

Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований

▪ Пусть имеется матрица $A = (a_{ij})$ квадратная порядка n и $|A| \neq 0$.

С помощью элементарных преобразований строк матрицы A приводим ее к единичной матрице.

Тогда это можно записать в виде:

$$B \cdot A = E \quad (1)$$

Такая матрица B обязательно найдется (используем леммы).

Умножая равенство (1) на A^{-1} справа получим:

$$B \cdot (A \cdot A^{-1}) = A^{-1}$$

$$A^{-1} = B$$

- Поэтому, если рассмотрим блочную матрицу:

$$A' = (A|E),$$

тогда при элементарных преобразованиях над матрицей A' получим матрицу:

$$(BA|BE) = (E|A^{-1})$$

Элементарными преобразованиями строк называются следующие:

- умножение строки матрицы на число отличное от нуля;
- умножение строки матрицы на число и прибавление к другой строке;
- перестановка двух строк матрицы.

- *Пример.* Найти обратную матрицу для матрицы A с помощью элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 9 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Линейное пространство

▪ *Определение.* Множество L элементов $x, y, z, \dots$ любой природы называется линейным (или аффинным) пространством, если выполнено следующее:

I. Имеется правило, по которому любым двум элементам x и y множества L ставится в соответствие элемент $z \in L$, который называется суммой элементов x и y и обозначается символом $x + y$;

II. Имеется правило, по которому любому элементу $x \in L$ и любому вещественному числу $\lambda \in R$ ставится в соответствие элемент $u \in L$, который называется произведением элемента x на число λ и обозначается $\lambda \cdot x = u$;

III. Указанные операции, подчинены следующим 8 аксиомам:

1) $x + y = y + x$ (коммутативность);

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность);

- 3) Существует нулевой элемент 0 такой, что $x + 0 = x$ для $\forall x \in L$;
- 4) Для $\forall x \in L$ существует противоположный элемент x' такой, что $x + x' = 0$
(будем обозначать $x' = -x$)
- 5) $1 \cdot x = x$ для $\forall x \in L$;
- 6) $\lambda(\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu)x$ для $\forall x \in L$ и $\forall \lambda, \mu \in R$ ассоциативность умножения на число;
- 7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ для $\forall x \in L$ и $\forall \lambda, \mu \in R$;
- 8) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ для $\forall \lambda \in R$ и $\forall x, y \in L$;
- 7) – 8) аксиомы дистрибутивности.

Примеры линейных пространств

- *Пример 1.* Множество всех векторов в трехмерном пространстве.

Пример 2. Рассмотрим множество A^n , элементами которой служат упорядоченные совокупности n произвольных вещественных чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, т.е. $A^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 \in R, x_2 \in R, \dots, x_n \in R\}$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

Легко проверить справедливость аксиом 1) – 8)

▪ *Пример 3.* Рассмотрим множество $\mathcal{C} = [a, b]$ всех функций $x = x(t)$ определенных и непрерывных на отрезке $[a, b]$. Операции сложения таких функций и умножения на число определим обычными правилами математического анализа

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ и } (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Легко проверить, что $\mathcal{C} = [a, b]$ является линейным пространством.

Простейшие свойства линейных пространств

▪ *Теорема 1.* В произвольном линейном пространстве L существует единственный нулевой элемент и для каждого $x \in L$ существует единственный противоположный элемент.

Теорема 2. В произвольном линейном пространстве L :

- 1) для всех $x \in L$ $0 \cdot x = 0$;
- 2) для всех $x \in L$ $-x = (-1) \cdot x$, т.е. для каждого элемента x противоположный элемент равен произведению этого элемента x на вещественное число -1 .

Линейная зависимость

- Рассмотрим произвольное линейное пространство L с элементами $x, y, z, \dots$, которые будем называть векторами.

Определение. Вектор y называется линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, что

$$y = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

Определение 1. Система векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется линейно зависимой, если хотя бы один из этих векторов является линейной комбинацией остальных векторов. В противном случае система векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется линейно независимой.

Пример. Если $x_1 = (1, 2, 4)$, $x_2 = (-1, 3, 2)$, $x_3 = (0, 5, 6)$, то вектора x_1, x_2, x_3 - линейно зависимы, т.к. $x_3 = x_2 + x_1$.

▪ *Определение 2.* Система векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется линейно зависимой, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что линейная комбинация:

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$ является нулевым элементом пространства L.

Систему векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$ будем называть линейно независимой, если она не является зависимой. По законам логики запишем отрицание определения 2.

Определение Система векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется линейно независимой, если для любой линейной комбинации $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$ равной нулю, все числа $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ равны нулю.

▪ *Теорема 3.* Система векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно зависима по определению 2, если и только если хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных векторов.

Теорема 4. Если система векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно независимой, то и всякая ее подсистема также линейно независима.

Базис пространства

▪ Определение: система векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства L называется базисом этого пространства, если:

1) система векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независима;

2) для всякого элемента $x \in L$ существуют числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ такие, что

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n \quad (1)$$

При этом равенство (1) называется разложением элемента x по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$, а числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ - называются координатами вектора x (относительно базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$).

▪ **Теорема 1.** При сложении двух любых элементов линейного пространства L их координаты (относительно любого базиса пространства L) складываются; при умножении произвольного элемента на любое число λ все координаты этого элемента умножаются на λ .

Определение. Линейное пространство L называется n – мерным, если в нем существует n линейно независимых элементов, а любые $(n + 1)$ элементов уже являются линейно зависимыми. При этом число n называется размерностью пространства L (и обозначается символом $\dim L = n$).

Определение. Линейное пространство L называется бесконечномерным, если в нем существует любое число линейно независимых элементов.