Модуль 5

А*<u>лгебра высказываний.</u>*
<u>Формальные теории.</u>
<u>Предикаты.</u>

Силлогизмы Аристотеля

Типы категорических суждений:

- А – общеутвердительное суждение
  «Всякое S суть P»
- Е – общеотрицательное суждение
  «Никакое S не суть P»
- I – частноутвердительное суждение
  «Некоторые S суть P»
- О – частноотрицательное суждение
  «Некоторые S не суть P»

силлогизм

Пример парадокса:

“Сказанное Платоном – ложно, - говорит Сократ. – Сказанное Сократом – истинно, - говорит Платон”

Алгебра высказываний

Примеры высказываний: «Москва – столица России» - истинное, «5 – четное число» – ложное, «студент 2 курса» – не высказывание, т.к. не является утверждением, «x-1=4» – не высказывание, т.к. неизвестно, какое значение примет x

Логические операции - **отрицание** « ¬ », **конъюнкция** – двухместная логическая операция ∧ («и») – по высказываниям *A, B* определяет высказывание *A* ∧ *B* («*A и B*»), которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A, B истинны. **Дизъюнкция** – двухместная логическая операция ∨ («или») – по высказываниям *A, B* определяет высказывание *A*∨*B* («*A* или *B*»), которое истинно тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний A, B – истинно. **Импликация** – двухместная логическая операция → («если…, то…») – по высказываниям *A, B* определяет высказывание *A*→*B* («если A, то B»), которое ложно тогда и только тогда, когда *A* - истинно, *B* – ложно. A называется посылкой, B – заключением. **Эквиваленция** – двухместная логическая операция ↔ («если и только если…, то…») определяет высказывание A ↔ B («если и только если A, то B»), которое истинно тогда и только тогда, когда A, B оба истинны или оба ложны.

Основные логические эквивалентности – примеры тавтологий

1. Коммутативность: $A \vee B = B \vee A$, $A \wedge B = B \wedge A$.
2. Ассоциативность:
$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$, $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$.
3. Дистрибутивность:
$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
4. Идемпотентность: $A \vee A = A$, $A \wedge A = A$.
5. Закон двойного отрицания: $\neg\neg A = A$.
6. Закон исключения третьего: $A \vee \neg A = 1$.
7. Закон противоречия: $A \wedge \neg A = 0$.
8. Законы де Моргана:
$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$.
9. Свойства операций с логическими константами:
$A \vee 1 = 1$, $A \vee 0 = A$, $A \wedge 1 = A$, $A \wedge 0 = 0$.

Здесь A, B и C – любые буквы

Формальные теории

<u>Составляющие формальной теории:</u>

1. Алфавит. 2. Формулы 3. Аксиомы 4. Правила вывода

Определение. *Выводом* формальной теории называется последовательность формул $A1$, $A2$, …, An , в которой все формулы – либо аксиомы, либо получаются из предыдущих по правилам вывода.

Определение. Говорят, что формула *A выводима* из множества формул Г (обозначение: $\Gamma \vdash A$), если существует вывод A_1, A_2 , …, A_n , где $A_n = A$, и есть три возможности:

- $A_i \in \Gamma$;
- A_i - аксиома;
- A_i получаются из предыдущих формул по правилам вывода.

Исчисление высказываний

1. Алфавит составляют:

• Пропозициональные буквы (от англ. proposition – высказывание) – заглавные буквы латинского алфавита (иногда с индексами – натуральными числами): $A, B, C, \ldots, A_1, B_1, C_1, \ldots$

• Логические связки: ¬,→.

• Скобки: (,).

Иногда в исчислении высказываний допускаются формулы с другими логическими связками, но при этом учитывается, как они выражаются через инверсию и импликацию. Так, $A \wedge B = \neg(A \rightarrow \neg B)$, $A \vee B = \neg A \rightarrow B$.

2. Формулы определяются следующим образом.

Определение. 1) Всякая пропозициональная буква есть формула. 2) Если A, B – формулы, то формулами являются также $\neg A$, $A \rightarrow B$. 3) Символ является формулой тогда и только тогда, когда это следует из 1) и 2).

3. Аксиомы задаются тремя схемами аксиом:

A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$.

A2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$.

A3. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$.

4. Правило вывода Modus ponens (сокращенно MP) – правило отделения

$A, A \rightarrow B \vdash B$.

Благодаря этому правилу от посылки «если A, то B», используя посылку «A», мы как бы отделяем заключение «B».

Пример.

Если у человека грипп, он болен.

У человека грипп.

Человек болен.

Теорема о дедукции

Теорема дедукции. Пусть Г – множество формул, *A*, *B* – формулы. Тогда $\Gamma, A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \to B$. Т.е. если формула В выводима из списка гипотез Г, дополненного формулой А, то формула $A \to B$ выводима из списка гипотез Г.

Справедлива и обратная теорема.

Теорема. $\Gamma \vdash A \to B \Rightarrow \Gamma, A \vdash B$.

Построение вывода в логике высказываний

Докажем, что выводима формула $(\neg B\to\neg A)\to(A\to B)$.

Сокращенно это записывается так: $\vdash(\neg B\to\neg A)\to(A\to B)$.

По теореме, обратной теореме дедукции, посылку можно перенести в левую часть: $\neg B\to\neg A\vdash A\to B$. Проделаем эту операцию еще раз: $\neg B\to\neg A, A\vdash B$.

Таким образом, нам нужно доказать, что из формул $\neg B\to\neg A$ и A выводима формула B. *Сначала* мы запишем гипотезы.

1. $\neg B\to\neg A$ – гипотеза.

2. A – гипотеза.

Формулу B удобно получить из аксиомы А3. Поэтому запишем эту аксиому:

3. $(\neg B\to\neg A)\to((\neg B\to A)\to B)$ А3.

К формулам 1 и 3 можно применить правило вывода Modus ponens

4. $(\neg B\to A)\to B$. MP 1, 3.

Посылку в формуле 4 можно получить из аксиомы А1, если заменить B на $\neg B$:

5. $A\to(\neg B\to A)$. А1 с подстановкой вместо B – $\neg B$.

Далее дважды применяем правило Modus ponens:

6. $\neg B\to A$. MP 2, 5.

7. B . MP 6, 4.

А1. $A\to(B\to A)$.
А2. $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$.
А3. $(\neg B\to\neg A)\to((\neg B\to A)\to B)$.

Метод резолюций в логике высказываний

Правила преобразования в предложение:

1. Замена импликации по формуле: $A \to B = \neg A \vee B$. В результате в формуле остаются связки: $\neg$, $\vee$, $\wedge$.

2. Преобразование выражений с инверсиями по закону двойного отрицания:

$\neg\neg A = A$, законам де Моргана: $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$. В результате инверсии остаются только перед буквами.

3. Приведение формулы к конъюнктивной нормальной форме с помощью дистрибутивных законов:

$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,

$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

4. Преобразование конъюнктивной нормальной формы во множество предложений $AB \Rightarrow A,B$.

Правило резолюций. Даны предложения: $C1 = P \vee C1'$, $C2 = \neg P \vee C2'$, где P - пропозициональная буква, $C1'$ и $C2'$ – предложения (в частности, пустые или содержащие только одну букву или ее отрицание). Правило резолюций формулируется так: $C1$, $C2 \vdash C1' \vee C2'$. $C1$, $C2$ называются *резольвируемыми предложениями*, а $C1' \vee C2'$ – *резольвентой*.

Примеры применения метода резолюций

Пример 1. Методом резолюций доказать теорему $\vdash \neg A \to (A \to B)$.

Доказательство. Запишем инверсию исходной формулы: $\neg(\neg A \to (A \to B))$.

Заменим все импликации по соответствующей формуле:
$\neg(\neg A \to (A \to B)) = \neg(\neg\neg A \lor (\neg A \lor B))$.

Применим закон двойного отрицания и закон де Моргана:
$\neg(\neg A \to (A \to B)) = \neg(A \lor (\neg A \lor B)) = \neg A \land \neg(\neg A \lor B) =$
$= \neg A \land \neg\neg A \land \neg B = \neg A \land A \land \neg B$.

Получаем предложения: $\neg A$, A, $\neg B$. Резольвируем их:

1. $\neg A$ – предложение.
2. A – предложение.
3. $\neg B$ – предложение.
4. $\square$. R 1, 2.

Примеры применения метода резолюций

Пример 2. Методом резолюций доказать теорему
$\vdash A \to (B \to A \wedge B)$.

Доказательство. Запишем инверсию исходной формулы:
$\neg(A \to (B \to A \wedge B))$.

Заменим все импликации по соответствующей формуле:
$\neg(A \to (B \to A \wedge B)) = \neg(\neg A \vee (\neg B \vee A \wedge B))$.

Применим закон двойного отрицания и закон де Моргана:
$\neg(A \to (B \to A \wedge B)) = \neg\neg A \wedge \neg(\neg B \vee (A \wedge B)) =$
$= A \wedge B \wedge \neg(A \wedge B) = A \wedge B \wedge (\neg A \vee \neg B)$.

Получаем предложения: A, B , $\neg A \vee \neg B$.

1. A – предложение.
2. B – предложение.
3. $\neg A \vee \neg B$ – предложение.
4. $\neg B$. R 1, 3.
5. □. R 2, 4.

Предикаты. Квантор общности.

Определение. *n-местным предикатом* на множестве X называется *n*-местная функция, каждый аргумент которой принадлежит множеству X, *а значениями которой являются* 0 или 1.

Примеры. 1. Предикат $A(x)$ ="$x \le 2$" на множестве $X = R$ – одноместный.

2. Предикат $B(x, y)$ ="$xy > 0$" на множестве $X = R2$ – двуместный.

Пусть дан n -местный предикат $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ на множестве X, означающий, что для набора $(x_1, x_2, ..., x_n)$ выполнено свойство A, и пусть x_i – одна из переменных. Тогда запись $\forall x_i A(x_1, x_2, ..., x_n)$ означает, что для всех значений переменной x_i свойство A выполнено. Символ $\forall$ называется *квантором всеобщности* (*общности*). Предикат $\forall x_i A(x_1, x_2, ..., x_n)$ является $(n-1)$-местным. Он зависит от переменных $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$. Если дан одноместный предикат $P(x)$, то утверждение $\forall x P(x)$ представляет собой нульместный предикат, то есть истинное или ложное высказывание.

Пример. На множестве $X = R$ дан предикат $A(x)$ ="$x \le 2$". Высказывание $\forall x(x \le 2)$ ложно.

Предикаты. Квантор существования

Пусть дан n -местный предикат $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ на множестве X, означающий, что для набора $(x_1, x_2, ..., x_n)$ выполнено свойство A, и пусть x_i – одна из переменных. Тогда запись $\exists x_i\, A(x_1, x_2, ..., x_n)$ означает, что существует значение переменной x_i, такое, что выполняется свойство A. Символ $\exists$ называется *квантором существования*. Предикат $\exists x_i\, A(x_1, x_2, ..., x_n)$ является $(n-1)$-местным. Если дан одноместный предикат $P(x)$, то утверждение $\exists x P(x)$ представляет собой нульместный предикат, то есть истинное или ложное высказывание.

Примеры.

1. На множестве $X = R$ дан предикат $A(x) =" x \le 2"$. Высказывание $\exists x(x \le 2)$ истинно.

2. X={1,2,3,…} – множество натуральных чисел;

а) P(x):= «x делится на 2». P(2)= «истина», P(3)= «ложь»;

б) P(x1, x2): «x1≥ x2». P(1,2)= «ложь», P(3,2)= «истина».

Эквивалентности для кванторов

Имеют место эквивалентности:

$\exists x_i A = \neg\forall x_i \neg A$. $\forall x_i A = \neg\exists x_i \neg A$.

$\neg\exists x_i A = \forall x_i \neg A$. $\neg\forall x_i A = \exists x_i \neg A$.

$\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y)$, $\exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y)$.

Разноименные кванторы можно переставлять только следующим образом:

$\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$, $\exists y \forall x P(x, y) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$.

Обратные формулы неверны.

Пример. Очевидно, что высказывание $\forall x \exists y (x + y = 0)$ ($X = R$) истинно. Поменяем кванторы местами. Получим высказывание $\exists y \forall x (x + y = 0)$, которое является ложным.

Выражения с кванторами можно преобразовывать следующим образом:

$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$, $\exists x (P(x) \vee Q(x)) = \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

Исчисление предикатов – теория 1 порядка

1. Алфавит составляют:

• Предметные константы – это имена (обозначения) предметов.

• Предметные переменные – буквы конца латинского алфавита с натуральными индексами: $x1$, $x2$, …, $y1$, $y2$, …

• Предикатные буквы – заглавные буквы латинского алфавита с натуральными индексами, означающие операции над переменными и константами.

• Логические связки: ¬,→.

• Квантор всеобщности ∀ .

• Синтаксические символы – скобки (,) и запятая.

2. Формула определяется несколькими этапами. Вначале вводится понятие терма.

Определение. 1) Предметные константы и предметные переменные есть *термы*. 2) Если $t1$, $t2$, …, tn , – термы, то в результате применения к ней функции получится терм. 3) Символ является термом тогда и только тогда, когда это следует из 1) и 2).

Определение. элементарная формула образуется при применении предикатной буквы к термам.

Пример. если "≤ " - предикатная буква, то $\sin x \leq \cos ax$ – элементарная формула.

Определение. 1) Всякая элементарная формула есть формула.2) Если A, B – формулы, то формулами являются также символы $\neg A$, $A\to B$, $\forall yA$. 3) Символ является формулой тогда и только тогда, когда это следует из 1) и 2).

Исчисление предикатов – теория 1 порядка

3. Аксиомы теории первого порядка делятся на два класса:

• Логические аксиомы:

1) $A\to(B\to A)$.

2) $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$.

3) $(\neg B\to\neg A)\to((\neg B\to A)\to B)$.

4) $\forall xi\, A(xi)\to A(t)$, где терм t свободен для переменной xi в формуле $A(xi)$.

5) $\forall xi\,(A\to B)\to(A\to\forall xiB)$, где xi – несвободная переменная в формуле A.

Отметим, что аксиомы 1) – 3) – тавтологии, 4) и 5) – общезначимые формулы.

• Собственные аксиомы.

У каждой теории первого порядка свои собственные аксиомы.

4. Правила вывода.

1) Modus ponens (MP).

$A, A\to B \vdash B$.

2) Правило обобщения Gen.

$A\vdash\forall xA$.

Законы логики предикатов

Имеет место следующие равносильности:

1) $\neg \forall x\, F(x) = \exists x \neg F(x)$, $\neg \forall x\, F(x) = \forall x \neg F(x)$;

2) $\forall x(F(x) \wedge G(x)) = \forall x F(x) \wedge \forall x G(x)$, $\exists x(F(x) \vee G(x)) = \exists F(x) \vee \exists x G(x)$;

3) $\forall x \forall y\, F(x, y) = \forall y \forall x\, F(x, y)$, $\exists x \exists y\, F(x, y) = \exists y \exists x\, F(x, y)$;

4) $\forall x\, (F(x) \wedge C) = \forall x\, F(x) \wedge C$, $\forall x\, (F(x) \vee C) = \forall x\, F(x) \vee C$;

5) $\exists x\, (F(x) \wedge C) = \exists x\, F(x) \wedge C$, $\exists x\, (F(x) \vee C) = \exists x\, F(x) \vee C$;

6) $C \to \forall x\, F(x) = \forall x\, (C \to F(x))$, $C \to \exists x\, F(x) = \exists x\, (C \to F(x))$.

Эти равносильности называются также законами логики предикатов.

Формула C не содержит вхождений переменной x.

Применяются также законы:

$F \leftrightarrow G := (F \to G) \wedge (G \to F)$, $F \to G := \neg F \vee C$.

$\neg\neg F = F$, $\neg (F \vee C) = \neg F \wedge \neg G$, $\neg (F \wedge G) = \neg F \vee \neg G$

С помощью равносильностей можно преобразовывать формулы.

Формула ЛП G называется логическим следствием формулы F, если G истинна во всех интерпретациях, в которых F истинна. Запись: $F \to G$.

Имеют место логические следования:

7) $\exists x(F(x) \wedge G(x))\ \exists x F(x) \wedge \exists x G(x)$, $\forall x\, F(x) \vee \forall\ \exists x G(x) \Rightarrow \forall x(F(x) \vee G(x))$;

8) $\forall x F(x) \to H \Rightarrow \exists x(F(x) \to H)$, $\exists x F(x) \to H \Rightarrow \forall x(F(x) \to H)$,

где формула H не содержит вхождений переменной x.

Теоремы о подстановках. Предваренная нормальная форма.

Пусть $F(x)$ – формула, t – терм. Тогда имеют место следующие **теоремы**.

Формула $\forall x F(x) \rightarrow F(t)$,где t – терм, свободный для переменной x в формуле F, есть тавтология.

Формула $F(t) \rightarrow \exists x F(x)$, где t – терм, свободный для переменной x в формуле F, есть тавтология.

Формула ЛП F называется находящейся в **ПНФ**, если она имеет вид:
$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n F_0$,где Q_i, $i= 1..n$ – один из кванторов ($\forall$, $\exists$), $x_i \neq x_j$, если $i \neq j$,
F_0 – формула, не имеющая кванторов.

Пример - Формула $\forall x \forall y \exists z\, (Q(x,y) \rightarrow R(z))$ находится в ПНФ.

Для любой формулы ЛП существует логически эквивалентная ей формула, находящаяся в ПНФ. Приведение данной формулы ЛП к ПНФ можно произвести с помощью равносильностей (1-6) и следований (7-8).

Сколемовская стандартная форма

Пусть формула F находится в предваренной нормальной форме Q1 x1 …Qn xn F0, где F0 есть конъюнктивная нормальная форма. Если Qr, 1≤ r ≤n, есть квантор существования в префиксе Q1x1…Qn xn, рассмотрим случаи:

1) никакой квантор общности не стоит в префиксе левее Qr. Тогда выбираем новую (не встречавшуюся в формуле) константу c и заменяем все xr в F0
на c; вычеркиваем Qr xr из префикса;

2) имеется непустой список Qr1, …, Qrm, 1≤ r1≤ …≤rm< r, всех кванторов общности, встречающихся в префиксе левее Qr. Тогда выбираем новый (не встречавшийся в формуле функциональный символ f, заменяем все xr в F0 на f(xr1, …, xrm).

Выполняем эту процедуру для всех кванторов существования в префиксе.

Полученная в результате формула имеет, по определению, сколемовскую стандартную форму. Константы и функторы, используемые для замены переменных
кванторов существования, называются сколемовскими функциями.

Пример – Указать ССФ формулы ∃ x ∀y ∀ z ∃u∀v ∃w P(x,y,z,u,v, w).

Ответ – ∀y ∀ z∀v P(x,y,z, f(y,z), v,g(y,z,v))