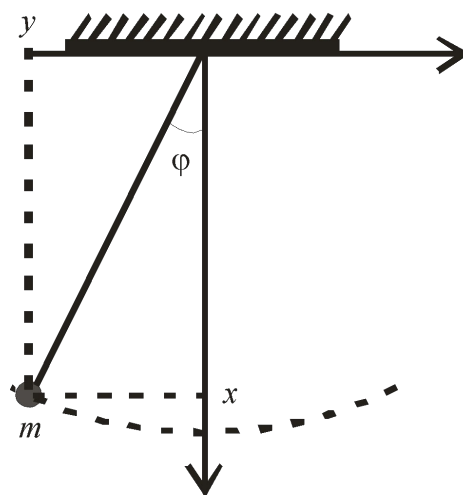


Понятие и принципы построения математической модели физических систем

- Попробуем построить простейшую модель маятника в виде массивного груза, подвешенного на нити и совершающего периодические или периодические затухающие колебания (рис. 2).



- В первую очередь нам необходимо сформулировать физическую модель. Колебание маятника не равномерное: в какой-то момент времени груз движется быстро, а в другой момент времени медленнее. Такое ускоренное движение, согласно второму закону Ньютона, может происходить только под действием внешней силы, в противном случае груз совершал бы, согласно принципу Галилея, прямолинейное равномерное движение. Попробуем выяснить, какие силы здесь задействованы. Груз электрически нейтрален, значит, на него не могут действовать электрические и магнитные поля. Из гравитационных полей существенный вклад вносится только со стороны Земли. Солнце и остальные планеты, как легко показать, действуют на маятник со значительно меньшими силами, и ими с высокой точностью можно пренебречь.

- Есть еще силы трения, в первую очередь, сила трения о воздух. При малых скоростях движения груза эта сила пропорциональна скорости и плотности воздуха. Коэффициент пропорциональности очень мал. Сила трения существенно меньше силы притяжения Земли и ею можно пренебречь, только если рассматриваются колебания в относительно небольшие времена. Это обусловлено специфическим характером сил трения, под действием которых из системы непрерывно уходит энергия. За большой промежуток времени маятник может потерять значительную часть своей энергии и это потеря скажется на движении маятника как заметное падение амплитуды колебания.
- К малозначительным факторам, влияющим на движение маятника, отнесем и вращение Земли. Тогда можно считать маятник совершающим движение в одной плоскости, образованной осями Ox и Oy декартовой системы координат.

- Если за F_x и F_y обозначить проекции вектора силы притяжения Земли на оси координат x и y , то согласно механике Ньютона уравнения движения маятника будут иметь вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y$$

- где m – масса маятника.
- Но мы воспользуемся механикой Лагранжа, так как нахождение всех компонентов сил в более сложной системе относительно трудоемкая работа.
- Для нашего маятника

$$T = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right], \quad U = mg(l - x)$$

$$T = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right], \quad U = mg(l - x)$$

- где g – ускорение свободного падения; l – длина нити. Отсчет потенциальной энергии ведется от нижнего положения равновесия. Символами x и y здесь обозначены координаты груза. Так как груз совершает движение по дуге окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = l^2$, то функции $x(t)$ и $y(t)$ во-первых, не являются независимыми переменными, во-вторых, удобно перейти в полярную систему координат по формулам

$$x = l \cos \varphi, \quad y = l \sin \varphi, \quad \varphi = \varphi(t)$$

- Проекции скорости на оси координат равны

$$\frac{dx}{dt} = -l \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = l \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

- С учетом этих выражений кинетическую и потенциальную энергию можно записать как

$$T = \frac{ml^2}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \quad U = mgl(1 - \cos \varphi)$$

- Определим функцию Лагранжа:

$$L = T - U = T = \frac{ml^2}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - mgl(1 - \cos \varphi)$$

- Функция Лагранжа зависит от двух переменных $\varphi, d\varphi/dt$. При выводе уравнения Эйлера – Лагранжа в общем случае под x мы подразумевали координату, но не уточняли, что понимается под словом координата и о какой системе (декартовой, полярной и т.д.) идет речь. Для уравнения Эйлера – Лагранжа это не принципиально. Применительно к колебанию маятника мы это уравнение можем записать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial d\varphi / dt} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

- Вычисление здесь соответствующих производных приводит к уравнению колебания математического маятника:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} (1)$$

- которое должно быть дополнено начальными условиями для угла и его скорости.
- Колебания, описываемые уравнением не затухают со временем, так как мы не учитывали явление трения.

- Если тело при взаимодействии с другими телами (или средами) увеличивает их кинетическую энергию, то тело испытывает силу сопротивления, если же уменьшает, то на тело будет действовать ускоряющая сила.
- Т.к. качающийся маятник приводит в движение воздух, что легко обнаружить, то мы сразу же заключаем, что маятник испытывает силу сопротивления, которое иначе называют еще силой трения.
- В науке о движении жидкостей – гидродинамике доказано, что сила F_c сопротивления, действующая со стороны среды на тело, зависит от его геометрических форм, относительной скорости ΔV тела и среды, ее плотности ρ и физической характеристики, называемой вязкостью ν .

- Характер силы гидродинамического сопротивления определяется одним безразмерным параметром Re , который называется числом Рейнольдса. Для тела достаточно малого размера L и скорости ΔV если $Re = L\Delta V/\nu \ll 1$, то сила F_c прямо пропорциональна ΔV : $F_c \sim \Delta V$. Пусть груз маятника имеет форму шара с радиусом a . С точностью до числового множителя порядка единицы силу сопротивления можно вычислить по формуле

$$F_c = \rho \nu a \Delta V.$$

- Так как идет речь о простейшей модели маятника, то мы вместо ΔV подставим окружную скорость самого маятника, а влияние скорости воздуха на величину силы сопротивления и других параметров будем считать учтенным в коэффициенте пропорциональности $k = \rho v a$. Тогда в полярных координатах имеем

$$F_c = -kl \frac{d\varphi}{dt}$$

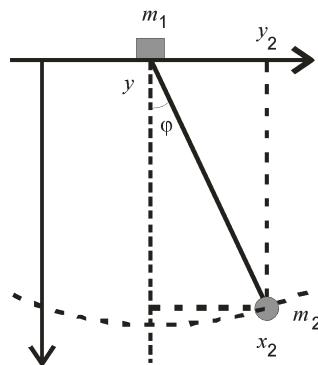
- где отрицательный знак означает, что сила F_c тормозящая. С учетом этой силы трения уравнение движения маятника будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi}{dt} + \frac{k}{m} \sin \varphi = 0$$

Рассмотренный пример с математическим маятником не демонстрирует всех достоинств механики Лагранжа. Уравнение (1) можно легко получить и в рамках механики Ньютона. Приведем другой пример маятника с подвижной точкой подвеса, где подход Лагранжа существенно упрощает вывод уравнений движения, по сравнению с подходом Ньютона. На рисунке 3 точка подвеса маятника с массой m_1 без трения скользит по горизонтальной поверхности. Массу подвешенного груза обозначим за m_2 .

- Координату тела массы m_1 обозначим за y , а координаты груза m_2 – за x_2 и y_2 . По рисунку 3 определяем

$$x_2 = l \cos \varphi, \quad y_2 = y + l \sin \varphi$$



- Учитывая, что величины x_2 , y_2 и φ зависят от времени, определим производные:

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{dy}{dt} + l \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{dx_2}{dt} = -l \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

- являющиеся компонентами скорости подвешенного груза. Скорость движения подвеса равна dy/dt . Тогда полная кинетическая энергия системы T равна сумме кинетической энергии движения грузов с массами m_1 и m_2 :

$$T = \frac{m_1}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left[\left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left[\left(l \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + 2l \cos \varphi \frac{dy}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right]$$

- Вклад в полную потенциальную энергию U дает только подвешенный груз:

- Искомые уравнения движения из функции Лагранжа

$$U = m_2 gl(1 - \cos \varphi)$$

$$L = T - U = \frac{m_1 + m_2}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left[\left(l \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + 2l \cos \varphi \frac{dy}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right] - m_2 gl(1 - \cos \varphi),$$

- где неизвестными параметрами механической системы являются угол ϕ и смещение y подвеса, получаются из дифференциальных соотношений

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial dy/dt} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial d\varphi/dt} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

- Вычисление производных здесь не представляет трудностей. Опуская несложные выкладки, приведем соответствующие уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{lm_2}{m_1 + m_2} \left[\cos \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = 0$$

$$l \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \cos \varphi \frac{d^2 y}{dt^2} + g \sin \varphi = 0$$

- В приведенной форме эти уравнения не удобны для численного решения. Чтобы привести их в нормальную форму необходимо из первого уравнения с помощью второго исключить $d^2\phi/dt^2$. Аналогичным образом поступаем и со вторым уравнением. Простой расчет

$$\text{дает } \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{m_2}{m'} \frac{\sin \varphi}{1 - \frac{m_2}{m'} \cos^2 \varphi} \left[l \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + g \cos \varphi \right]$$

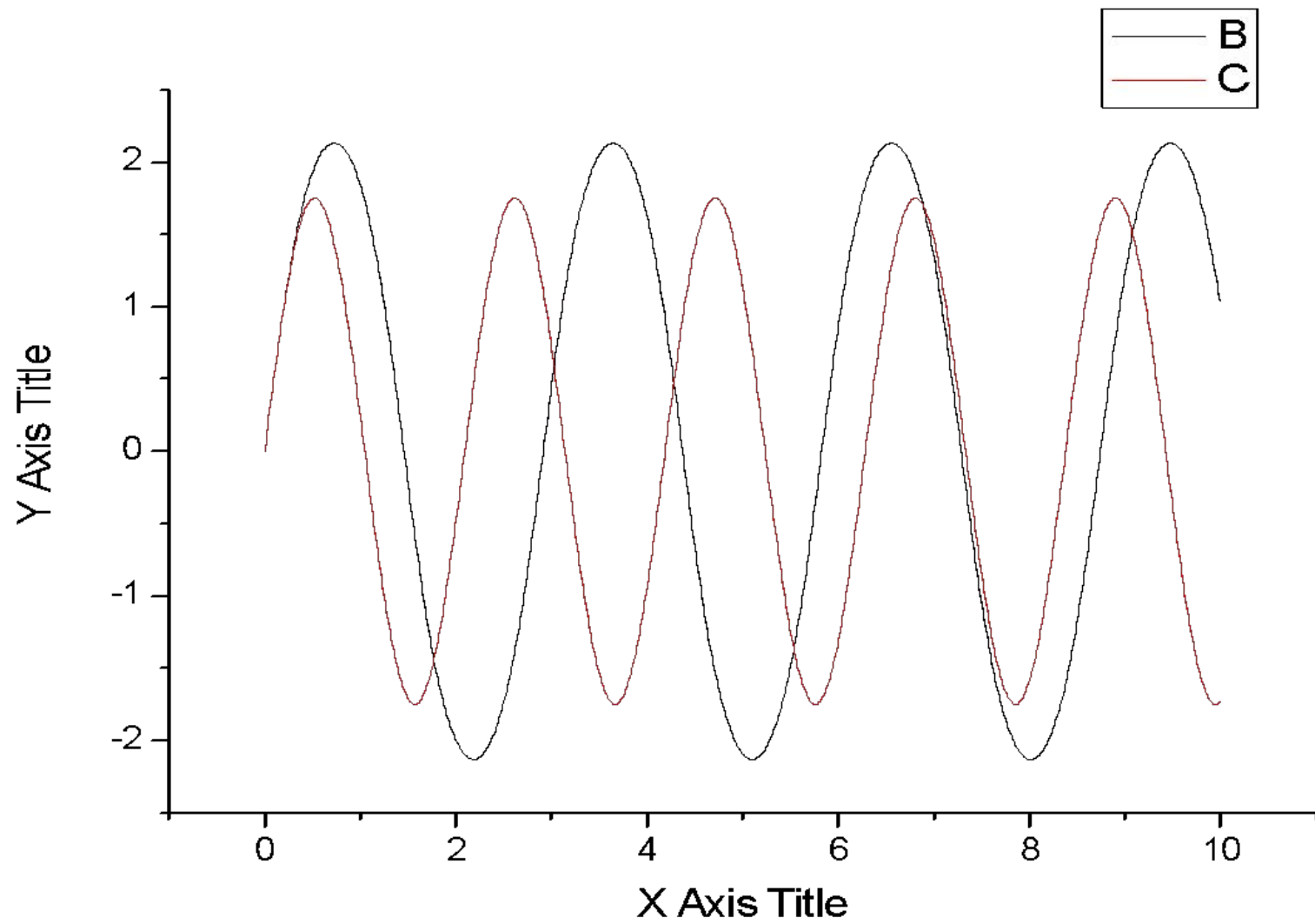
$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{\sin 2\varphi}{2} \frac{\frac{m_2}{m'}}{1 - \frac{m_2}{m'} \cos^2 \varphi} \left[l \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + g \cos \varphi \right] - \frac{g \sin \varphi}{m' = m_1 + m_2}.$$

- `#include<conio.h>`
- `#include<stdio.h>`
- `#include<math.h>`
- `float omeg= 3;`
- `float Fx(float x, float v, float t);`
- `float Fv(float x, float v, float t);`
- `int main()`
- `{`
- `FILE *f;`
- `f=fopen ("D:\\Inf\\dif_2.dat", "w");`
-
- `float x0, x, xp, xt, xn, h, t, tc;`
- `float v0, v, vp, vn;`
- `x0=0; v0=5.25;`
- `tc=10.0;`
- `h=0.01;`

- `x=x0; v=v0; //nach uslovie`
- `for (t=0; t<tc; t=t+h)`
- `{`
- `xt=v0/omeg*sin(omeg*t);`
- `printf ("  t= %.3f, x= %.3f xt= %.3f \n", t, x, xt);`
- `fprintf (f,"%.3f  %.3f  %.3f\n", t, x, xt);`
-
- `xn=x; vn=v;`
- `xp= xn +h*Fx(xn,vn, t);`
- `vp= vn +h*Fv(xn,vn, t);`
- `x= xn +0.5*h*(Fx(xn, vn, t)+Fx(xp, vp, t+h));`
- `v= vn +0.5*h*(Fv(xn, vn, t)+Fv(xp, vp, t+h));`
- `}`
- `getch();`
- `}`

- float Fx(float x, float v, float t)
- { float c;
- c=v;
- return c;
- }

- float Fv(float x, float v, float t)
- { float c;
- c=-omeg*omeg*sin(x);
- return c;
- }



- Меняя шаг интеграции, добавляя силу трения, увеличивая время расчета можно изучить поведение маятника в той или иной ситуации