

# Методы решения тригонометрических уравнений

- Решение простейших тригонометрических уравнений
- Решение тригонометрических уравнений разложением на множители
- Решение тригонометрических уравнений сводящихся к квадратным уравнениям
  - Решение тригонометрических уравнений преобразованием суммы тригонометрических функций в произведение
  - Решение тригонометрических уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму
- Решение тригонометрических уравнений с применением формул понижения степени
- Решение тригонометрических уравнений как однородное
- Решение тригонометрических уравнений с помощью введения вспомогательного аргумента
- Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки
- Решение тригонометрических уравнений с помощью замены неизвестного
- Решение тригонометрических уравнений с помощью оценки левой и правой частей уравнения (метод оценок)
- Решение тригонометрических уравнений содержащих тригонометрические функции под знаком радикала

**К определению тригонометрического уравнения различные авторы учебных пособий подходят по-разному. Мы назовём тригонометрическим уравнением равенство тригонометрических выражений, содержащих неизвестное (переменную) только под знаком тригонометрических функций. Уравнения вида**

$$\cos 3x = \sin x \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - 5x\right) = 0 \quad \sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$$

**и т.д. – тригонометрические уравнения ■**

Уравнения вида

$$\sin x = \frac{1}{2}x \quad \cos 2x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \quad \operatorname{tg} 2x = x$$

и т.д. не являются тригонометрическими, они относятся к типу трансцендентных уравнений и, как правило, решаются приближенно или графически.

Решить тригонометрическое уравнение – значит, найти все его корни – все значения неизвестного, удовлетворяющие уравнению.

- Простейшими тригонометрическими уравнениями являются:

- $\sin x = a$                        $\cos x = a$  , где  $|a| \leq 1$

$tgx = a$                        $ctgx = a$  , где  $a \in R$

# 1. Решение простейших тригонометрических уравнений

По определению арифметического квадратного корня перейдем к равносильной системе уравнений.

Отве

## 2. Решение тригонометрических уравнений разложением на множители

Пример.

$$\sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\sin x - \cos x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x + \cos x = 0$$

$$\sin x = \cos x \quad \text{или} \quad \sin x = -\cos x$$

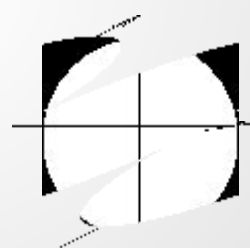
$$\tan x = 1 \quad \text{или} \quad \tan x = -1$$

$$\sin x = \cos x$$

$$\sin x = -\cos x$$

$$\tan x = 1 \quad \text{или} \quad \tan x = -1$$

$$x = 2\pi n, \\ n \in \mathbb{Z}$$



Отметим полученные решения и область определения на тригонометрическом круге.

Ответ:

$$x = 2\pi n, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \\ n \in \mathbb{Z}$$

### 3. Решение тригонометрических уравнений сводящихся к квадратным уравнениям

$$\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$$

$$\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$$

$$\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$$

Пусть  $\sin x = t$  тогда

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

или

$$t^2 + t - 2 = 0$$

1.  $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

2.  $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$

3.  $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$

4.  $\frac{1}{x^5} = x^{-5}$

5.  $\frac{1}{x^6} = x^{-6}$

Корней нет

Ответ:

6.  $\frac{1}{x^7} = x^{-7}$

#### 4. Преобразование суммы

### тригонометрических функций в произведение

При решении уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin (\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \sin 2x = 0$$

По формулам  
приведения

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sin 3x$$

преобразуем разность  
синусов в произведение:

$$\sin 3x - \sin 2x = 2 \sin \frac{3x - 2x}{2} \cos \frac{3x + 2x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2}$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} = 0$$

ил  
и

$$\cos \frac{5x}{2} = 0$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0$$

$$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k, k \in \mathbb{Z}$$

**Отве  
т:**

$$2\pi k, \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k, k \in \mathbb{Z}$$

## 5. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

При решении уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

$$\operatorname{ctg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}, \quad \operatorname{ctg} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}.$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)],$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta)].$$

$$\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$$

$$\frac{1}{2}[\cos(2x - 6x) - \cos(2x + 6x)] = \frac{1}{2}[\cos(x - 3x) + \cos(x + 3x)]$$

$$\cos 4x - \cos 8x = \cos 2x + \cos 4x$$

$$\cos 8x + \cos 2x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 3x = 0$$

$$\cos 5x = 0, \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ил} \quad \cos 3x = 0, \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

и

**Отве  
т:**

$$\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, \quad \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

## 6. Использование формул понижения

### степени

При решении уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos^2 3x + \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} + 5x \right) = \cos^2 7x + \cos^2 9x + \cos \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos^2 3x + \cos 5x = \cos^2 7x + \cos^2 9x$$

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 6x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 10x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 14x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 18x)$$

$$\cos 6x + \cos 10x = \cos 14x + \cos 18x$$

$$2 \cos 8x \cos 2x = 2 \cos 16x \cos 2x,$$

$$\cos 2x (\cos 16x - \cos 8x) = 0.$$

$$-2 \sin 4x \sin 12 \cos 2x = 0$$

$$\sin 4x = 0$$

ил

$$\sin 12x = 0$$

ил

$$\cos 2x = 0$$

и

$$x = \frac{\pi k}{4}, \quad x = \frac{\pi n}{12}, \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi l}{2}, \quad k, n, l \in \mathbb{Z}$$

и

$$x = \frac{\pi n}{12}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

**Отве**

$$\frac{\pi n}{12}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

**т:**

# 7. Однородные уравнения

$$a \sin x + b \cos x = 0;$$

Уравнения

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0;$$

$$a \sin^3 x + b \sin^2 x \cos x + c \sin x \cos^2 x + d \cos^3 x = 0$$

и т.

д.

называют **однородными**

относительно сумм показателей

$\sin x$

и

$\cos x$

$\sin x$

и

$\cos x$

степеней при

всех членов такого уравнения одинакова. Эта сумма называется степенью однородного уравнения. Рассмотренные уравнения имеют соответственно первую, вторую и третью степень.

Делением  $\cos^k x$ , где  $k$  - степень однородного уравнения, на уравнение приводится к алгебраическому относительно функции  $\operatorname{tg} x$

$$2 \sin x - 3 \cos x = 0$$

Разделим обе части уравнения на

$$\cos x \neq 0$$

$$2 \cdot \operatorname{tg} x - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Отве**

$$x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

**т:**

$$4 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 3$$

Умножим правую часть  
уравнения на

$$\sin^2 x + \cos^2 x$$

$$4 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 3 \sin^2 x + 3 \cos^2 x;$$

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$$

Разделим  
на

$$\cos^2 x$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \cdot \operatorname{tg} x - 3 = 0;$$

$$\operatorname{tg} x = -3$$

и

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k$$

и

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$n, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k$        $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$        $n, k \in \mathbb{Z}$

## 8. Введение вспомогательного

Рассмотрим уравнение вида:  $a \sin x + b \cos x = c$

где  $a, b$  —  $x = c$  —

Разделим обе части этого уравнения на  $\sqrt{a^2 + b^2}$  (корректно ли это?):

$$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\cos \varphi} \sin x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\sin \varphi} \cos x = \underbrace{\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_C,$$

Теперь коэффициенты уравнения обладают свойствами синуса и косинуса,

а именно: модуль ( абсолютное значение ) каждого из них не больше 1,

а сумма их квадратов равна 1.

Тогда можно обозначить их соответственно как  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$   
 $\varphi$  — так называемый **вспомогательный угол**

и наше уравнение принимает вид:

$$\cos \varphi \cdot \sin x + \sin \varphi \cdot \cos x = C,$$

или

$$\sin (x + \varphi) = C,$$

и его решение:  $x = (-1)^k \cdot \arcsin C - \varphi + \pi k,$

$$\text{где } \varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Заметим, что введённые обозначения  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$  взаимно заменяемы.



$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1$$

Так как  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ , то  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  уже являются

соответственно

косинусом и синусом

угла; ясно, что этот угол

$\frac{\pi}{3}$

$$\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = 1 \Leftrightarrow \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = 1$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

**Ответ:**

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Пример. Решить уравнение:  $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 1$ .

Решение. Здесь  $a = \sqrt{3}$ ,  $b = -1$ , поэтому делим обе части на  $\sqrt{3+1} = 2$ :

$$(\sqrt{3}/2) \cdot \sin 3x - (1/2) \cdot \cos 3x = 1/2,$$

$$\cos(\pi/6) \cdot \sin 3x - \sin(\pi/6) \cdot \cos 3x = 1/2,$$

$$\sin(3x - \pi/6) = 1/2,$$

отсюда,  $x = (-1)^k \cdot \pi/18 + \pi/18 + \pi k/3$ .

## 9. Метод рационализации (метод универсальной тригонометрической подстановки) для уравнения вида

$$a \sin x + b \cos x = c$$

Известно, что  
если  
выражаются рационально  
через

$$\alpha \neq (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}, \quad \text{TO} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \\ \cos \alpha &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

Вводим вспомогательное  
неизвестное так,  
получило рациональное уравнение  
Съ вспомогательного относительно  
неизвестного.

чтобы после  
подстановки

$$a \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + b \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = c$$

Обозначим

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t,$$

получим:

$$a \frac{2t}{1+t^2} + b \frac{1-t^2}{1+t^2} = c$$

Решим данное уравнение и получим следующие ответы:

1.  
если

$$a^2 + b^2 < c^2,$$

т  
о

то у уравнения нет  
корней;

2.  
если

$$a^2 + b^2 \geq c^2, c \neq -b,$$

т  
о

$$x = 2 \operatorname{arctg} \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

3.  
если

$$c \neq -b, \quad \text{т  
о}$$

$$x = \begin{cases} (2n+1)\pi \\ -2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$3 \sin x + 4 \cos x = 3$$

$$a = 3, b = 4, c = 3, a^2 + b^2 > c^2$$

- уравнение имеет решение.

$$3 \frac{2t}{1+t^2} + 4 \frac{1-t^2}{1+t^2} = 3 \Rightarrow 7t^2 - 6t - 1 = 0, t_{1,2} = \frac{3 \pm 4}{7}$$

$$t_1 = 1, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + n\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = -\frac{1}{7}, \frac{x}{2} = -\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + n\pi, x = -2\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

**Отве  
т:**

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, x = -2\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ  
مَنْ يَتَّقِ اللَّهَ يَجْعَلْ لَهُ مَخْرَجًا  
وَيَرْزُقْهُ مِنْ حَيْثُ لَا يَحْتَسِبُ  
وَمَا يُلْقِ الْأَنْزِلُ إِلَّا فِي كِتَابٍ مُبِينٍ  
وَمَنْ يَتَّقِ اللَّهَ يَجْعَلْ لَهُ مَخْرَجًا  
وَيَرْزُقْهُ مِنْ حَيْثُ لَا يَحْتَسِبُ  
وَمَا يُلْقِ الْأَنْزِلُ إِلَّا فِي كِتَابٍ مُبِينٍ

(1)

مَنْ يَتَّقِ اللَّهَ يَجْعَلْ لَهُ مَخْرَجًا  
وَيَرْزُقْهُ مِنْ حَيْثُ لَا يَحْتَسِبُ  
وَمَا يُلْقِ الْأَنْزِلُ إِلَّا فِي كِتَابٍ مُبِينٍ  
وَمَنْ يَتَّقِ اللَّهَ يَجْعَلْ لَهُ مَخْرَجًا  
وَيَرْزُقْهُ مِنْ حَيْثُ لَا يَحْتَسِبُ  
وَمَا يُلْقِ الْأَنْزِلُ إِلَّا فِي كِتَابٍ مُبِينٍ

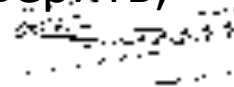
(2  
)

مَنْ يَتَّقِ اللَّهَ يَجْعَلْ لَهُ مَخْرَجًا  
وَيَرْزُقْهُ مِنْ حَيْثُ لَا يَحْتَسِبُ  
وَمَا يُلْقِ الْأَنْزِلُ إِلَّا فِي كِتَابٍ مُبِينٍ  
وَمَنْ يَتَّقِ اللَّهَ يَجْعَلْ لَهُ مَخْرَجًا  
وَيَرْزُقْهُ مِنْ حَيْثُ لَا يَحْتَسِبُ  
وَمَا يُلْقِ الْأَنْزِلُ إِلَّا فِي كِتَابٍ مُبِينٍ

مَنْ يَتَّقِ اللَّهَ يَجْعَلْ لَهُ مَخْرَجًا  
وَيَرْزُقْهُ مِنْ حَيْثُ لَا يَحْتَسِبُ  
وَمَا يُلْقِ الْأَنْزِلُ إِلَّا فِي كِتَابٍ مُبِينٍ  
وَمَنْ يَتَّقِ اللَّهَ يَجْعَلْ لَهُ مَخْرَجًا  
وَيَرْزُقْهُ مِنْ حَيْثُ لَا يَحْتَسِبُ  
وَمَا يُلْقِ الْأَنْزِلُ إِلَّا فِي كِتَابٍ مُبِينٍ

При переходе от уравнения (1) могла произойти потеря корней, являются ли корни уравнения корнями данного уравнения.

к уравнению (2), значит необходимо проверить,



$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

Проверк

а.

Есл

$$x = 1$$

,

и

тогда

$$1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$x = 2$$

- не верно,

$$x = 0$$

не является корнями уравнения.

значит исходного

Ответ

:

$$x = 1$$



# 11. Решение тригонометрических уравнений с помощью оценки левой и правой частей уравнения (метод оценок)

Пример 1.

$$2 \sin^3 5x + 7 \cos 5x = 9,$$

$$2 \sin^3 5x \leq 2,$$

$$7 \cos 5x \leq 7,$$

$$2 \sin^3 5x + 7 \cos^5 x \leq 9,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \cos 5x = 1, \end{cases} \text{ что невозможно.}$$

**Ответ.** Решений нет.

**Пример**

**2.**

$$\sin^{19} x + \cos^{19} x = \frac{\pi}{3},$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$\sin^{19} x \leq \sin^2 x,$$

$$\cos^{19} x \leq \cos^2 x,$$

$$\Rightarrow \sin^{19} x + \cos^{19} x \leq 1,$$

$$\pi/3 > 1.$$

## Пример

3.

$$\sin 3x + \sin 7x = 2,$$

$$\begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \sin 7x = 1, \end{cases}$$

$$\sin 3x = 1,$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть  
ь

$$x \in [0; 2\pi[, x \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

Подставляем во второе уравнение:

$$\sin \frac{7\pi}{6} \neq 1; \quad \sin \frac{35\pi}{6} \neq 1; \quad \sin \frac{21\pi}{2} = 1.$$

**Отве  
т.**

$$\left\{ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

**Пример  
4.**

$$\cos^3 x \cos 2x = -1,$$

$$|\cos x| \leq 1, \quad |\cos 2x| \leq 1, \quad |\cos^3 x \cos 2x| \leq 1,$$

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 2x = -1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos x = -1, \\ \cos 2x = 1. \end{cases}$$

Если  
и  
то  
о

$$\cos x = 1, \quad \cos 2x = \cos^2 x - 0 = 1 \neq -1$$

Если  
и  
то  
о

$$\cos x = -1, \quad \cos 2x = 1$$

$$\begin{cases} \cos x = -1, \\ \cos 2x = 1. \end{cases} \iff \cos x = -1.$$

**Отве  
т.**

$$\{\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

## 12. Решение тригонометрических уравнений содержащих

тригонометрические функции под знаком радикала

№1

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = 1 \\ & \sqrt{\sin x} = 1 - \sqrt{\cos x} \\ & \sin x = (1 - \sqrt{\cos x})^2 \end{aligned}$$

Решим уравнение

2.

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = 1$$

$$\sqrt{\sin x} = 1 - \sqrt{\cos x}$$

$$\sin x = (1 - \sqrt{\cos x})^2$$

$$\sqrt{\sin x}$$

или

$$\sqrt{\cos x}$$

$$\sqrt{\sin x} = 1 - \sqrt{\cos x}$$

$$\sqrt{\cos x} = 1 - \sqrt{\sin x}$$

Учитывая условие 1,  $\sin x \geq 0$ , решением системы будут серии :

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$