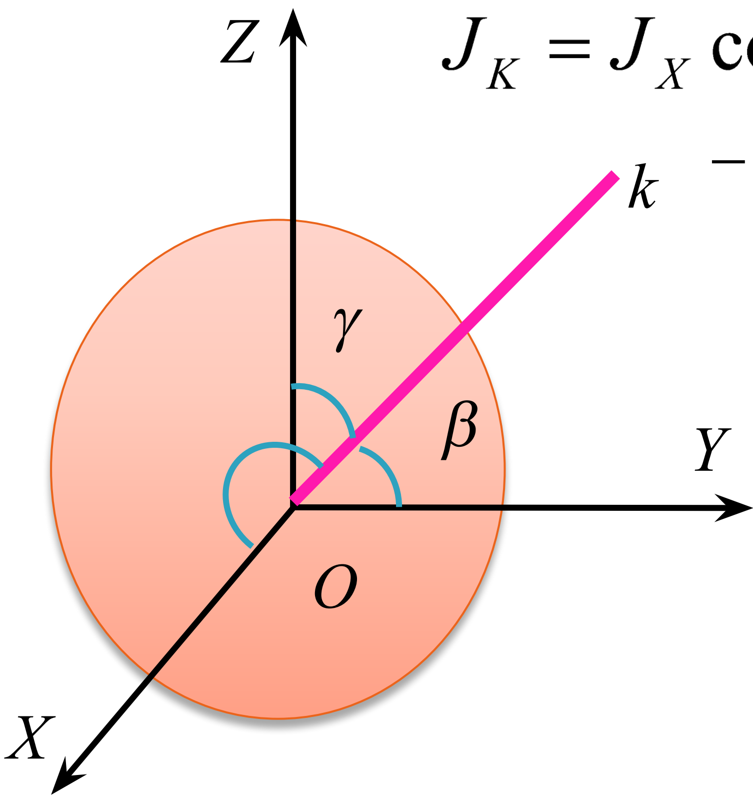
Докажите!

ГЛАВНЫЕ ОСИ ИНЕРЦИИ

Главные оси инерции, проходящие через центр масс системы, называют *главными центральными осями инерции*

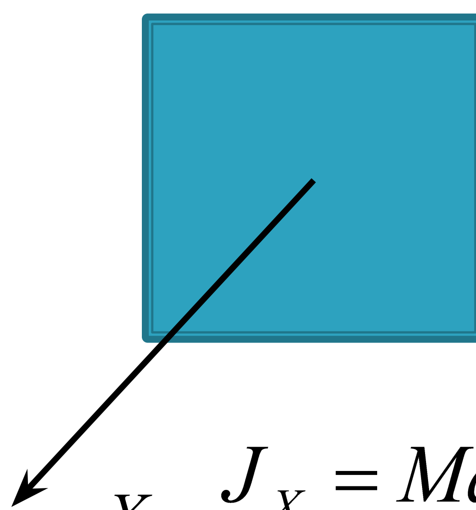
Динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела, будут равны статическим, если ось вращения, является одной из главных центральных осей инерции.

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОСИ



$$J_K = J_X \cos^2\alpha + J_Y \cos^2\beta + J_Z \cos^2\gamma -$$
$$-2J_{XY}\cos\alpha\cos\beta - 2J_{XZ}\cos\alpha\cos\gamma -$$
$$-2J_{YZ}\cos\beta\cos\gamma$$

Задача: определить момент инерции куба относительно главной диагонали, если



$$J_X = Ma^2/6$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Каким образом задача о движении произвольной механической системы (конструкции) приближенно сводится к задаче о движении конечного числа материальных точек?
2. Каковы основные сложности решения системы ДУ движения N материальных точек? Каков другой путь приближенного описания движения механических систем?
3. Какие силы называются внутренними, а какие внешними?
4. Какими свойствами обладают внутренние силы?
5. Что называют центром масс системы? Как определяются его координаты?

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

7. Какова связь между центром масс и центром тяжести системы?
8. Как определяется момент инерции тела относительно оси?
9. Какова зависимость между моментами инерции относительно двух параллельных осей?
10. Относительно какой из параллельных осей момент инерции будет наименьшим?

ТЕМА СЛЕДУЮЩЕЙ ЛЕКЦИИ

ТЕОРЕМЫ О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС И ИМПУЛЬСА