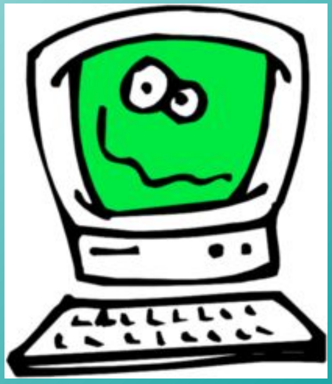
Элементы математической логики

Алгебра высказываний



ЛОГИКА –

ука о формах и законах
еского мышления и о законах
доказательных рассуждений

АЛГЕБРА ЛОГИКИ-

математический аппарат, с помощью
которого записывают, вычи
упрощают и преобразовы
логические высказыван

В XVII веке немецкий ученый и философ Вильгельм Лейбниц попытался построить первые логические исчисления, усовершенствовал и уточнил логические символы.

Немного истории…

В середине XIX века великий математик Джордж Буль определил возникновение математической логики. Начальный раздел математической логики называют алгеброй логики или Булевой алгеброй.

Логическое высказывание — это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

ПРИМЕРЫ:

- 6 — четное число
- Рим — столица Франции
- В городе А более миллиона жителей
- У него голубые глаза

- Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания "не", "и", "или", "если... , то", "тогда и только тогда" и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются логическими связками.
- Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются составными. Высказывания, не являющиеся составными, называются элементарными.

ЛОГИЧЕСКИЕ СВЯЗКИ

не, или, и,
если …то,
тогда и только тогда…

ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Составные-

высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок ***не, или, и, если …то, тогда и только тогда…*** и др.

Простые (элементарные)-

высказывания, не являющиеся составными

- Истинность или ложность составных высказываний зависит от истинности или ложности входящих в него простых высказываний.
- Каждые логические связки рассматриваются как *операции над логическими высказываниями* и имеют свое название и обозначение: отрицание (инверсия), конъюнкция (логическое сложение), дизъюнкция, импликацией

ЛОГИЧЕСКИЕ СВЯЗКИ

не, или, и,
если …то,
тогда и только тогда…

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

не - отрицание
или – конъюнкция
и - дизъюнкция
если …то - импликация
тогда и только тогда… - эквиваленция

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Отрицание или инверсия(НЕ), обозначение: $\overline{a}$

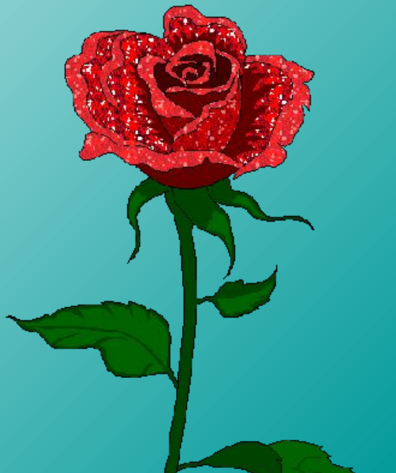
a	$\overline{a}$
1	0
0	1

Конъюнкция или логическое умножение (И), обозначение: $a \wedge b \quad (a \cdot b)$

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Дизъюнкция или логическое сложение(ИЛИ), обозначение: $a \vee b \quad (a + b)$

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0



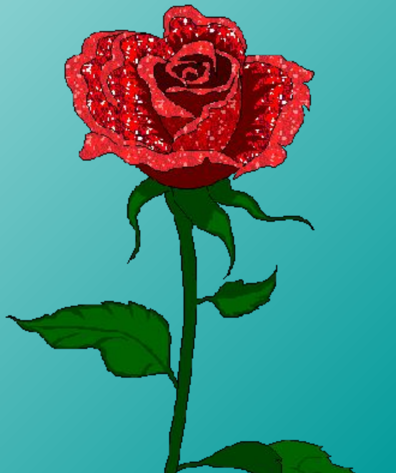
ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Импликация (Если…, то… Из… следует… … влечет…), обозначение: $a \rightarrow b$

a	b	$a \rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Эквиваленция (Тогда, когда…), обозначение: $a \leftrightarrow b$

a	b	$a \leftrightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1



ОЕ ФОРМУЛА АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ?

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть за логической формуло

Определение логической формулы:

1) Всякая логическая переменная и символы “истина” (1) и “ложь” (0) — формулы.

2) Если A и B — формулы, то $\bar{A}$, $\bar{B}$, A ^ B , A v B , A => B , A <=> B формулы.

3) Никаких других формул в алгебре логики нет.

НАПРИМЕР:

Формализуем высказывание: ***Если я куплю яблоки или абрикосы, то приготовлю фруктовый пирог .***

Введем переменные: ***A - я куплю яблоки , B – я куплю абрикосы, C- я приготовлю фруктовый пирог***

Составим формулу алгебры логики:

(A v B) => C.

Формализовали высказывание

УПРАЖНЕНИЯ:

Установите, какие из следующих предложений являются логическими высказываниями, а какие — нет (объясните почему) и установите истинность высказываний:

- V *Солнце есть спутник Земли*; (1)
- V 2+3>4; (1)
- *Сегодня отличная погода*;
- V *Санкт-Петербург расположен на Неве*; (1)
- *Музыка Баха слишком сложна*;
- V *Железо — металл*; (1)
- 2+*x*=12;
- V *Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей, то он прямоугольный*. (0)

(1)

Сформулируйте отрицания следующих высказываний:

- *Эльбрус — высочайшая горная вершина Европы*;
- *2>=5*;
- *10<7*;
- *все натуральные числа целые*;
- *через любые три точки на плоскости можно провести окружность*;
- *теннисист Кафельников не проиграл финальную игру*;
- *число n делится на 2 или на 3*;
- *этот треугольник равнобедренный*;
- *на контрольной работе каждый ученик писал своей ручкой*.

Определите, какие из высказываний в следующих парах являются отрицаниями друг друга:

- *10>9* **и** *10<=9*;
- *5<10* **и** *5>10*;
- *мишень поражена первым выстрелом* **и** *мишень поражена вторым выстрелом*;
- *машина останавливалась у каждого из двух светофоров* **и** *машина не останавливалась у каждого из двух светофоров*,
- *существуют белые слоны* **и** *все слоны серые*;
- *кит — млекопитающее* **и** *кит — рыба*;
- *неверно, что точка А не лежит на прямой а* **и** *точка А лежит на прямой а*;
- *прямая а параллельна прямой b* **и** *прямая а перпендикулярна прямой b*;

Формализуйте высказывания:

- *Если перекрутить яблоки и варить их на медленном огне 10 минут, то вы получите вкуснейшее повидло.*

$$F=(a \wedge b) \rightarrow c$$

- *Если перекрутить яблоки или груши и варить их на медленном огне 10 минут, то вы получите вкуснейшее повидло и сможете угостить им своих друзей*

$$F=\big((a \vee d) \wedge b\big) \rightarrow c \wedge k$$

Формализуйте высказывания:

- *Я не смогу сдать зачет и снова папа отругает меня и накажет*

$$F=\bar{a} \wedge b \wedge c$$

- *Треугольник может быть тупоугольным, остроугольным или прямоугольным, но равноугольным он быть не может*

$$F=(X \vee Y \vee Z) \wedge \bar{K}$$

Определите истинность высказываний:

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$$A \wedge B$$

Учащиеся работают с доской **и** отвечают на вопросы

$$\underbrace{\overset{\Vert}{1} \quad \wedge \quad \overset{\Vert}{1}}_{1}$$

Построение таблиц истинности

ТАБЛИЦА ИСТИННОСТИ –

таблица, которая выражает соответствие между всевозможными наборами значений переменных и значениями формулы.

Если в таблице истинности формула хотя бы один раз принимает значение 1, то она является <u>выполнимой.</u>

Алгоритм построения ТИ для логической формулы:

1) Определить количество строк и столбцов в ТИ
2) Заполняем заголовок таблицы (названия столбцов): сначала вписываем все простые высказывания, затем определяем порядок операций ($\overline{\ }, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) и вписываем соответственно составные высказывания
3) Заполняем первые столбцы ТИ всевозможными значениями для простых высказываний
4) Заполняем остальные столбцы, выполняя логические операции

Заголовок таблицы

Количество строк в таблице истинности формулы определяется по формуле $2^N + 1$, где N – количество простых высказываний в формуле

Например:

1) Для формулы $\overline{a \rightarrow b} \wedge \overline{c}$ количество строк в ТИ будет равно $2^3+1=8+1=9$
2) Для формулы $\overline{(a \vee b)} \leftrightarrow (\overline{a} \vee \overline{b} \rightarrow a)$ количество строк в ТИ будет равно $2^2+1=4+1=5$

Количество столбцов в таблице истинности формулы определяется по формуле **N + оп**, где N – количество простых высказываний в формуле , оп – количество логических операций в формуле

Например:

1) Для формулы $\overline{a \to b} \wedge \bar{c}$ количество столбцов в ТИ будет равно 3+4=7
2) Для формулы $(\overline{a \vee b}) \leftrightarrow (\bar{a} \vee \bar{b} \to a)$ количество строк в ТИ будет равно 2+7=9

Алгоритм построения ТИ для формулы

$$\overline{a \to b} \wedge \overline{c}$$

1) ***количество строк – 9, количество столбцов - 7***

Алгоритм построения ТИ для формулы

$$\overline{a \to b} \wedge \overline{c}$$

2)

n m

a	b	c	$\overline{c}$	$a \to b$	$\overline{a \to b}$	$m \wedge n$

Алгоритм построения ТИ для формулы

$$\overline{a \to b} \wedge \overline{c}$$

2)

n m

a	b	c	$\overline{c}$	$a \to b$	$\overline{a \to b}$	$m \wedge n$

Алгоритм построения ТИ для формулы

$$\overline{a \to b} \wedge \overline{c}$$

3)

a	b	c	$\overbrace{\overline{c}}^{n}$	$a \to b$	$\overbrace{\overline{a \to b}}^{m}$	$m \wedge n$
1	1	1				
1	1	0				
1	0	1				
1	0	0				
0	1	1				
0	1	0				
0	0	1				
0	0	0				

Алгоритм построения ТИ для формулы

$$\overline{a \to b} \wedge \overline{c}$$

3)

a	b	c	$\underbrace{\overline{c}}_{n}$	$a \to b$	$\underbrace{\overline{a \to b}}_{m}$	$m \wedge n$
1	1	1				
1	1	0				
1	0	1				
1	0	0				
0	1	1				
0	1	0				
0	0	1				
0	0	0				

a	$\overline{a}$
1	0
0	1

Алгоритм построения ТИ для формулы

$$\overline{a \to b} \wedge \bar{c}$$

4)

			n		*m*	
a	*b*	*c*	$\bar{c}$	$a \to b$	$\overline{a \to b}$	$m \wedge n$
1	1	1	0			
1	1	0	1			
1	0	1	0			
1	0	0	1			
0	1	1	0			
0	1	0	1			
0	0	1	0			
0	0	0	1			

a	b	$a \to b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Алгоритм построения ТИ для формулы

$$\overline{a \to b} \wedge \overline{c}$$

4)

$\underbrace{\phantom{\overline{c}}}_{}$ n $\qquad$ m

a	b	c	$\overline{c}$	$a \to b$	$\overline{a \to b}$	$m \wedge n$
1	1	1	0	1		
1	1	0	1	1		
1	0	1	0	0		
1	0	0	1	0		
0	1	1	0	1		
0	1	0	1	1		
0	0	1	0	1		
0	0	0	1	1		

Алгоритм построения ТИ для ф

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$$\overline{a \to b} \wedge \overline{c}$$

4)

a	b	c	$\overbrace{\overline{c}}^{n}$	$a \to b$	$\overbrace{\overline{a \to b}}^{m}$	$m \wedge n$
1	1	1	0	1	0	
1	1	0	1	1	0	
1	0	1	0	0	1	
1	0	0	1	0	1	
0	1	1	0	1	0	
0	1	0	1	1	0	
0	0	1	0	1	0	
0	0	0	1	1	0	

Алгоритм построения ТИ для формулы

$$\overline{a \to b} \wedge \overline{c}$$

4)

a	b	c	$\overbrace{\overline{c}}^{n}$	$a \to b$	$\overbrace{\overline{a \to b}}^{m}$	$m \wedge n$
1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0

Упражнение:

Построить ТИ следующих формул

1) $F = \bar{a} \to \overline{(b \vee c)}$

2) $F = \overline{a \vee \bar{b}} \wedge a \vee b$

3) $F = a \to b \wedge \bar{a}$

4) $F = (\overline{a \vee b}) \leftrightarrow (\bar{a} \vee \bar{b} \to a)$

Формулы, принимающие значение "истина" (1) при любых значениях истинности входящих в них переменных называются <u>тождественно истинными формулами</u> или <u>тавтологиями</u>.

Формула тавтологией <u>не</u> является, если существует хотя бы один набор значений переменных, при которых формула принимает значение «ложь» (0).

Установить, являются ли логические выражения тавтологиями.

а) $(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

б) $(\overline{A} \Rightarrow B) \wedge (\overline{A} \Rightarrow \overline{B}) \Rightarrow A$

Формулы, принимающие значение “ложь” (о) при любых значениях истинности входящих в них переменных называются <u>тождественно ложными формулами</u> или <u>противоречиями</u>.

Формула противоречием <u>не</u> является, если существует хотя бы один набор значений переменных, при которых формула принимает значение «истина» (1).

Установить, являются ли логические выражения противоречиями.

а) $X \wedge \left(Y \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y})\right)$

б) $\overline{X \rightarrow Y} \wedge \overline{Z}$

Если две формулы при одинаковых наборах значений входящих в них переменных, принимают одинаковые значения, то они называются <u>равносильными</u>.

Эквиваленция равносильных формул является тавтологией.

$F_1 \equiv F_2$ **тогда и только тогда, когда** $F_1 \Leftrightarrow F_2$ **– тавтология**

Равносильность формул можно установить двумя способами:

1 способ:

а) построить ТИ данных формул

б) сравнить значения формул: если при одинаковом наборе значений переменных значения истинности формул совпадают, то эти формулы равносильны.

2 способ:

а) построить ТИ обеих формул,

б) построить эквиваленцию этих формул и если она является тавтологией, то формулы равносильны.

Установить, верна ли равносильность формул (Выполните задание двумя способами, сравните результаты).

а) $\overline{A} \equiv A \wedge A$

б) $X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

Какие из следующих формул равносильны:

а) $\overline{X \wedge Y}$

г) $\overline{X \vee Y}$

б) $\overline{X} \vee \overline{Y}$

д) $Y \Rightarrow X$

в) $\overline{X} \Rightarrow \overline{Y}$

е) $X \wedge \overline{Y}$

ПОВТОРЕНИЕ

1) Что такое логика, алгебра логики?
2) Какие логические операции вы знаете?
3) Что такое таблица истинности?
4) Какая формула называется

   а) выполнимой

   б) тавтологией

   в) противоречием?

   Как определить?

5) Какие формулы называются равносильными?

Законы логики

Равносильные преобразования логических формул имеют то же назначение, что и преобразования формул в обычной алгебре. Они служат для упрощения формул или приведения их к определённому виду путем использования основных законов алгебры логики.

Под <u>упрощением формулы</u> понимают равносильное преобразование, приводящее к формуле, которая:

1) **не содержит операций импликации и эквиваленции;**
2) **содержит по сравнению с исходной меньшее число операций конъюнкции и дизъюнкции;**
3) **не содержит отрицаний неэлементарных формул.**

1. Закон двойного отрицания $\overline{\overline{x}} \equiv x$

2. Законы идемпотентности: $x \wedge x \equiv x; \quad x \vee x \equiv x$

3. Законы коммутативности: $x \wedge y \equiv y \wedge x; \quad x \vee y \equiv y \vee x$

4. Законы дистрибутивности

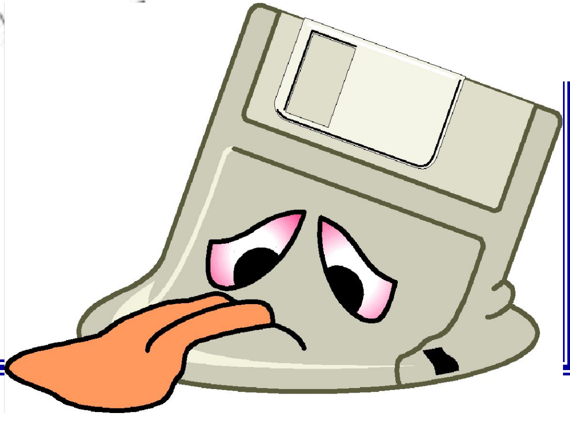
$$\begin{cases} а) & (x \wedge y) \vee z \equiv (x \vee z) \wedge (y \vee z); \\ б) & (x \vee y) \wedge z \equiv (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \end{cases}$$

5. Законы де Моргана:

$$\begin{cases} а) & \overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}, \quad \overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y} \\ б) & x \to y \equiv \overline{x} \vee y; \quad \overline{x \to y} \equiv x \wedge \overline{y} \\ в) & x \leftrightarrow y \equiv (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) \equiv (\overline{x} \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}); \end{cases}$$

6. Свойства констант:

$$\begin{cases} x \wedge 1 \equiv x; \quad x \wedge 0 \equiv 0; \quad x \wedge \overline{x} \equiv 0 \\ x \vee 1 \equiv 1; \quad x \vee 0 \equiv x; \quad x \vee \end{cases}$$



Пример упрощения логической формулы:

$$F = \bar{a} \wedge \bar{\bar{a}} \vee \overline{a \vee \bar{b}} \equiv$$

$$\overset{5a}{\equiv} \bar{a} \wedge \bar{\bar{a}} \vee \bar{a} \wedge \bar{\bar{b}} \equiv$$

$$\overset{1}{\equiv} \underbrace{\bar{a} \wedge a}_{0} \vee \bar{a} \wedge b \equiv$$

$$\overset{6}{\equiv} \underbrace{0 \vee \bar{a}}_{\bar{a}} \wedge b \overset{6}{\equiv} \bar{a} \wedge b$$

Упростите логические формулы:

1. $F = \bar{a} \wedge \bar{\bar{a}} \vee \overline{a \vee \bar{b}}$

2. $F = \overline{(a \to b) \wedge \bar{b}}$ *законы: (5б, 4б, 6, 5а, 1)*

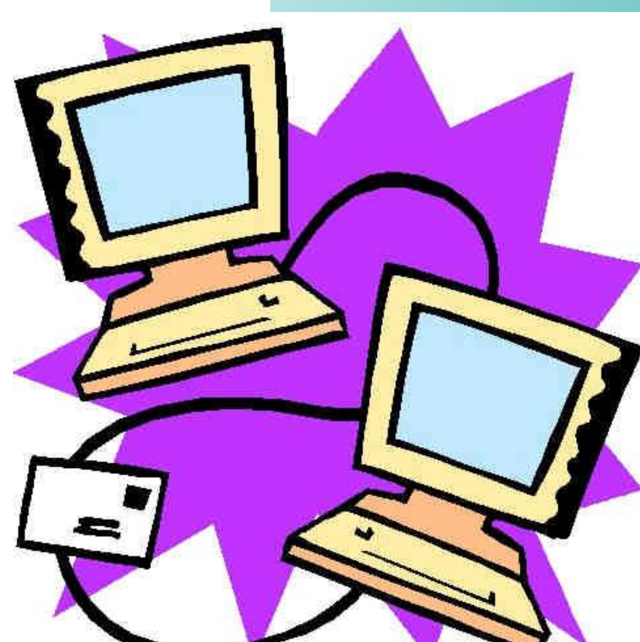
3. $F = \overline{\bar{a} \wedge (a \vee b)} \vee b$

4. $F = (a \to \bar{b}) \wedge (b \to a \vee \bar{b})$

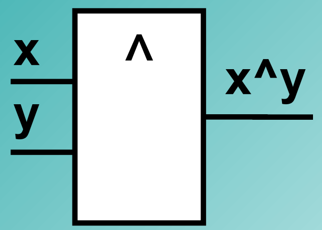
5. $F = (\bar{a} \to b) \to (\overline{b \to a})$

6. $F = a \to (\overline{b \to \bar{a}})$

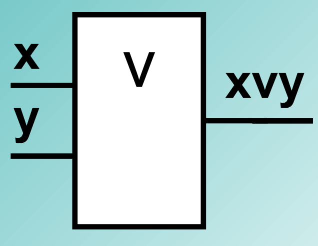
7. $F = (\overline{a \to c}) \to (\bar{a} \wedge b)$



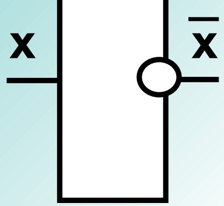
Базовые логические элементы компьютера



конъюнктор

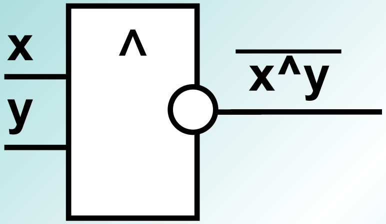


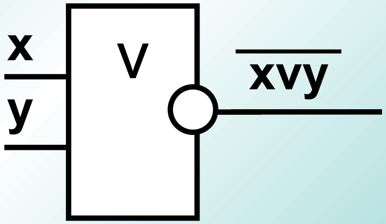
дизъюнктор



инвертор

Базовые логические элементы компьютера (частные случаи)





Пример построения схемы логической формулы:

$$\overline{a \rightarrow b} \wedge \bar{c} \equiv (\bar{a} \vee b) \wedge \bar{c}$$