

Иерархия построения радиотехнической системы



Основные определения.

Линейную систему из n алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\dots, \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

можно представить в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{vmatrix} \quad (12)$$

или в сокращенной записи:

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{A}]\mathbf{X}. \quad (13)$$

Согласно (11)–(13) матрица есть совокупность $m \times n$ коэффициентов, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов. При $m=n$ матрица называется квадратной порядка или ранга n .

К количественным характеристикам матрицы относятся: количество в ней строк и столбцов, общее число элементов, максимальное и минимальное их значения, величина определителя.

Элемент матрицы $[A]$, расположенный в i -й строке и j -м столбце, обозначается a_{ij} .

Матрица, состоящая из одного столбца или строки, называется вектором.

Матрица $[A]=[B]$ при равенстве элементов $a_{ij}=b_{ij}$.

При суммировании матриц $[C]=[A]+[B]$ складываются соответствующие элементы $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

При вычитании матриц $[C]=[A]-[B]$ вычитаются соответствующие элементы $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$.

При умножении матрицы на скалярный множитель производится умножение каждого элемента на этот коэффициент:

$k[A]=[A]k=[C]$, где $c_{ij}=ka_{ij}$.

При умножении двух квадратных матриц одного порядка $[C]=[A] \times [B]$ элемент c_{ij} произведения матриц $[A]$ и $[B]$ есть сумма произведений i -й строки матрицы $[A]$ на элемент j -го столбца матрицы $[B]$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} . \quad (14)$$

Например, при умножении квадратных матриц 2-го порядка:

$$[A] \times [B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} . \quad (15)$$

Матрица называется диагональной при равенстве нулю всех элементов, кроме диагональных ($a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$).

Матрица называется симметричной при $a_{ij} = a_{ji}$.

Диагональная матрица размера $n \times n$ называется единичной при $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$:

$$[1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Квадратная матрица $[A]^{-1}$ называется обратной по отношению к матрице $[A]$, если справедлива зависимость:

$$[A] \times [A]^{-1} = [1] \quad (17)$$

Транспонированная матрица $[A]_T = [B]$ образуется из исходной матрицы $[A]$ путем замены строк на столбцы. Элементы матриц $[B]$ и $[A]$ связаны соотношением $b_{ij} = a_{ji}$. Симметричная матрица равна своей транспонированной матрице.

Комплексно-сопряженная матрица $[A]^* = [C]$ образуется из исходной $[A]$ путем замены элементов на комплексно-сопряженные величины $c_{ij} = a^*_{ij}$.

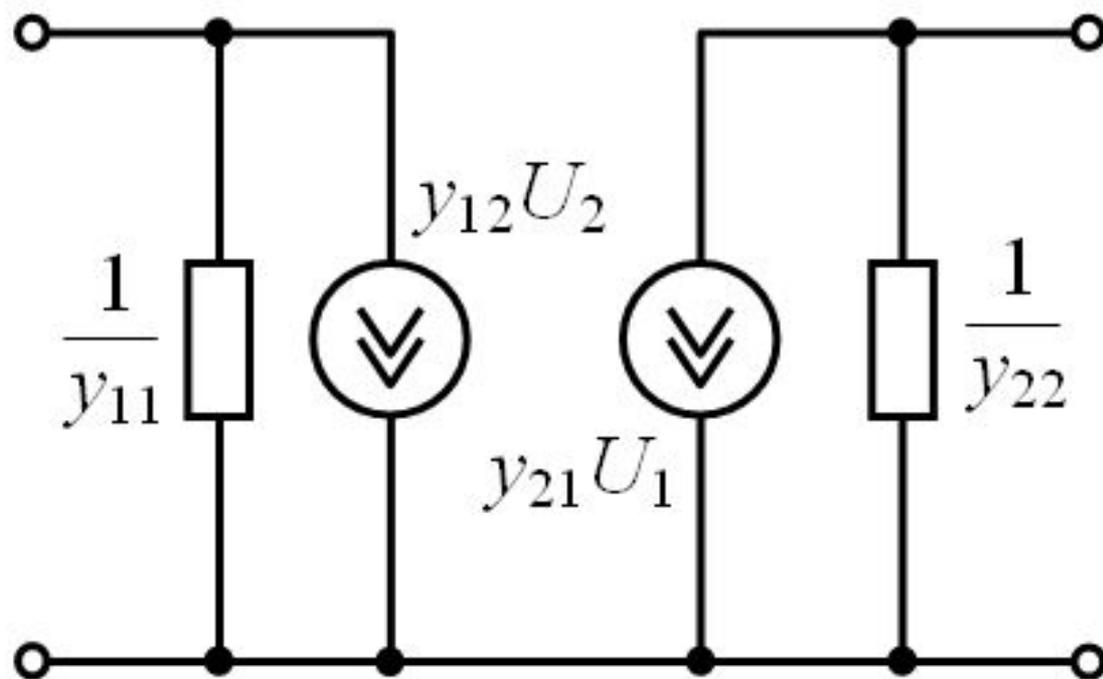
Эрмитово сопряженная матрица $[A]_э = [A]_T^* = [D]$ образуется из транспонированной матрицы $[A]_T$ путем замены элементов на комплексно-сопряженные величины: $d_{ij} = a^*_{ji}$. Иначе говоря, эрмитово сопряженная матрица $[A]_э$ есть транспонированная, комплексно-сопряженная матрица по отношению к исходной $[A]$.

Согласно проведенным определениям для квадратной матрицы 2-го порядка имеем:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad - \quad \text{исходная матрица;}$$

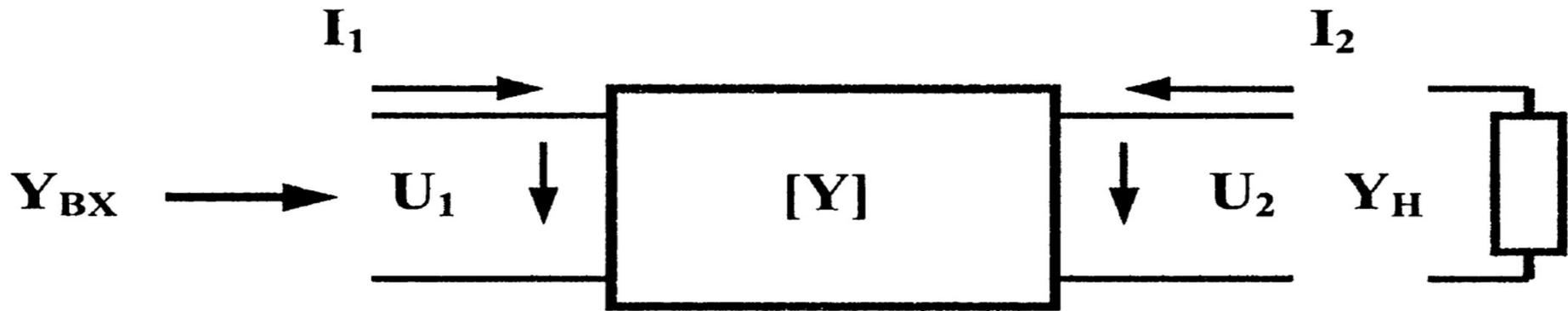
$$[\mathbf{A}]_{\text{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \quad - \quad \text{транспонированная матрица;}$$

$$[\mathbf{A}]^* = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{bmatrix} \quad - \quad \text{комплексно-сопряженная матрица;}$$



$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} \quad y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0}$$

$$y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} \quad y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0}$$



$$\left. \begin{aligned} I_1 &= Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2; \\ I_2 &= Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2. \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = -Y_{22}U_2$$

$$Y_{BX} = Y_{11} - \frac{Y_{12} Y_{21}}{Y_{22} + Y_H}$$

$$K_U = \frac{U_2}{U_1} = - \frac{Y_{21}}{Y_{22} + Y_H}$$

При $|Y_{22}| \ll |Y_H| = 1/R_H$ и $|Y_{21}| = S$ – крутизне электронного прибора коэффициент $K_U = SR_H$.

$$K_i = \frac{I_2}{I_1} = \frac{Y_{21} Y_H}{Y_{11} (Y_{22} + Y_H)}$$

При $|Y_{22}| \ll |Y_H|$ коэффициент $K_i = Y_{21}/Y_{11}$

$$K_P = \frac{P_{ВЫХ}}{P_{ВХ}} = \frac{|Y_{21}|^2 g_H}{\operatorname{Re} Y_{ВХ} |g_H + Y_{22}|^2},$$

$$\text{где } P_{ВЫХ} = 0,5 I_2^2 / g_H, P_{ВХ} = 0,5 U_1^2 \operatorname{Re} Y_{ВХ}$$

Матричный анализ применим и к исследованию объектов, являющихся соединением группы четырехполюсников. Так при параллельном соединении четырехполюсников (рис. 3.7,б) их матрицы суммируются

$$[Y_{ОБЩ}] = \sum_{i=1}^n [Y_i]$$

При каскадном соединении четырехполюсников

сначала следует от Y-параметров перейти к A-параметрам, новые матрицы перемножить, а затем вернуться к Y-параметрам.

Соотношения между комплексными амплитудами токов и напряжений на входе и выходе четырехполюсника в системе A-параметров определяются следующими двумя уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= A_{11} U_2 + A_{12} I_2; \\ I_1 &= A_{21} U_2 + A_{22} I_2. \end{aligned} \right\}$$

или в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Путем алгебраических преобразований получим следующие выражения, позволяющие от Y-параметров перейти к A-параметрам и обратно:

$$[\mathbf{Y}] \Rightarrow [\mathbf{A}]$$

$$A_{11} = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}, \quad A_{12} = \frac{1}{Y_{21}}, \quad A_{21} = \frac{Y_0}{Y_{21}}, \quad A_{22} = \frac{Y_{11}}{Y_{21}},$$

$$\text{где } Y_0 = Y_{12}Y_{21} - Y_{11}Y_{22}.$$

$$[\mathbf{A}] \Rightarrow [\mathbf{Y}]$$

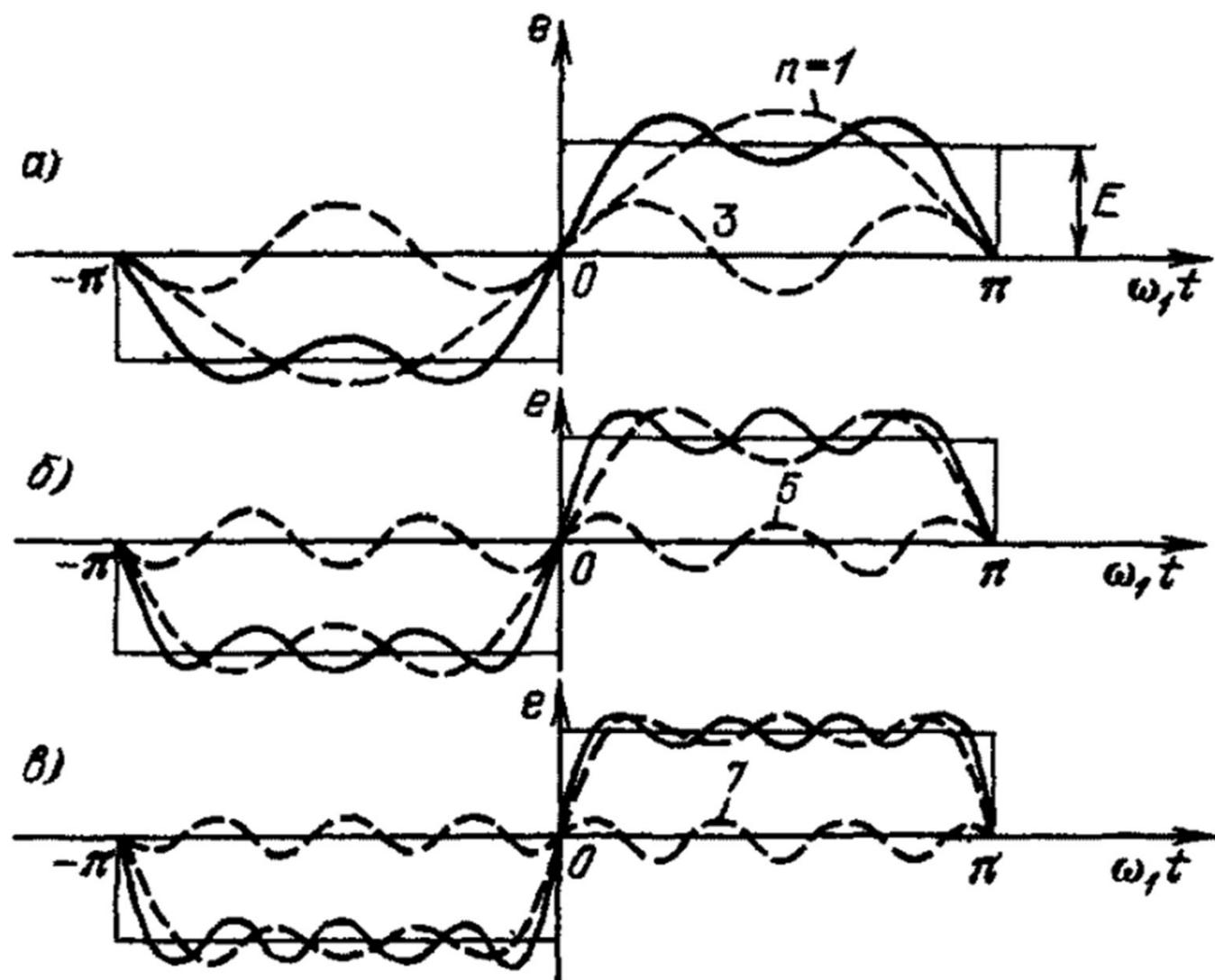
$$Y_{11} = \frac{A_{22}}{A_{12}}, \quad Y_{12} = \frac{A_0}{A_{12}}, \quad Y_{21} = \frac{1}{A_{12}}, \quad Y_{22} = \frac{A_{11}}{A_{12}},$$

$$\text{где } A_0 = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}.$$

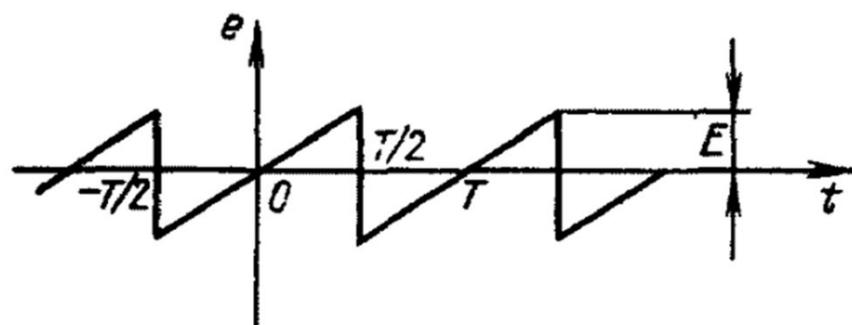
Определив согласно А-параметры отдельных четырехполюсников, найдем согласно правилу перемножения матриц общую матрицу всего объекта:

$$[A_{\text{общ}}] = \prod_{i=1}^n [A_i]$$

Далее согласно и по программе можно перейти к Y-параметрам, а по ним согласно рассчитать характеристики всего объекта.

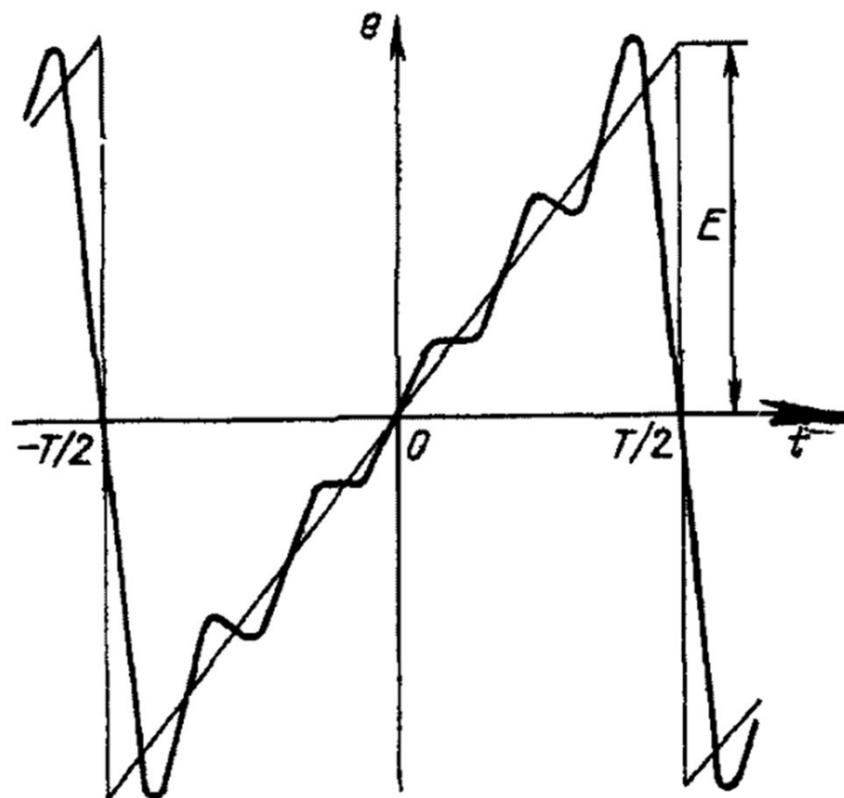


Суммирование 1-й и 3-й гармоник (а), 1, 3 и 5-й гармоник (б), 1, 3, 5 и 7-й гармоник (в) колебания, показанного на рис. 2.3



Периодическое колебание пилообразной формы

Сумма первых пяти гармоник колебания



Спектральный анализ сигналов

1. Непрерывное преобразование Фурье

Спектральное представление сигналов основано на разложении функций в ряд.

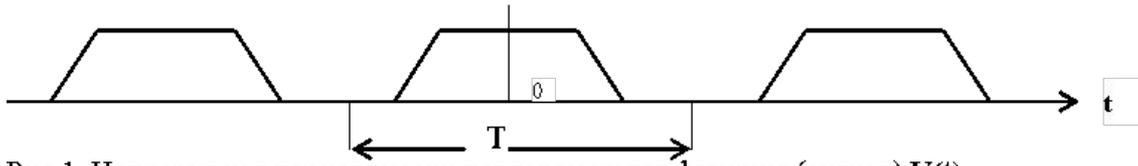


Рис.1. Непрерывная периодически повторяющаяся функция (сигнал) $U(t)$.

Периодически повторяющаяся функция $U(t)$ (далее - сигнал) любой формы с периодом повторения T на *бесконечном* интервале времени может быть представлена *бесконечной* суммой элементарных тригонометрических функций с надлежащим образом подобранными параметрами: амплитудой A_k и начальной фазой φ_k :
или в форме:

$$U(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k) \quad (1)$$

$$U(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)) \quad (2)$$

Преобразование выражения (1) в форму (2) основано на представлении гармонического колебания в виде двух квадратурных составляющих: косинусной и синусной с нулевыми начальными фазами.

Это разложение (1) или (2) периодической функции (сигнала) в бесконечный ряд тригонометрических функций называется **рядом Фурье**, а функции ряда называются **гармониками**.

Частоты гармоник кратны основной частоте ω_1 :

$$\omega_1 = \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad - \text{ круговая частота (рад/сек)}$$

$$f_1 = \frac{1}{T} \quad - \text{ циклическая частота (герц)}$$

Коэффициенты (амплитуды гармоник) ряда (2) могут быть вычислены:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{T/2}^{T/2} U(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{T/2}^{T/2} U(t) \cos(k\omega_1 t) dt$$

(3)

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{T/2}^{T/2} U(t) \sin(k\omega_1 t) dt$$

Амплитуды A_k и фаза φ_k гармоники ряда (1) связаны с коэффициентами a_k и b_k ряда (2) соотношениями:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \varphi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k}$$

Ряд Фурье обычно принято представлять в комплексной форме.

Для преобразования выражения (2) в комплексную форму следует воспользоваться формулами Эйлера (представление тригонометрических функций экспоненциальными):

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \quad \sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

Тогда разложение $U(t)$ в ряд может быть представлено:

$$U(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2} - j \cdot b_k \frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2} \right)$$

или в форме:

$$U(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - jb_k}{2} e^{jk\omega_1 t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-jk\omega_1 t}$$

(4)

Обозначим коэффициенты ряда (4)

$$C_k = \frac{a_k - jb_k}{2} \quad C_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}$$

С учетом соотношений (3) коэффициенты C_k и C_{-k} вычисляются:

$$C_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U(t)(\cos(k\omega_1 t) - j \sin(k\omega_1 t)) dt$$

$$C_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U(t)(\cos(k\omega_1 t) + j \sin(k\omega_1 t)) dt$$

(5)

Так как $\cos(\alpha) \pm j \sin(\alpha) = e^{\pm j\alpha}$

то соотношения (5) в комплексной форме будут иметь вид

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) e^{-jk\omega_1 t} dt$$

$$C_{-k} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) e^{jk\omega_1 t} dt$$

Легко заметить, что значения C_{-k} отличаются от C_k лишь знаком показателя экспоненты.

Если ввести отрицательные значения k и учесть, что

$$\frac{a_0}{2} = C_0$$

то разложение в ряд $U(t)$ (4) можно представить в следующей форме:

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t}$$

И окончательно запишем формулы преобразования Фурье для периодически повторяющихся сигналов с периодом повторения T :

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \quad - \text{ прямое преобразование Фурье} \quad (6)$$

$$U(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} \quad - \text{ обратное преобразование Фурье} \quad (7)$$

где C_k комплексные гармоники – спектр периодически повторяющегося сигнала.

Еще раз обратим внимание на свойства спектра периодически повторяющегося сигнала на бесконечном интервале времени:

- спектр является дискретным;
- гармоники спектра кратны основной частоте $f = 1/T$ ($\omega = 2\pi/T$);
- число гармоник бесконечно;
- математически спектр содержит как реальные – положительные по частоте гармоники, так и отрицательные гармоники (k – отрицательные значения).

Спектр (а точнее спектральная плотность) не периодического, одиночного, сигнала может быть получен путем предельного перехода при $T \rightarrow \infty$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \Delta\omega = d\omega \rightarrow 0 \quad - \text{ интервал между соседними гармониками}$$

$$k\omega_1 = \omega \quad \omega - \text{ непрерывная частота}$$

$$C_k \rightarrow S(j\omega) \quad - \text{ спектральная плотность}$$

и преобразование Фурье для одиночного сигнала выполняется по

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt \quad (8)$$

Огибающая дискретного спектра периодического сигнала полностью совпадает со спектральной плотностью одиночного сигнала. Поэтому для получения спектра периодического сигнала с периодом T достаточно по (8) вычислить спектральную плотность для одиночного сигнала и взять дискретные его значения через $f = 1/T$.

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (9)$$

Пример:

Спектральная плотность прямоугольного импульса длительностью τ и амплитудой U_m

$$S(j\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_m \cdot e^{-j\omega t} dt = U_m \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{U_m}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2} \quad \text{Пределы интегрирования}$$

После подстановки пределов интегрирования и с учетом формул Эйлера получим

$$S(j\omega) = \frac{2 \cdot U_m}{\omega} \cdot \frac{e^{j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}}{2j} = U_m \cdot \tau \cdot \frac{\sin(\frac{\omega\tau}{2})}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

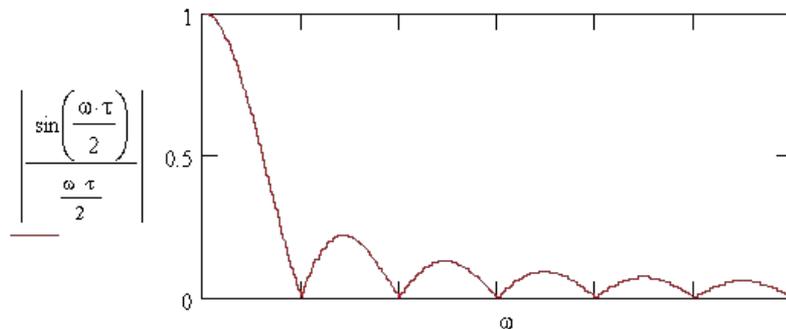


Рис.2. Модуль функции $\sin(x)/x$ (амплитудный спектр прямоугольного импульса)

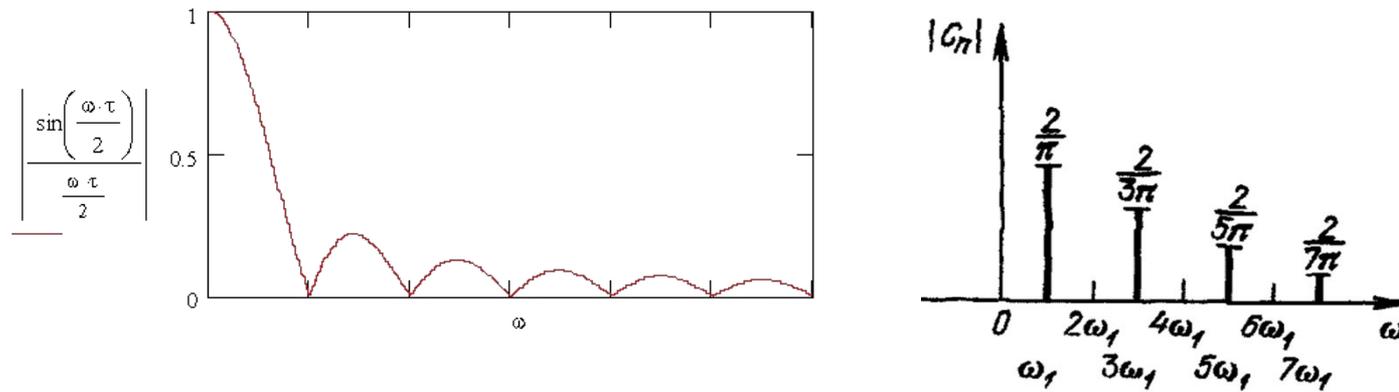


Рис.2. Модуль функции $\sin(x)/x$ (амплитудный спектр прямоугольного импульса)

Как следует из приведенного графика, функция $\sin(x)/x$ имеет лепестковый характер и принимает значения, равные 0 при $x = 2n\pi$ $n = 1, 2, 3...$

или для спектра при значениях частоты $f = 1/\tau, 2/\tau, 3/\tau...$

Уровень лепестков относительно главного составляет:

- первый - 0.217
- второй - 0.13
- третий - 0.09
- четвертый - 0.07

т.е., хотя в главной лепестке спектра и сосредоточена основная мощность прямоугольного импульса (более 90%), все же спектр (спектральная плотность) его достаточно медленно убывает с частотой.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

Дискретное преобразование Фурье основано на дискретизации непрерывных сигналов.

Пусть спектр сигнала $U(t)$, заданного на интервале T , ограничен верхней частотой F_B .

Тогда в соответствии с теоремой Котельникова (теоремой отсчетов Винера) такой сигнал может быть представлен своими дискретными значениями U_n ($n=0, 1 \dots N-1$), взятыми через интервалы времени

$$\Delta t = 1/2F_B$$

Число дискретных значений – отсчетов сигнала будет равно $N=T/\Delta t$.

Тогда при условии дискретизации сигнала соотношение для расчета гармоник спектра

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) e^{-jk\omega_1 t} dt$$

следует записать в виде суммы, заменив

$$dt \rightarrow \Delta t \quad T = N \cdot \Delta t \quad \omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{N \cdot \Delta t}$$

$$t = N \cdot \Delta t \quad \text{- текущее время}$$

$$c_k = \frac{1}{N \cdot \Delta t} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} U_n \cdot \exp\left(-j \cdot k \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{N \cdot \Delta t}\right) \cdot n \cdot \Delta t\right) \cdot \Delta t$$

окончательно дискретное преобразование Фурье принимает вид

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} U_n \cdot \exp\left(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{N} \cdot k \cdot n\right) \quad (10)$$

Некоторые свойства дискретного преобразования Фурье.

1. Сравним гармоники при $k=0$ и $k=N$; при $k=1$ и $k=N+1$ т.е. отстоящих на N :

$$c_0 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} U_n \quad c_N = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} U_n \cdot \exp(-j \cdot (2 \cdot \pi \cdot n))$$

Т.к. индексы отсчетов n — целочисленные значения

то $\exp(-j2\pi n) = \cos(2\pi n) - j \cdot \sin(2\pi n) = 1$

и $c_N = c_0$

$$c_1 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} U_n \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{N} \cdot n)$$

$$c_{N+1} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} U_n \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{N} \cdot (N+1) \cdot n) =$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} U_n \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{N} \cdot n) \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n)$$

То есть $c_1 = c_{N+1}$

Таким же образом можно показать, что $c_2 = c_{N+2}$ и т.д.

Т.е. при дискретном преобразовании Фурье число рассчитываемых гармоник равно числу отсчетов N . (Далее значения гармоник повторяются).

2. Рассмотрим гармоники c_1 и c_{N-1} c_2 и c_{N-2} , т.е. симметричные относительно гармоники $c_{N/2}$

$$\begin{aligned}
 c_{N-1} &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} U_n \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{N} \cdot (N-1) \cdot n) = \\
 &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} U_n \cdot \exp(+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{N} \cdot n) \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n) \\
 &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} U_n \cdot \exp(+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{N} \cdot n) = c_1^*
 \end{aligned}$$

Также и $c_{N-2} = c_2^*$ и т.д.

Т.е. гармоники, симметричные относительно $c_{N/2}$, являются комплексно сопряженными.

Обратное преобразование Фурье выполняется по формуле:

$$U_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot \exp(+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{N} \cdot k \cdot n) \quad (11)$$

Для выполнения дискретного преобразования Фурье (прямого и обратного) при прямом использовании соотношений (10) (11) потребуется $N \cdot N$ операций комплексных умножений и сложений (операция умножения требует больших временных или аппаратных затрат по сравнению с операцией суммирования).

Для уменьшения временных затрат для выполнения дискретного преобразования Фурье разработаны различные алгоритмы **быстрого преобразования Фурье**, основанные на прореживании данных по времени или по частоте. Для **БПФ** число отсчетов сигнала N должно быть степенью числа 2. Тогда необходимое число операций для полного преобразования Фурье составит $N \cdot \log_2 N$.

Спектр прямоугольного импульса.

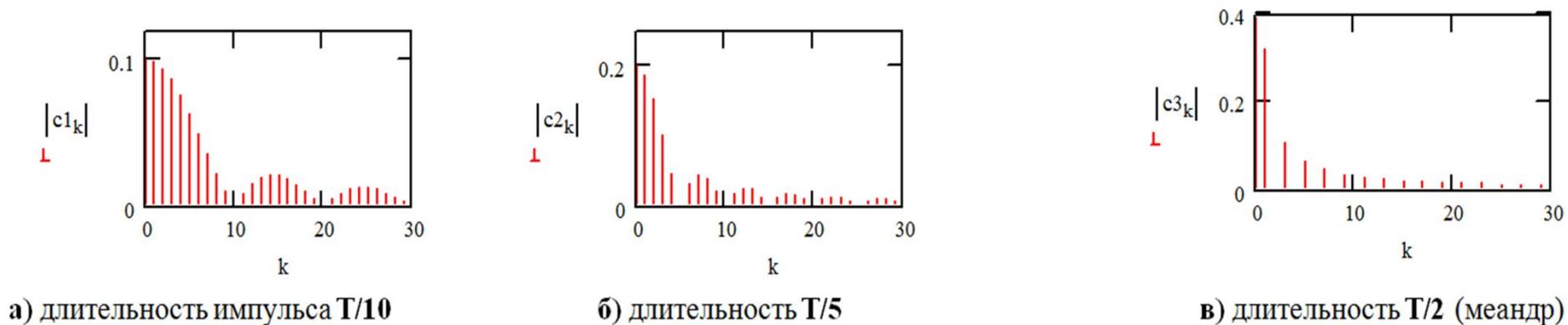


Рис.3. Амплитудные спектры прямоугольного импульса.

Импульс с экспоненциальными фронтами.

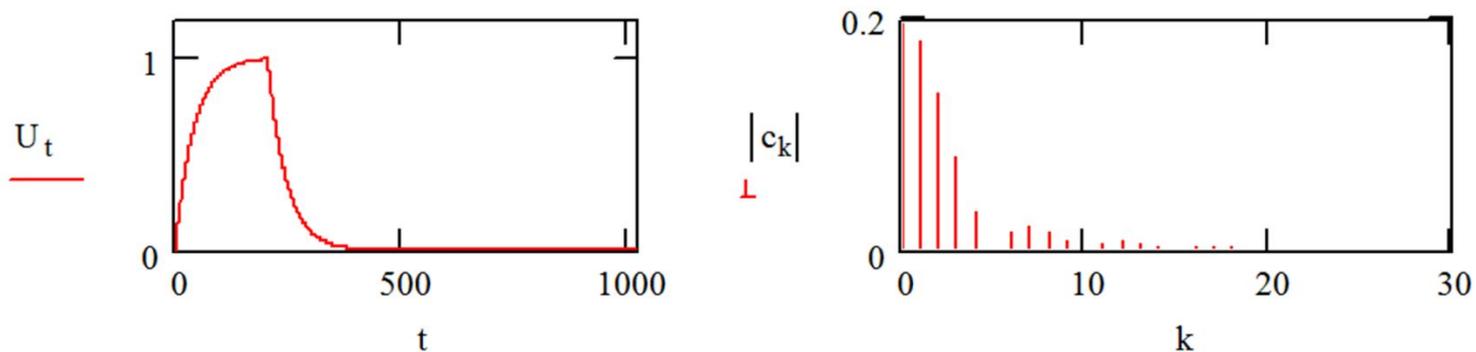


Рис.5. Импульс с экспоненциальными фронтами (длительностью $T/5$) и его спектр. При уменьшении крутизны фронтов импульса уменьшается уровень боковых лепестков спектра – следующих за главным.