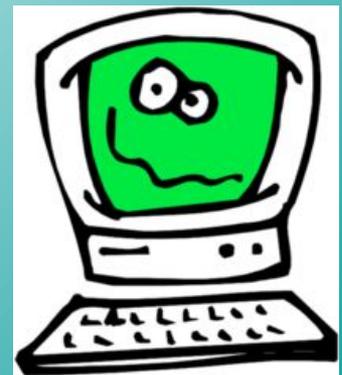


ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Алгебра высказываний





ЛОГИКА -

наука о формах и законах
человеческого мышления и о законах
доказательных рассуждений

АЛГЕБРА ЛОГИКИ-

математический аппарат, с помощью
которого записывают, вычи-
щают, упрощают и преобразовывают
логические высказывания



В XVII веке немецкий ученый и философ Вильгельм Лейбниц попытался построить первые логические исчисления, усовершенствовал и уточнил логические СИМВОЛЫ.



Немного истории...



В середине XIX века великий математик Джордж Буль определил возникновение математической логики. Начальный раздел математической логики называют алгеброй логики или Булевой алгеброй.

Логическое высказывание — это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

ПРИМЕРЫ:

- ✓ 6 — четное число
- ✓ Рим — столица Франции
- В городе А более миллиона жителей
- У него голубые глаза



- Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания "не", "и", "или", "если... , то", "тогда и только тогда" и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются логическими связками.
- Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются составными. Высказывания, не являющиеся составными, называются элементарными.

ЛОГИЧЕСКИЕ СВЯЗКИ

**не, или, и,
если ...то,
тогда и только тогда...**





ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Составные-

высказывания,
образованные из
других высказываний с
помощью логических
связок *не, или, и, если*
...то, тогда и только
тогда... и др.

Простые

(элементарные)-

высказывания, не
являющиеся
составными



- Истинность или ложность составных высказываний зависит от истинности или ложности входящих в него простых высказываний.
- Каждые логические связки рассматриваются как *операции над логическими высказываниями* и имеют свое название и обозначение: отрицание (инверсия), конъюнкция (логическое сложение), дизъюнкция, импликацией

ЛОГИЧЕСКИЕ СВЯЗКИ

*не, или, и,
если ...то,
тогда и только тогда...*

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

не - отрицание

или – конъюнкция

и - дизъюнкция

если ...то - импликация

тогда и только тогда... - эквиваленция

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Отрицание или
инверсия (**НЕ**),
 \bar{a} ,
обозначение:

a	\bar{a}
1	0
0	1

Конъюнкция или
логическое
умножение (**И**), $a \wedge b$ ($a \cdot b$)
обозначение:

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Дизъюнкция или
логическое
сложение (**ИЛИ**), $a \vee b$ ($a + b$)
обозначение:

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0



ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Импликация

(Если..., то...

Из... следует...

... влечет...),

обозначение: $a \rightarrow b$

a	b	$a \rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Эквиваленция

(Тогда, когда...),

обозначение: $a \leftrightarrow b$

a	b	$a \leftrightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1





КАКАЯ ФОРМУЛА АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ?

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть записать в виде логической формулы.



Определение логической формулы:

- 1) *Всякая логическая переменная и символы “истина” (1) и “ложь” (0) — формулы.*
- 2) *Если A и B — формулы, то \bar{A} , \bar{B} , $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ формулы.*
- 3) *Никаких других формул в алгебре логики нет.*

НАПРИМЕР:

Формализуем высказывание: Если я куплю яблоки или абрикосы, то приготовлю фруктовый пирог .

Введем переменные: A - я куплю яблоки ,
 B – я куплю абрикосы, C - я приготовлю фруктовый пирог

Составим формулу алгебры логики:

$$(A \vee B) \Rightarrow C.$$

Формализовали высказывание

УПРАЖНЕНИЯ:

Установите, какие из следующих предложений являются логическими высказываниями, а какие — нет (объясните почему) и установите истинность высказываний:

✓ Солнце есть спутник Земли; (1)

✓ $2+3>4$; (1)

• Сегодня отличная погода;

✓ Санкт-Петербург расположен на Неве; (1)

• Музыка Баха слишком сложна;

✓ Железо — металл; (1)

• $2+x=12$;

✓ Если сумма квадратов двух сторон (0)
треугольника равна квадрату третьей, то он
прямоугольный.

(1)

Сформулируйте отрицания следующих высказываний:

- Эльбрус — высочайшая горная вершина Европы;
- $2 \geq 5$;
- $10 < 7$;
- все натуральные числа целые;
- через любые три точки на плоскости можно провести окружность;
- теннисист Кафельников не проиграл финальную игру;
- число n делится на 2 или на 3;
- этот треугольник равнобедренный;
- на контрольной работе каждый ученик писал своей ручкой.

Определите, какие из высказываний в
следующих парах являются отрицаниями
друг друга:

✓ $10 > 9$ **и** $10 \leq 9$;

- $5 < 10$ **и** $5 > 10$;

✓ мишень поражена первым выстрелом **и** мишень поражена вторым выстрелом;

✓ машина останавливалась у каждого из двух светофоров **и** машина не останавливалась у каждого из двух светофоров,

- существуют белые слоны **и** все слоны серые;
- кит — млекопитающее **и** кит — рыба;
- неверно, что точка A не лежит на прямой a **и** точка A лежит на прямой a ;
- прямая a параллельна прямой b **и** прямая a перпендикулярна прямой b ;

Формализуйте высказывания:

- Если перекрутить яблоки и варить их на медленном огне 10 минут, то вы получите вкуснейшее повидло.

$$F=(a \wedge b) \rightarrow c$$

- Если перекрутить яблоки или груши и варить их на медленном огне 10 минут, то вы получите вкуснейшее повидло и сможете угостить им своих друзей

$$F=\left((a \vee d) \wedge b\right) \rightarrow c \wedge k$$

Формализуйте высказывания:

- Я не смогу сдать зачет и снова папа отругает меня и накажет

$$F = \bar{a} \wedge b \wedge c$$

- Треугольник может быть тупоугольным, остроугольным или прямоугольным, но равноугольным он быть не может

$$F = (X \vee Y \vee Z) \wedge \bar{K}$$

Определите истинность

высказываний:

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A ∧ B

Учащиеся работают
с доской

И отвечают на вопросы

||
1

∧

||
1

1



ПОСТРОЕНИЕ ТАБЛИЦ ИСТИННОСТИ





ТАБЛИЦА ИСТИННОСТИ -

таблица, которая выражает соответствие между всевозможными наборами значений переменных и значениями формулы.

Если в таблице истинности формула хотя бы один раз принимает значение 1, то она является выполнимой.



Алгоритм построения ТИ для логической формулы:

- 1) Определить количество строк и столбцов в ТИ
- 2) Заполняем заголовки таблицы (названия столбцов): сначала вписываем все простые высказывания, затем определяем порядок операций ($\bar{\quad}$, \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow) и вписываем соответственно составные высказывания
- 3) Заполняем первые столбцы ТИ всевозможными значениями для простых высказываний
- 4) Заполняем остальные столбцы, выполняя логические операции

Заголовок таблицы

Количество строк в таблице истинности формулы определяется по формуле $2^N + 1$, где N - количество простых высказываний в формуле

Например:

- 1) Для формулы $\overline{a} \rightarrow \overline{b} \wedge \overline{c}$ количество строк в ТИ будет равно $2^3 + 1 = 8 + 1 = 9$
- 2) Для формулы $\overline{(a \vee b)} \leftrightarrow (\overline{a} \vee \overline{b})$ количество строк в ТИ будет равно $2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

Количество столбцов в таблице истинности формулы определяется по формуле $N + оп$, где N - количество простых высказываний в формуле, $оп$ - количество логических операций в формуле

Например:

- 1) Для формулы $\overline{a \rightarrow b} \wedge \bar{c}$ количество столбцов в ТИ будет равно $3+4=7$
- 2) Для формулы $\overline{(a \vee b)} \leftrightarrow (\bar{a} \vee \bar{b} \rightarrow a)$ количество строк в ТИ будет равно $2+7=9$

Алгоритм построения ТИ для формулы

$$\overline{a \rightarrow b \wedge \overline{c}}$$

3)



a	b	c	\overline{c}	$a \rightarrow b$	$\overline{a \rightarrow b}$	$m \wedge n$
1	1	1				
1	1	0				
1	0	1				
1	0	0				
0	1	1				
0	1	0				
0	0	1				
0	0	0				

Алгоритм построения ТИ для формулы

$$\overline{a \rightarrow b \wedge \overline{c}}$$

3)



a	b	c	\overline{c}	$a \rightarrow b$	$\overline{a \rightarrow b}$	$m \wedge n$
1	1	1				
1	1	0				
1	0	1				
1	0	0				
0	1	1				
0	1	0				
0	0	1				
0	0	0				

a	\overline{a}
1	0
0	1

Алгоритм построения ТИ для формулы

$$\overline{a \rightarrow b \wedge \overline{c}}$$

4)



a	b	c	\overline{c}	$a \rightarrow b$	$\overline{a \rightarrow b}$	$m \wedge n$
1	1	1	0			
1	1	0	1			
1	0	1	0			
1	0	0	1			
0	1	1	0			
0	1	0	1			
0	0	1	0			
0	0	0	1			

a	b	$a \rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Алгоритм построения ТИ для формулы

$$\overline{a \rightarrow b \wedge \overline{c}}$$

4)



a	b	c	\overline{c}	$a \rightarrow b$	$\overline{a \rightarrow b}$	$m \wedge n$
1	1	1	0	1		
1	1	0	1	1		
1	0	1	0	0		
1	0	0	1	0		
0	1	1	0	1		
0	1	0	1	1		
0	0	1	0	1		
0	0	0	1	1		

Алгоритм построения ТИ для ф

$$\overline{a \rightarrow b} \wedge \overline{c}$$

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

4)



a	b	c	\overline{c}	$a \rightarrow b$	$\overline{a \rightarrow b}$	$m \wedge n$
1	1	1	0	1	0	
1	1	0	1	1	0	
1	0	1	0	0	1	
1	0	0	1	0	1	
0	1	1	0	1	0	
0	1	0	1	1	0	
0	0	1	0	1	0	
0	0	0	1	1	0	

Алгоритм построения ТИ для формулы

$$\overline{a \rightarrow b \wedge \overline{c}}$$

4)



a	b	c	\overline{c}	$a \rightarrow b$	$\overline{a \rightarrow b}$	$m \wedge n$
1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0

Упражнение:

Построить ТИ следующих формул

$$1) F = \overline{a} \rightarrow \overline{(b \vee c)}$$

$$2) F = \overline{a \vee \overline{b}} \wedge a \vee b$$

$$3) F = a \rightarrow b \wedge \overline{a}$$

$$4) F = \overline{(a \vee b)} \leftrightarrow (\overline{a} \vee \overline{b} \rightarrow a)$$

Формулы, принимающие значение “истина” (1) при любых значениях истинности входящих в них переменных называются тождественно истинными формулами или тавтологиями.

Формула тавтологией не является, если существует хотя бы один набор значений переменных, при которых формула принимает значение «ложь» (0).

**Установить, являются ли
логические выражения
тавтологиями.**

$$\text{а) } (A \Rightarrow B) \wedge \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$$

$$\text{б) } (\bar{A} \Rightarrow B) \wedge (\bar{A} \Rightarrow \bar{B}) \Rightarrow A$$

Формулы, принимающие значение
“ложь” (0) при любых значениях
истинности входящих в них переменных
называются тождественно ложными
формулами или противоречиями.

Формула противоречием не является,
если существует хотя бы один набор
значений переменных, при которых
формула принимает значение «истина»
(1).

**Установить, являются ли
логические выражения
противоречиями.**

а) $X \wedge (Y \wedge (\bar{X} \vee \bar{Y}))$

б) $\overline{X \rightarrow Y \wedge Z}$

Если две формулы при одинаковых наборах значений входящих в них переменных, принимают одинаковые значения, то они называются **равносильными**.

Эквиваленция равносильных формул является тавтологией.

**$F_1 \equiv F_2$ тогда и только тогда,
когда $F_1 \Leftrightarrow F_2$ – тавтология**

Равносильность формул можно установить двумя способами:

1 способ:

- а) построить ТИ данных формул**
- б) сравнить значения формул: если при одинаковом наборе значений переменных значения истинности формул совпадают, то эти формулы равносильны.**

2 способ:

- а) построить ТИ обеих формул,**
- б) построить эквиваленцию этих формул и если она является тавтологией, то формулы равносильны.**

**Установить, верна ли
равносильность формул
(Выполните задание двумя
способами, сравните
результаты).**

а) $\overline{A} \equiv A \wedge A$

б) $X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

Какие из следующих формул
равносильны:

а) $\overline{X \wedge Y}$ г) $\overline{X \vee Y}$

б) $\overline{X} \vee \overline{Y}$ д) $Y \Rightarrow X$

в) $\overline{X} \Rightarrow \overline{Y}$ е) $X \wedge \overline{Y}$

ПОВТОРЕНИЕ

- 1) Что такое логика, алгебра логики?
 - 2) Какие логические операции вы знаете?
 - 3) Что такое таблица истинности?
 - 4) Какая формула называется
 - а) выполнимой
 - б) тавтологией
 - в) противоречием?
 - 5) Какие формулы называются равносильными?
- Как определить?

ЗАКОНЫ ЛОГИКИ



Равносильные преобразования логических формул имеют то же назначение, что и преобразования формул в обычной алгебре. Они служат для упрощения формул или приведения их к определённом виду путем использования основных законов алгебры логики.

Под упрощением формулы понимают равносильное преобразование, приводящее к формуле, которая:

- 1) не содержит операций импликации и эквиваленции;**
- 2) содержит по сравнению с исходной меньшее число операций конъюнкции и дизъюнкции;**
- 3) не содержит отрицаний неэлементарных формул.**



1. Закон двойного отрицания $\overline{\overline{x}} \equiv x$
2. Законы идемпотентности: $x \wedge x \equiv x$; $x \vee x \equiv x$
3. Законы коммутативности: $x \wedge y \equiv y \wedge x$; $x \vee y \equiv y \vee x$
4. Законы дистрибутивности

{	а) $(x \wedge y) \vee z \equiv (x \vee z) \wedge (y \vee z)$; б) $(x \vee y) \wedge z \equiv (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
---	--
5. Законы де Моргана:

{	а) $\overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$; $\overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y}$ б) $x \rightarrow y \equiv \overline{x} \vee y$; $\overline{x \rightarrow y} \equiv x \wedge \overline{y}$ в) $x \leftrightarrow y \equiv (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) \equiv (\overline{x} \vee y) \wedge (x \vee \overline{y})$
---	---
6. Свойства констант:

{	$x \wedge 1 \equiv x$; $x \wedge 0 \equiv 0$; $x \wedge \overline{x} \equiv 0$ $x \vee 1 \equiv 1$; $x \vee 0 \equiv x$; $x \vee \overline{x} \equiv 1$
---	--



Пример упрощения логической формулы:

$$F = \overline{a} \wedge \overline{a} \vee \overline{a} \vee \overline{b} \equiv$$

$$\stackrel{5a}{\equiv} \overline{a} \wedge \overline{a} \vee \overline{a} \wedge \overline{b} \equiv$$

$$\stackrel{1}{\equiv} \overline{a} \wedge \overline{a} \vee \overline{a} \wedge \overline{b} \equiv$$

$$\stackrel{6}{\equiv} \underbrace{0 \vee \overline{a} \wedge \overline{b}}_{\overline{a}} \stackrel{6}{\equiv} \overline{a} \wedge \overline{b}$$

Упростите логические формулы:

$$1. F = \bar{a} \wedge \bar{a} \vee a \vee \bar{b}$$

$$2. F = \overline{(a \rightarrow b) \wedge \bar{b}} \quad \text{законы: (5б, 4б, 6, 5а, 1)}$$

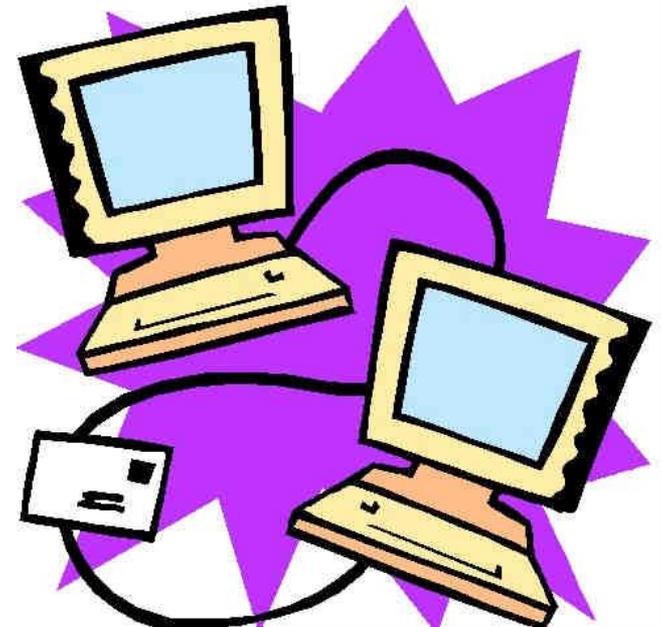
$$3. F = \overline{\bar{a} \wedge (a \vee b) \vee b}$$

$$4. F = (a \rightarrow \bar{b}) \wedge (b \rightarrow a \vee \bar{b})$$

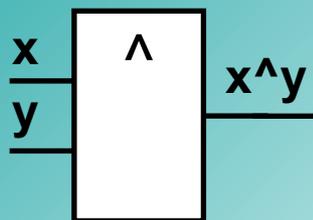
$$5. F = (\bar{a} \rightarrow b) \rightarrow \overline{(b \rightarrow a)}$$

$$6. F = a \rightarrow \overline{(b \rightarrow \bar{a})}$$

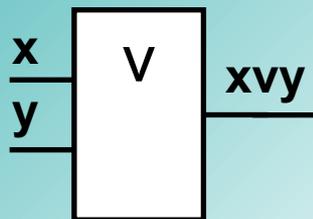
$$7. F = \overline{(a \rightarrow c)} \rightarrow (\bar{a} \wedge b)$$



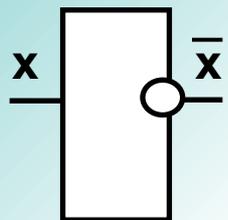
Базовые логические элементы компьютера



конъюнктор

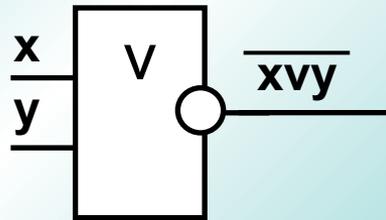
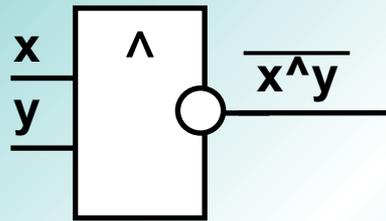


дизъюнктор



инвертор

Базовые логические элементы компьютера (частные случаи)



Пример построения схемы логической формулы:

$$\overline{a \rightarrow b} \wedge \bar{c} \equiv (\bar{a} \vee b) \wedge \bar{c}$$

