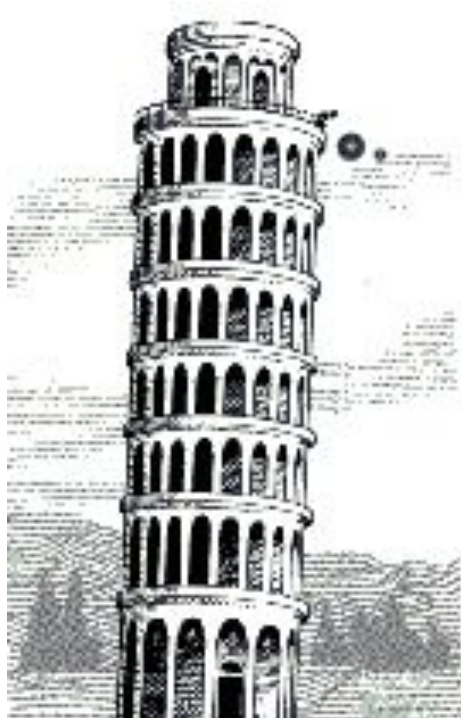


Математическая модель

*Свободное падение с учетом
сопротивления среды*

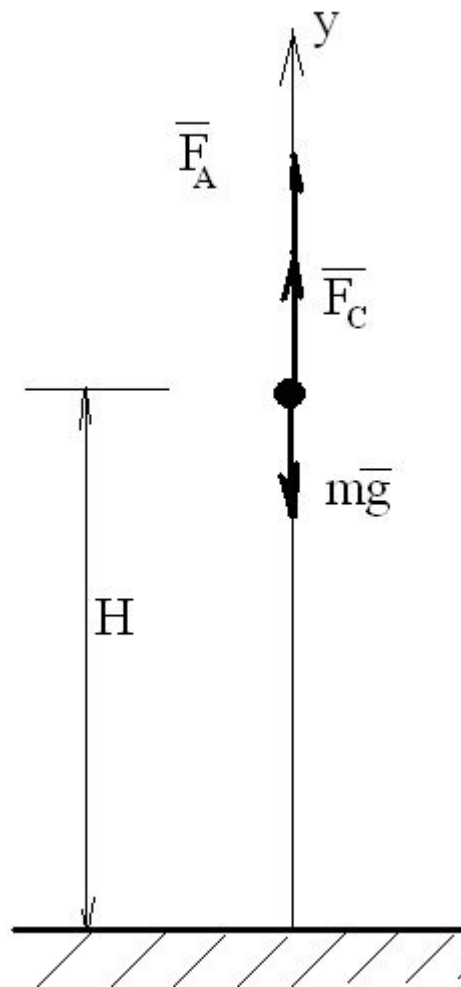


Глава 3.2 §3.2.2

11 класс

Действующие силы

- \vec{F}_A – архимедова сила, направленная вертикально вверх
- $m\vec{g}$ – сила тяжести, направленная вертикально вниз
- \vec{F}_c - сила сопротивления движению, направленная против движения



Анализ объекта

- Архимедова сила

$$F_A < mg$$

(плотность газа много меньше плотности тела, но плотность воды следует учесть)

пренебрегае

м

- Сила сопротивления среды

Зависит от плотности среды и зависит от скорости, но...

Очевидно, что на предмет, падающий с большой высоты, действует F_c увеличивающаяся по мере роста скорости v

Сила сопротивления F_c

- V – малая – преобладает вязкое трение жидкости или газа

F_c пропорциональна V

- С ростом V – возрастает лобовое сопротивление (парусный эффект)

F_c пропорциональна V^2

$$F_c = k_1 \cdot v + k_2 \cdot v^2$$

Математическая формализация

Из уравнения закона Ньютона

$$\bullet \quad m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_c$$

Проектируем данное векторное уравнение на ось Y

$$\bullet \quad a(t) = \frac{F_c(t) - mg - k_1 v(t) + k_2 v(t)^2 - mg}{m} = \frac{\quad}{m}$$

Ф1*

Численный подход к моделированию процессов

- $$a = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t}$$

Δt – малый шаг изменения времени

- $v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t$ Из Ф1* выразим a_i

$$v_{i+1} = v_i + \frac{k_1 v(t) + k_2 v(t)^2 - mg}{m} \Delta t$$

Численный подход к моделированию процессов

$$y_{i+1} = y_i + v_i \Delta t \quad - \text{ координата } y,$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$

По условию задачи падение происходит с высоты H с нулевой начальной скоростью \Rightarrow

$$v(0) = v_0 = 0 \quad y(0) = y_0 = H$$

Математическая модель

- Исходные данные

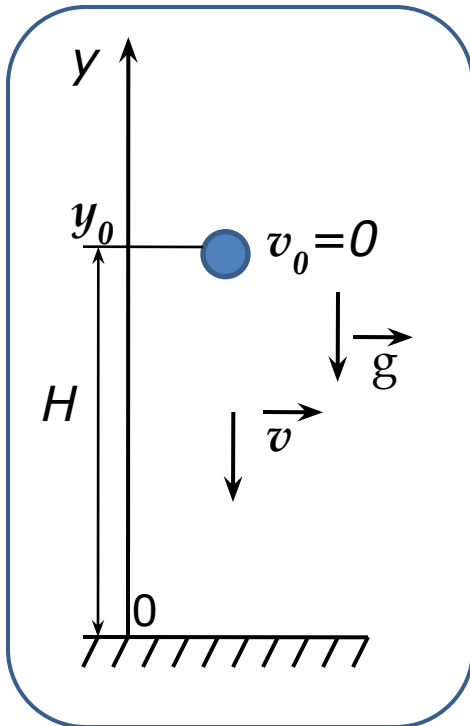
$$v(0) = v_0 = 0 \quad y(0) = y_0 = H$$

- Рекуррентные формулы

$$v_{i+1} = v_i + \frac{k_1 v(t) + k_2 v(t)^2 - mg}{m} \Delta t$$

$$y_{i+1} = y_i + v_i \Delta t$$

Свободное падение тела с высоты H



Без учета
силы сопротивления

$$a = -g$$

$$v = -gt$$

$$y = H - gt^2/2$$

С учетом силы
сопротивления

$$a(t) = \frac{k_1 v_i + k_2 v_i^2 - mg}{m}$$

$$y_{i+1} = y_i + v_i \Delta t$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{k_1 v_i + k_2 v_i^2 - mg}{m} \Delta t$$

k_1 – коэффициент вязкого трения

k_2 – коэффициент лобового сопротивления

Предельная скорость свободного падения

- С возрастанием скорости падения v возрастает сила сопротивления $F_c \Rightarrow$

$F_c - mg$ уменьшается.

- Когда $F_c = mg$, скорость выйдет на постоянное предельное значение v^* .
- Находим из уравнения

$$k_1 v + k_2 v^2 - mg = 0$$

Параметры модели

- Определим k_1 для конкретных ситуаций.
- k_1 – пропорциональная динамической вязкости среды (μ)
- $k_1 = c_1 \cdot \mu \cdot b$
- c_1 – определяется формой тела
- b – характерный размер тела в направлении,
⊥ потоку, обтекающего газа или жидкости.

Для тела сферической формы $k_1 = 6\pi \cdot \mu \cdot r$

Параметры модели

- Определим k_2 для конкретных ситуаций
- k_2 пропорциональна площади поперечного сечения тела δ , плотности среды ρ , и зависит от формы тела.
- $k_2 = \frac{1}{2} c_2 \cdot \delta \cdot \rho$
- Для шара $c_2 = 0,4$
- Для диска $c_2 = 1,1$
- Для полусферы $c_2 = 0,55$

Коэффициенты лобового сопротивления

- Шар $c_2 = 0,4$

Полусфера $c_2 = 1,1$

ДИСК $c_2 = 0,55$

Полный набор параметров

- Масса тела m
- Начальная высота H
- Динамическая вязкость среды μ
- Плотность среды ρ
- Начальная скорость движения тела v_0
- Характерный размер тела b в направлении перпендикулярном потоку (δ)
- Параметры c_1 и c_2 (отражающие форму тела)

ФОРМУЛЫ

Без учета сопротивления	С учетом сопротивления
$a = -g$ <hr/> $y = H - \frac{gt^2}{2}$ $v = -gt$	$a(t) = \frac{k_1 v_i + k_2 v_i^2 - mg}{m}$ <hr/> $v_0 = 0 \quad y_0 = H$ $v_{i+1} = v_i + \frac{k_1 v_i + k_2 v_i^2 - mg}{m} \Delta t$ $y_{i+1} = y_i + v_i \Delta t$

Задача 1

- Определите при какой скорости падения в воздухе железного шара радиусом 10 см сравниваются силы вязкого трения и лобового сопротивления.

Задача 2

- Определите максимальную скорость падения железного шара радиусом 10 см
- в воде ($\mu = 1,002 \text{ н}\cdot\text{с}/\text{м}$ $\rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$);
- в глицерине ($\mu = 1480 \text{ н}\cdot\text{с}/\text{м}$ $\rho = 1260 \text{ кг}/\text{м}^3$).

Задача 3

- Постройте численную модель падения твердого шара в воде с учетом архимедовой силы.

Задача 5

- Парашютист массой 90 кг разгоняется в свободном падении до скорости 10 м/с и на высоте 50 м раскрывает парашют, площадь которого 55 м^2 . Коэффициент сопротивления парашюта равен 0,9. Выполните следующие задания:
- постройте графики изменения скорости и высоты полета в течение первых 4 секунд;
- определите, с какой скоростью приземлится парашютист?
- сравните результаты моделирования с установившимся значением скорости, вычисленным теоретически.

	теоретически	моделирование
Скорость приземления, м/с		