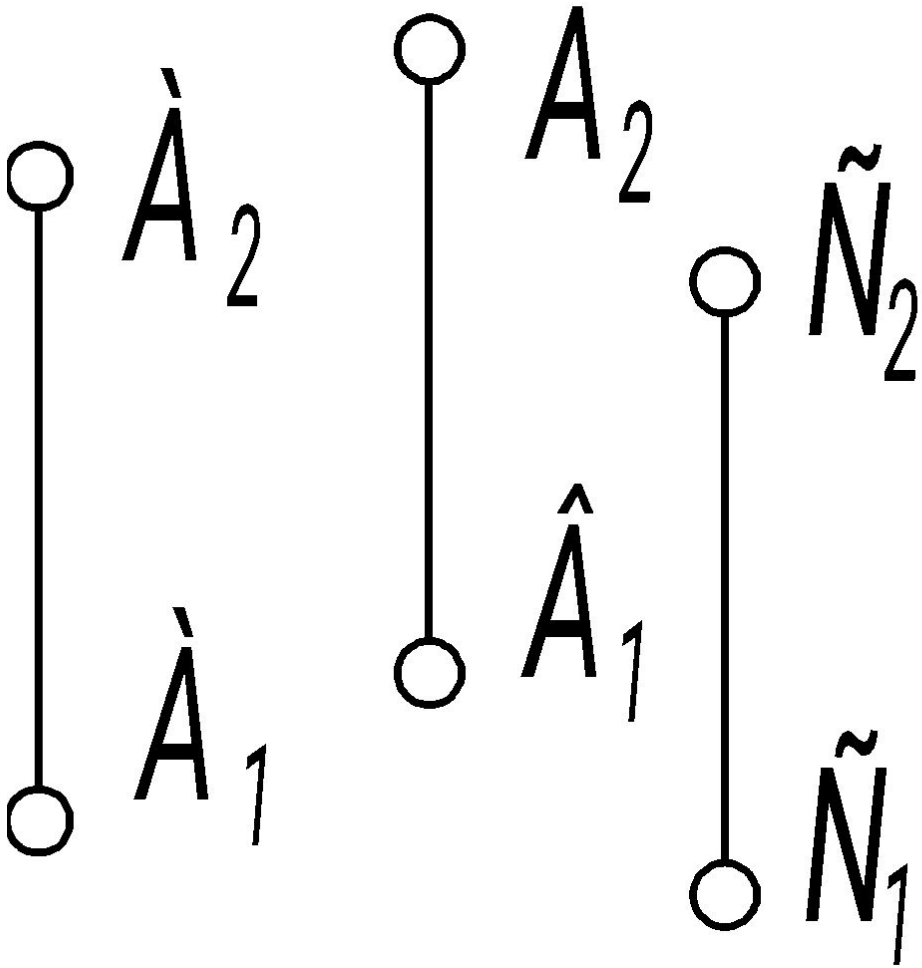
Лекция 3

Комплексный чертёж плоскости и поверхности

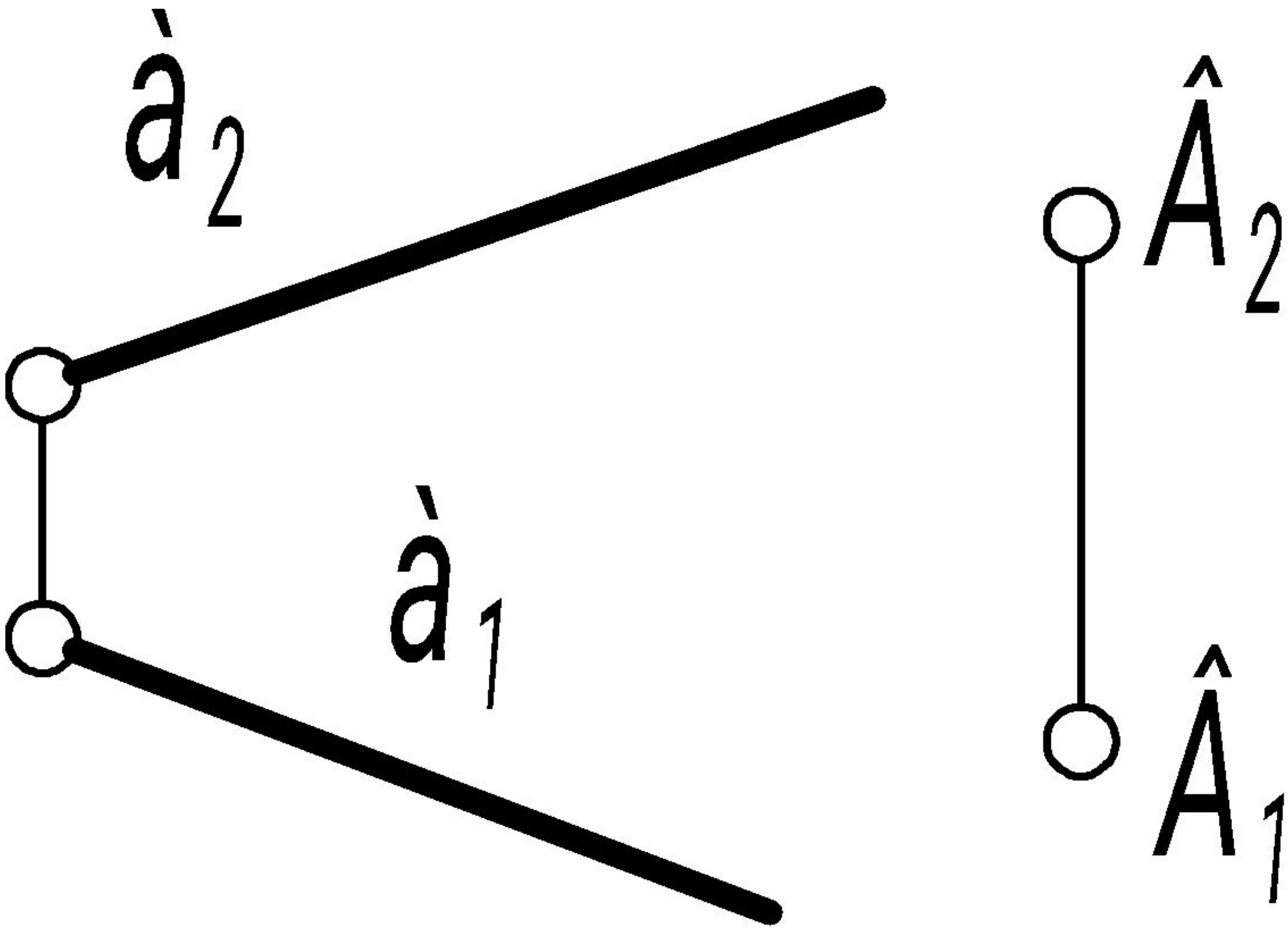
Задание плоскости на комплексном чертеже

- Плоскость является частным случаем поверхности - это двумерная геометрическая фигура, она имеет только длину и ширину, и не имеет толщины. Обозначается прописными буквами греческого алфавита. Плоскость - это множество точек, но определяется она тремя точками (напомним, что прямую линию определяют две точки).

Плоскость можно задать на чертеже:
Тремя точками: *Σ(A, B, C);*

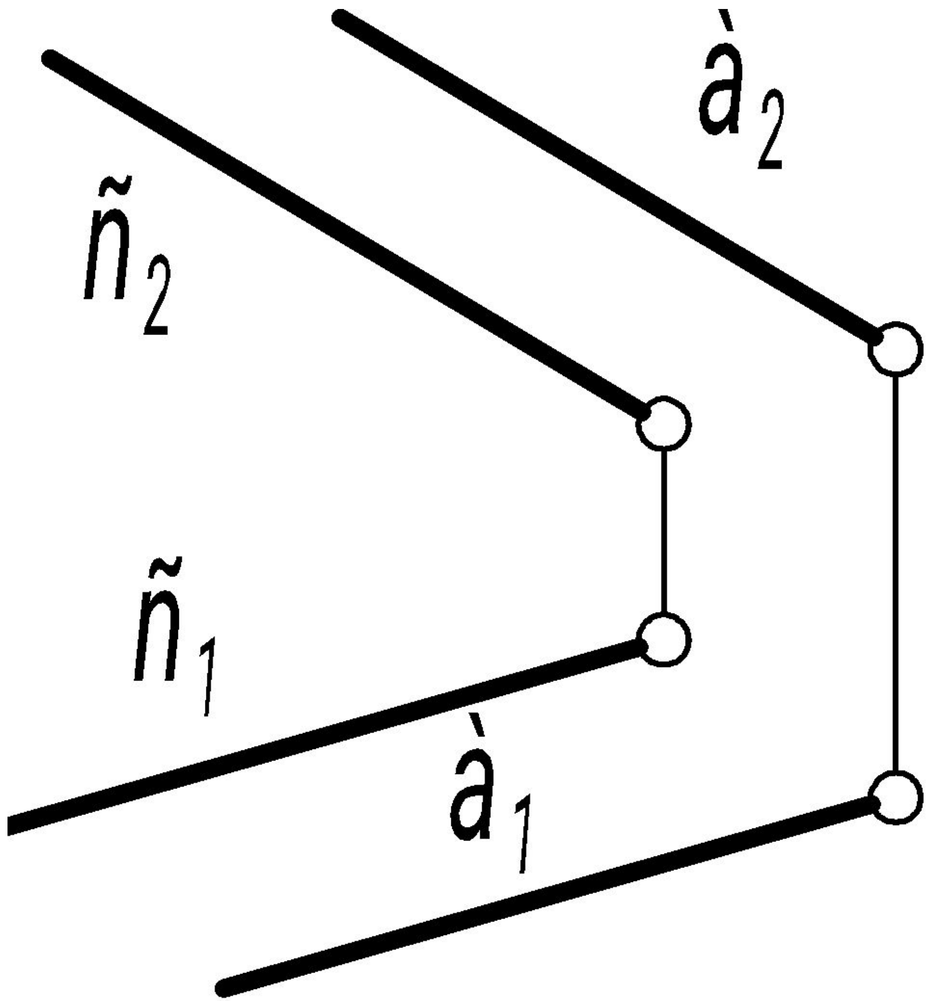


Прямой и точкой, не лежащей на данной прямой*: Г(а, В);*

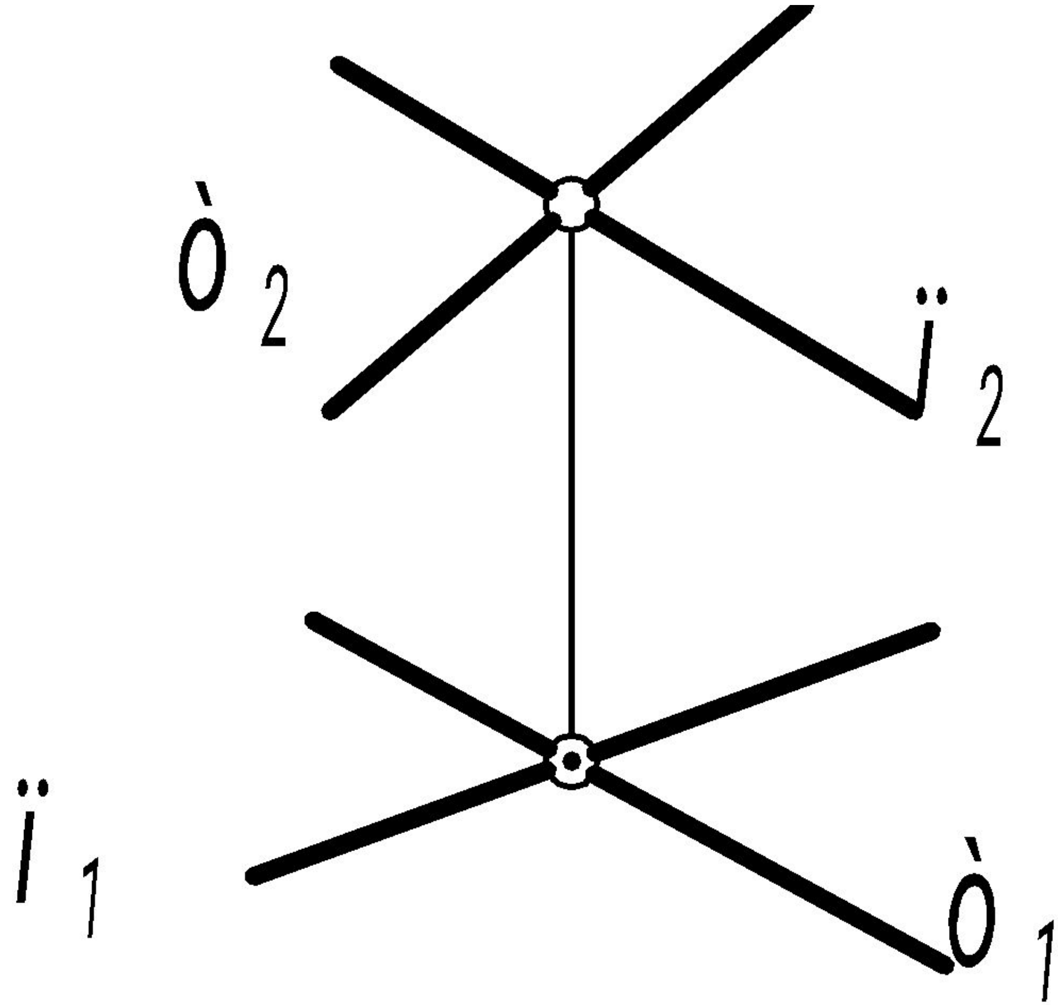


Двумя параллельными прямыми:

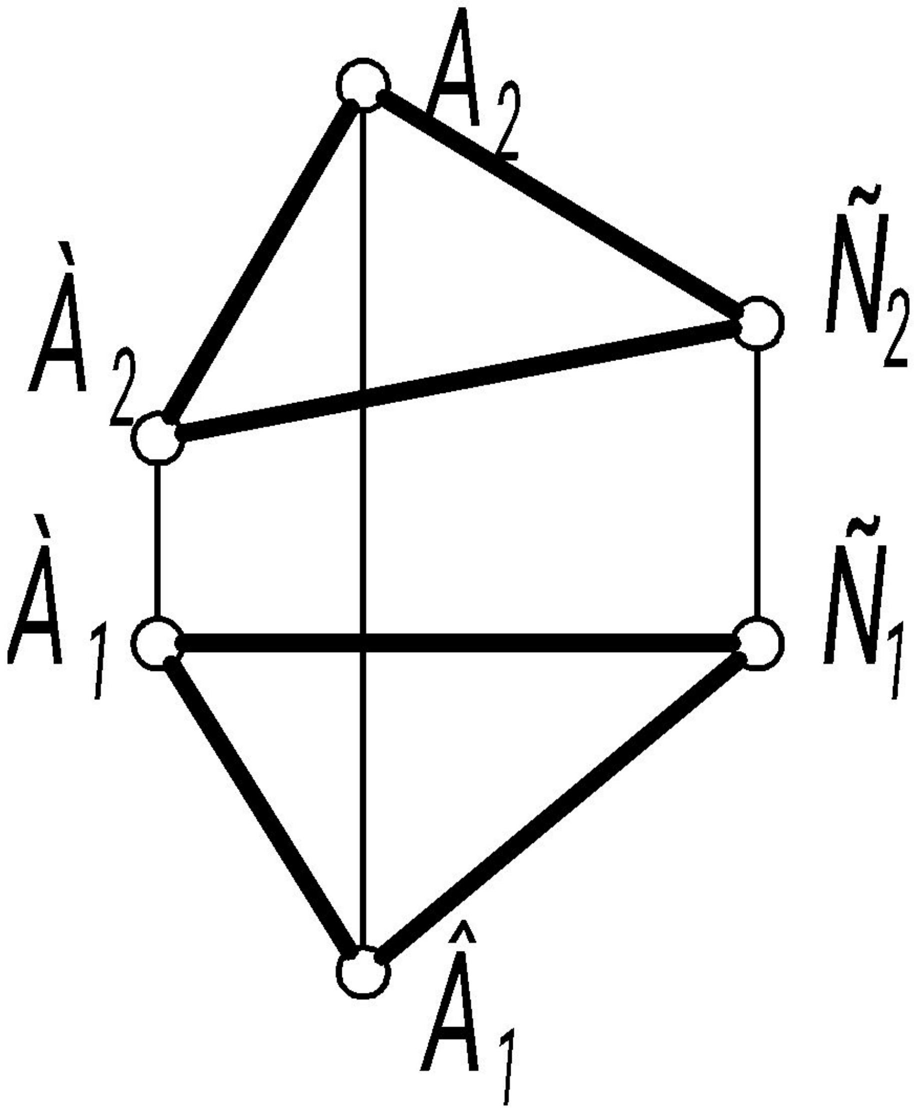
Δ(c|| a);



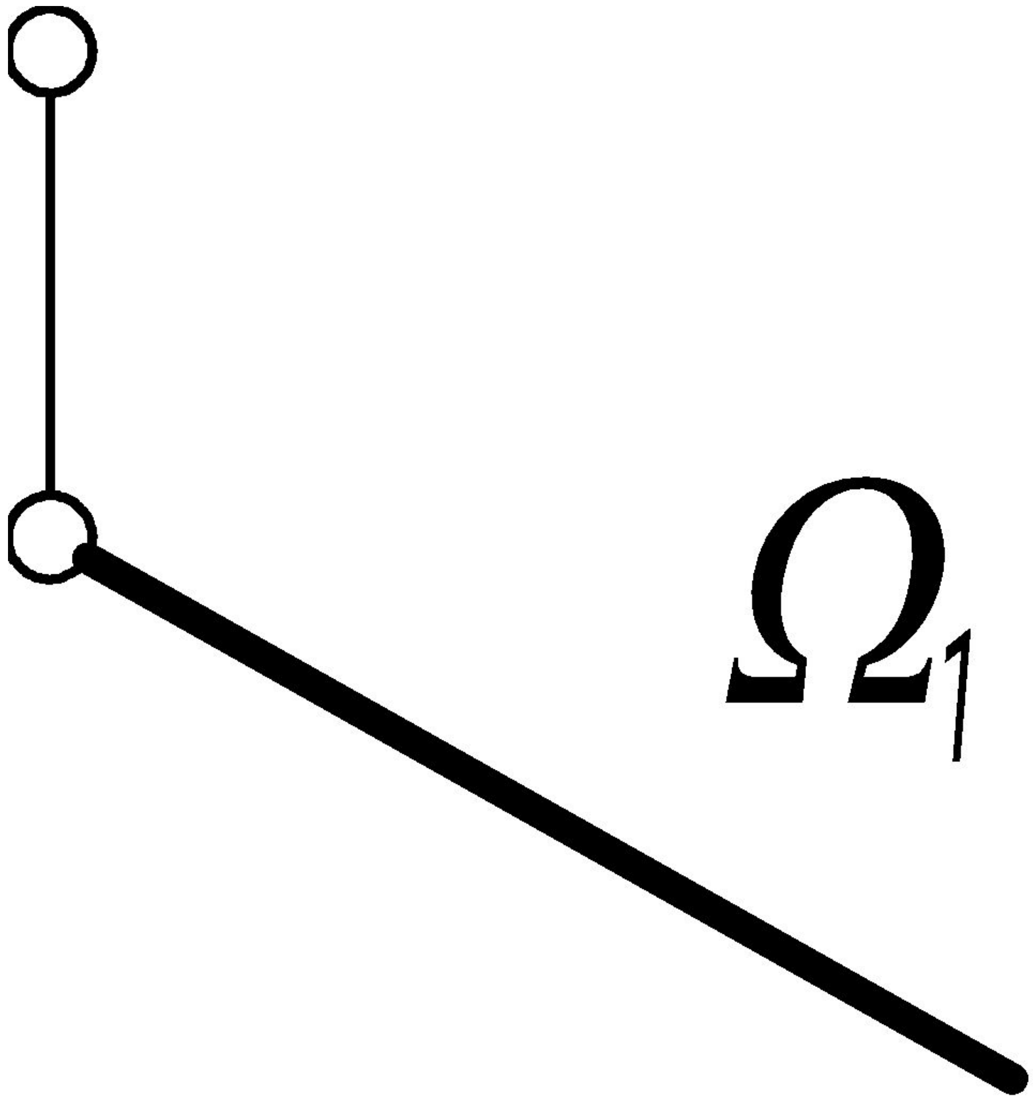
Двумя пересекающимися прямыми: *Φ(m ∩ n);*



Любой плоской фигурой: *Λ(ABC);*

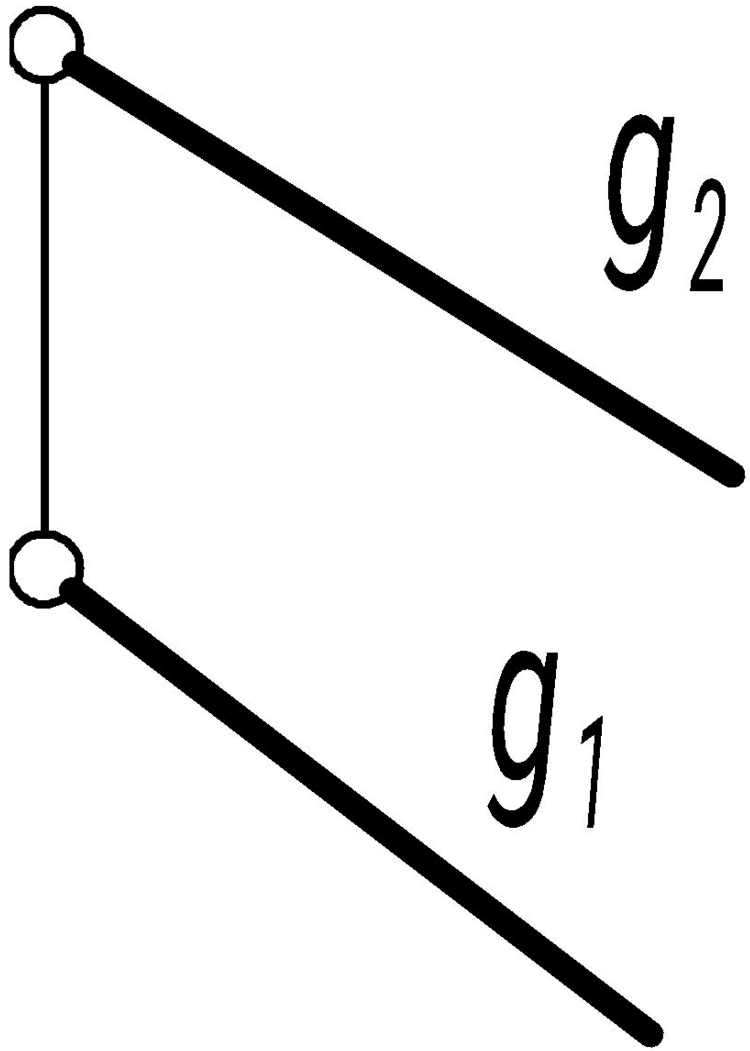


Своей главной проекцией: *Ω(Ω1);*

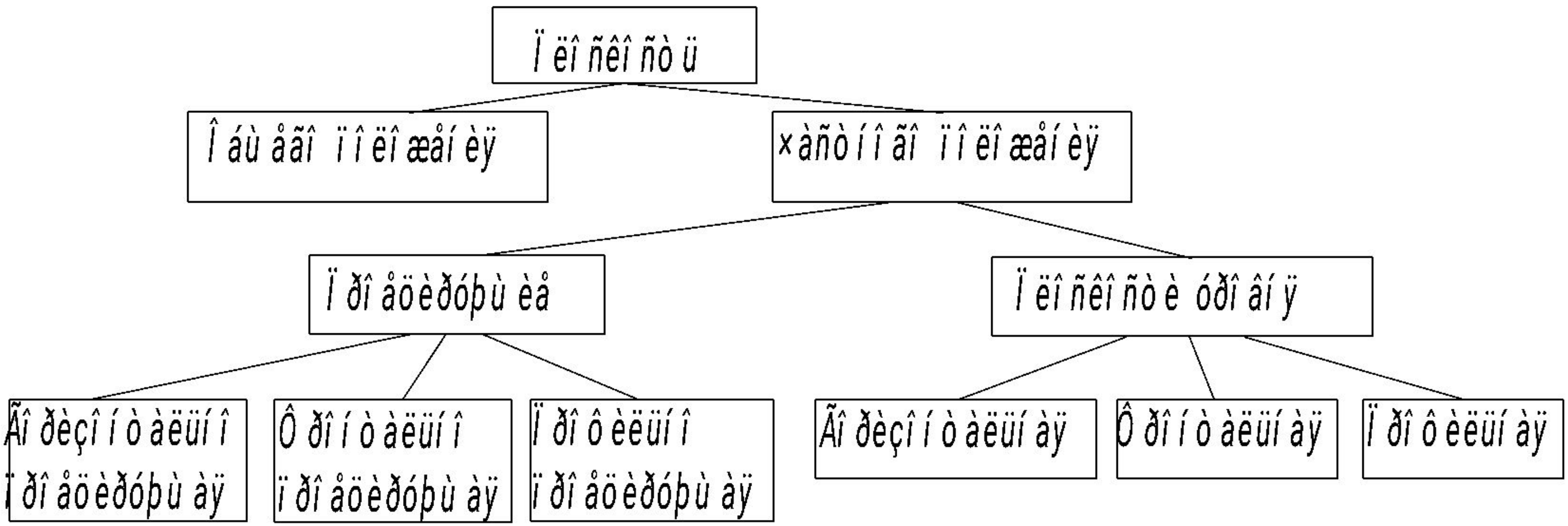


Линией наибольшего наклона плоскости

$\Theta\ (g_1, g_2)$;



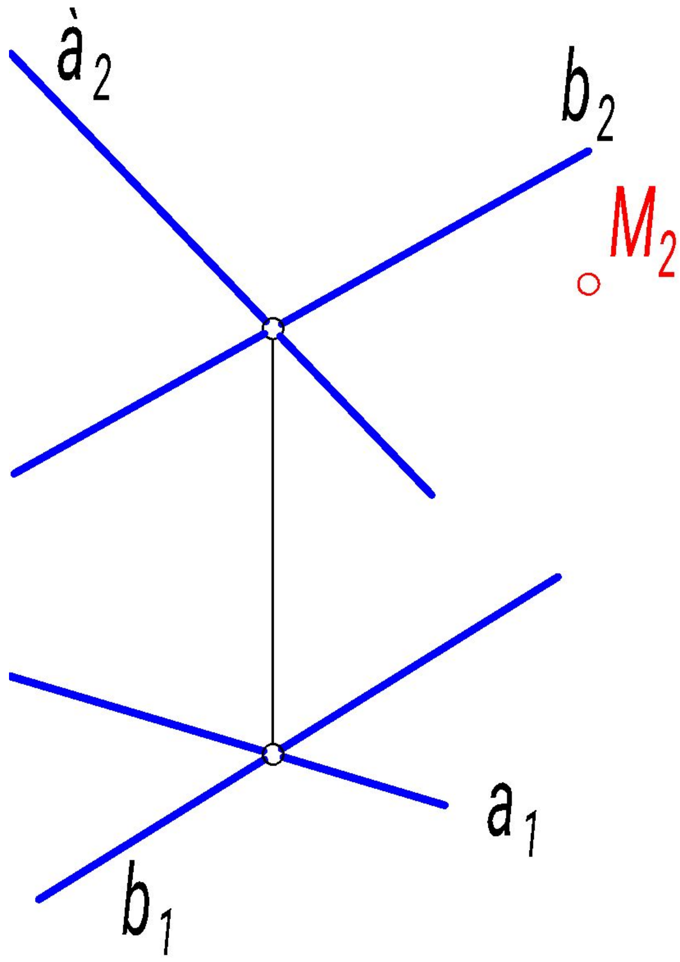
Плоскости бывают **общего** и **частного** положения



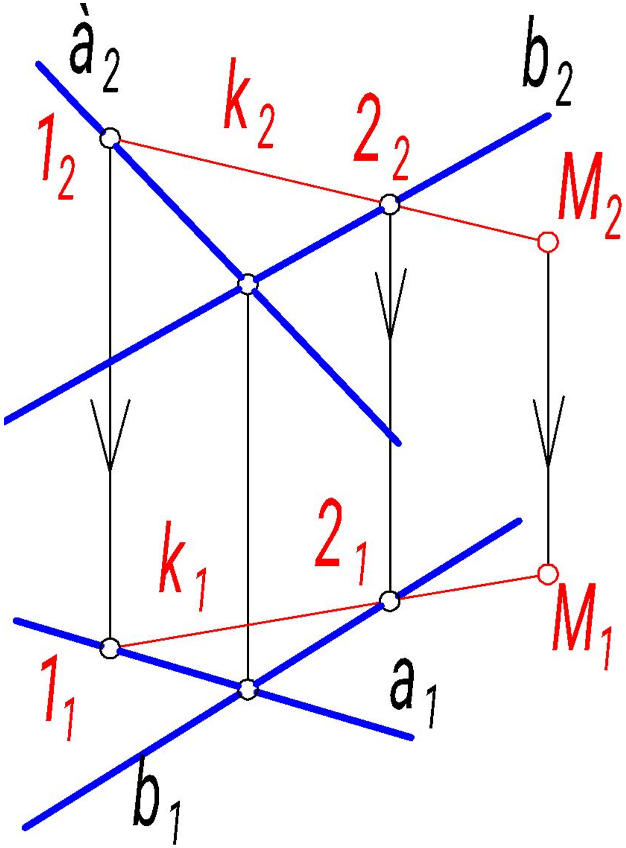
Взаимная принадлежность точки, прямой и плоскости

- **Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.**
- Построение точки в плоскости сводится к двум операциям: построению в плоскости вспомогательной прямой и построению точки на этой прямой.

Задача: Плоскость *Σ* задана пересекающимися прямыми *a* и *b* .
Точка $M(M_2)$ принадлежит плоскости.
Найти $\boldsymbol{M_1}$.
Краткая запись условия задачи: $\Sigma(a \cap b)$, $M(M_2) \in \Sigma$; $M_1 = ?$



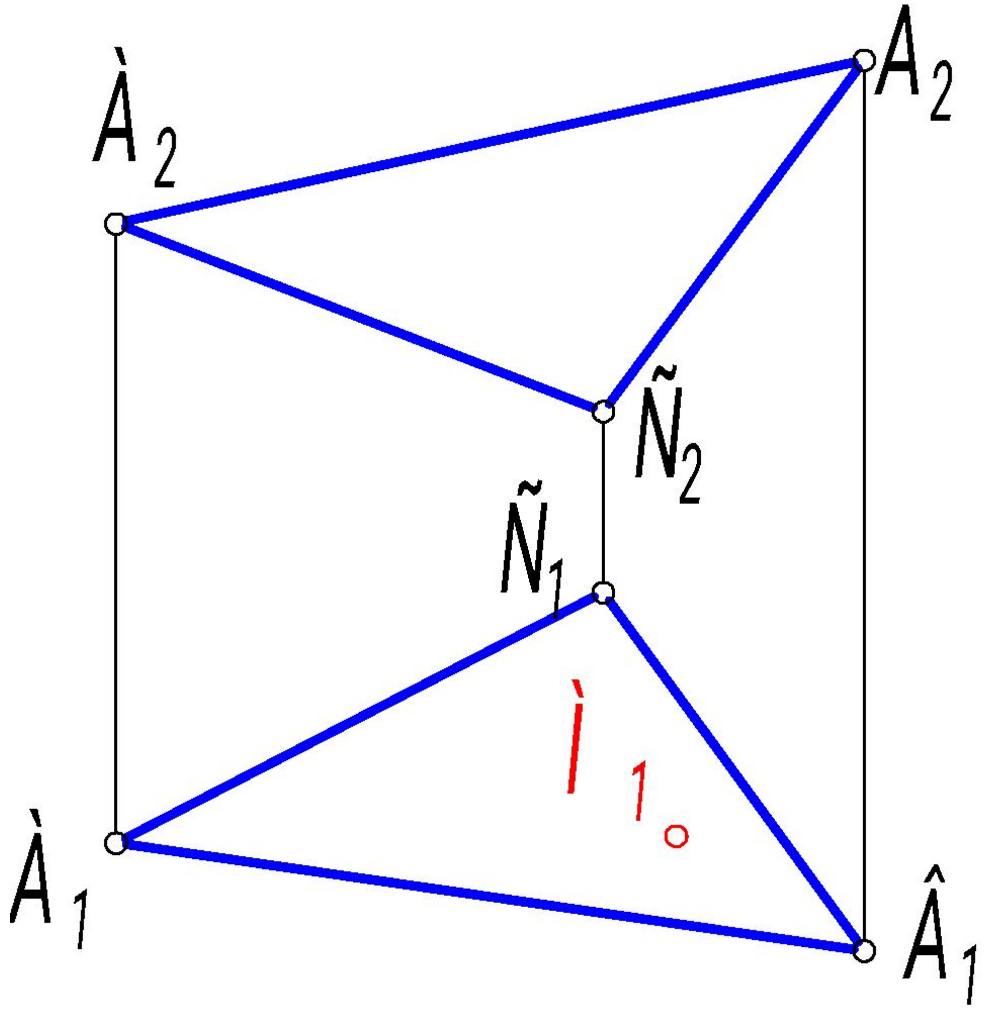
Решение: Через точку M_2 проводим вспомогательную прямую $k \subset \Sigma$: $k_2 \cap a_2 = 1_2$; $k_2 \cap b_2 = 2_2$; затем находим горизонтальные проекции точек *1* и *2* по условию принадлежности прямым *a* и *b* соответственно; через две точки 1_1 и 2_1 проводим прямую k_1 и на ней, с помощью линии связи, находим точку M_1. И таких прямых можно провести сколько угодно, то есть, вариантов решения бесчисленное множество.



Прямая принадлежит плоскости, если она:

1. Проходит через две точки плоскости;
2. Проходит через одну точку плоскости и параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.

Задача: Плоскость *Г* задана *ΔABC*.
Точка $M(M_1)$ принадлежит *Г*. Найти M_2.
$M(M_1) \in Г(ABC)$. $M_2 = ?$

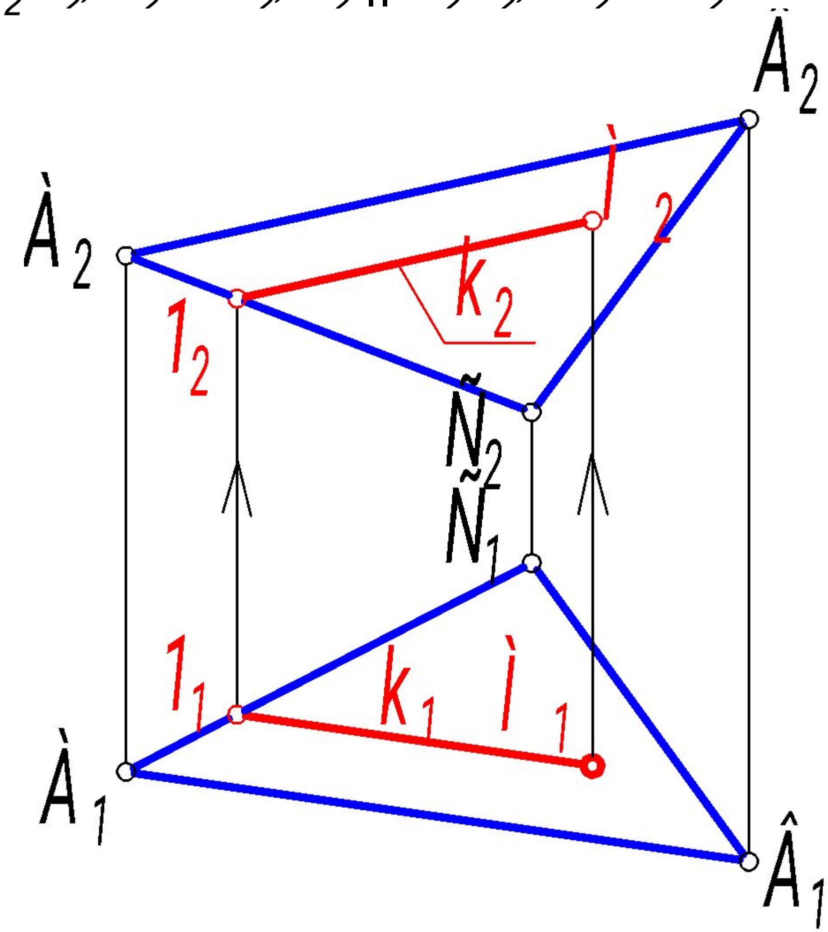


Решение:

Через точку M_1 проведём прямую k, параллельную стороне треугольника AB. Она пересечёт сторону AC в точке 1: $k_1 \parallel A_1B_1$; $k_1\ A_1 \cap C_1 = 1_1$; с помощью линии связи найдём 1_2, проведём k_2 параллельно A_2B_2 ней найдём точку M_2:

Алгоритмическая запись решения:

$1_1 \in A_1C_1 \Rightarrow 1_2 \in A_2C_2;\ 1_2 \in k_2,\ k_2 \parallel A_2B_2;\ M_2 \in k_2.$



Плоскости частного положения

Плоскости, параллельные или перпендикулярные одной из плоскостей проекций, называются **плоскостями частного положения.**

Имеется две группы таких плоскостей:

- Проецирующие плоскости
- Плоскости уровня

Проецирующие плоскости

- *Если плоскость перпендикулярна только одной плоскости проекций, то она называется* ***проецирующей.***
- Одна из её проекций вырождается в прямую линию, называемую **главной проекцией** и обладающую **собирательными** свойствами.

Горизонтально проецирующая плоскость

Это плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций: $Г \perp\perp П_1$.

Графический признак:

Горизонтальная проекция $Г_1$ горизонтально проецирующей плоскости прямая линия, не параллельная и не перпендикулярная линиям связи. Это **главная** проекция.

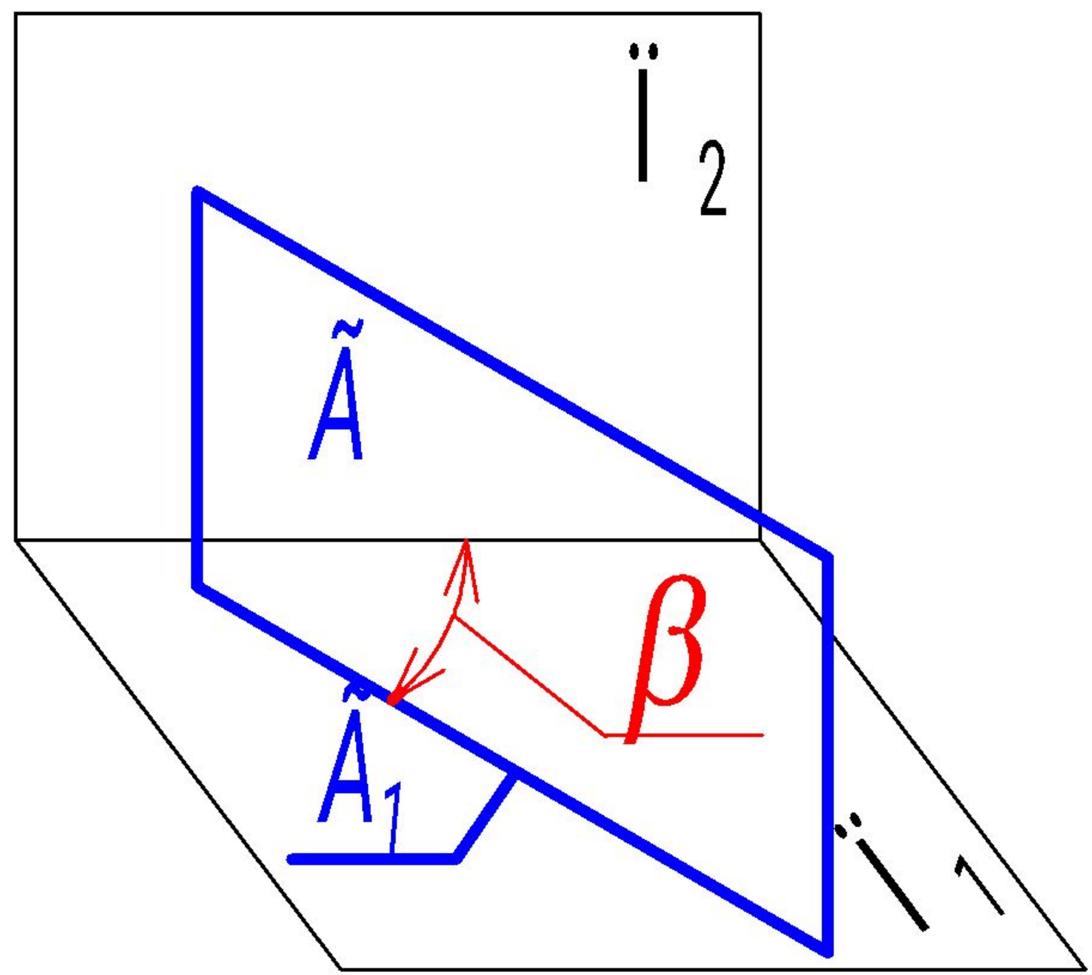
Например:

$Г \perp\perp П_1$ - горизонтально проецирующая плоскость.

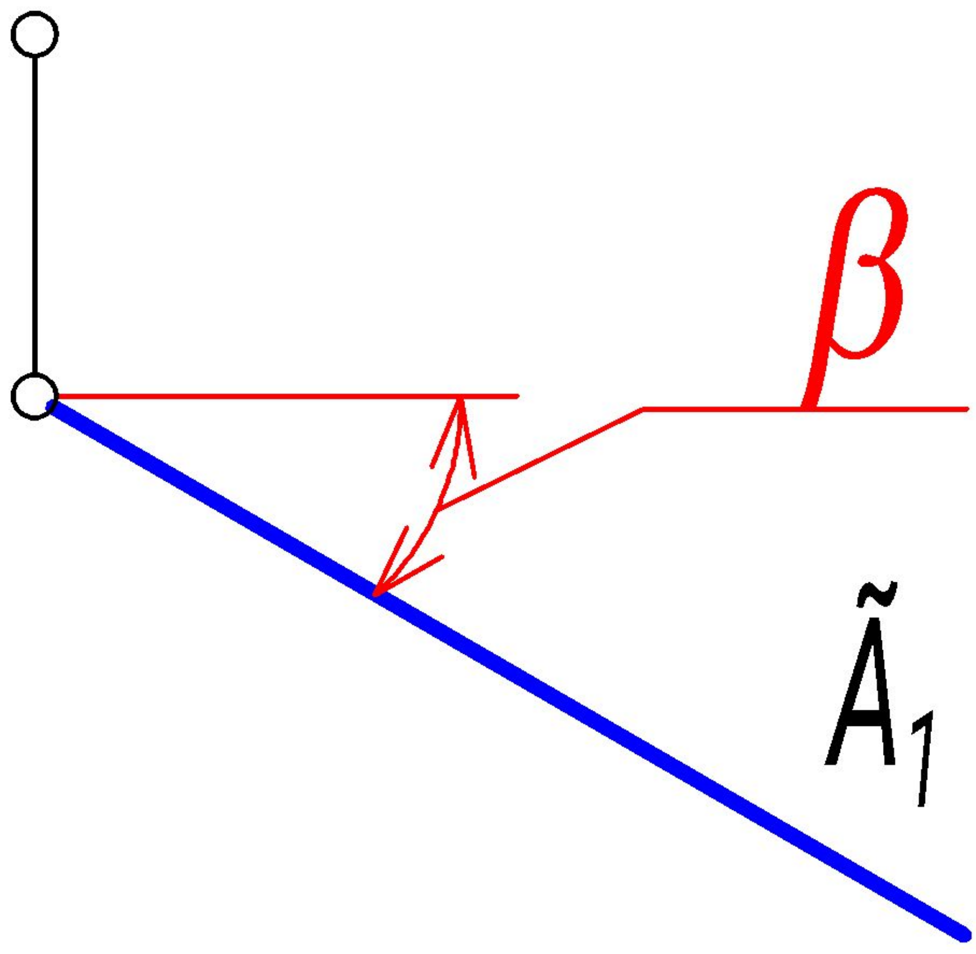
$Г \perp П_1 \Rightarrow Г_1$ - прямая линия, главная проекция.

- $\angle\beta$ - угол наклона плоскости $Г$ к $П_2$.

Пространственный чертеж



Плоский чертеж



Фронтально проецирующая плоскость

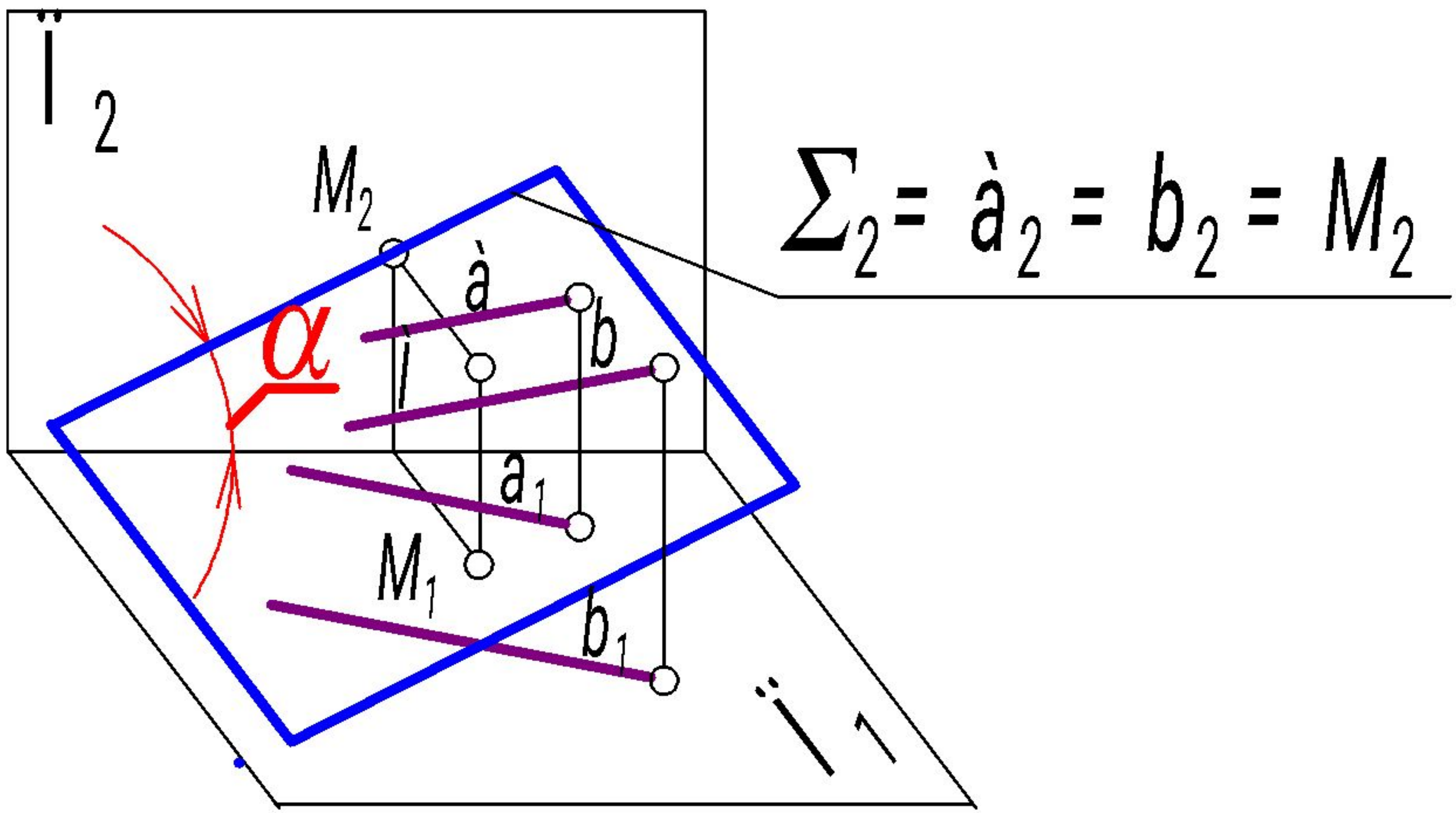
Это плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций:

$\Sigma \perp \perp \Pi_2$

Графический признак:

Фронтальная проекция Σ_2 фронтально проецирующей плоскости - прямая линия, не параллельная и не перпендикулярная линиям связи. Это **главная** проекция.

Пространственный чертеж



Плоский чертеж

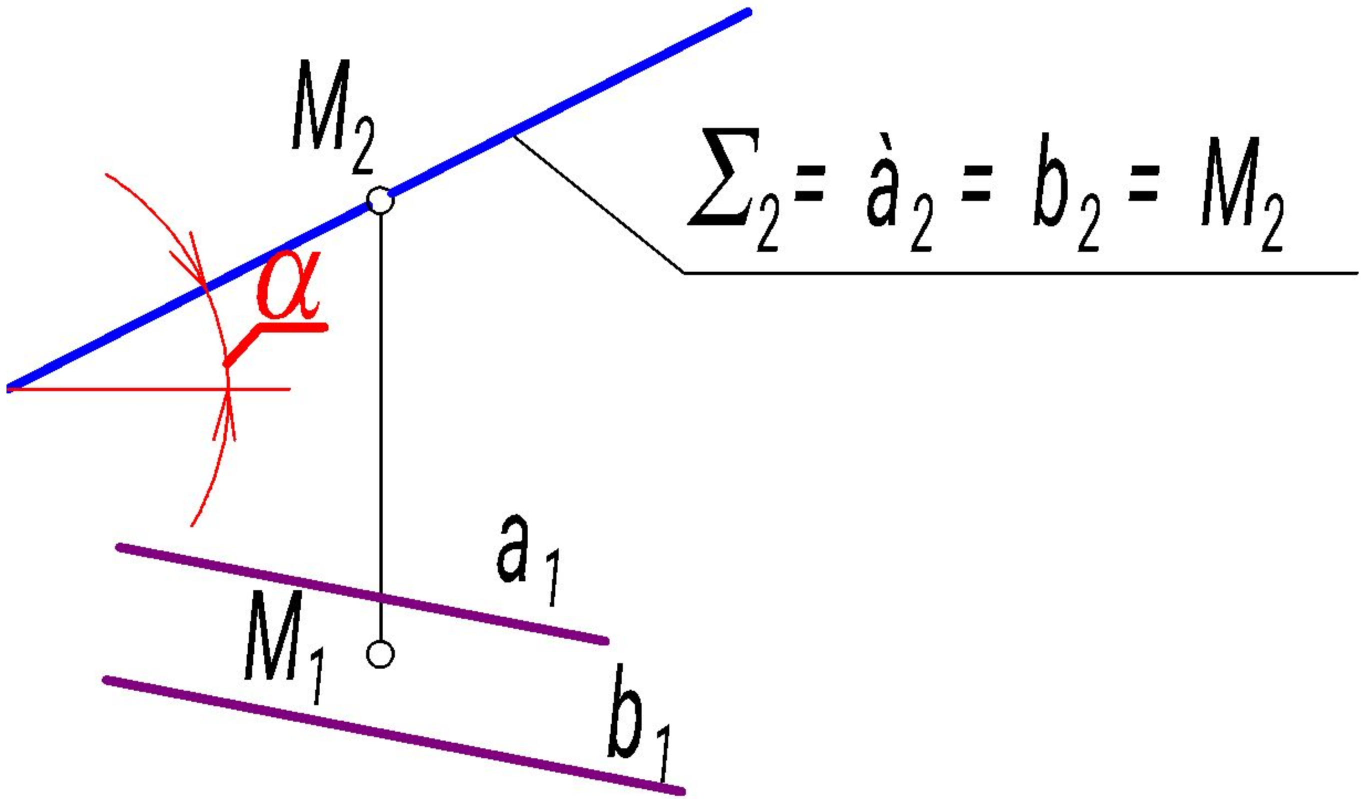
$\Sigma(a \parallel b) \perp\perp \Pi_2$ - фронтально проецирующая плоскость.

$\Sigma \perp \Pi_2 \Rightarrow \Sigma_2$ - главная проекция.

$\angle\alpha$ - угол наклона плоскости Σ к Π_1.

Прямые a и $b \subset \Sigma \Rightarrow a_2, b_2 = \Sigma_2$

Точка $M \in \Sigma \Rightarrow M_2 = \Sigma_2$



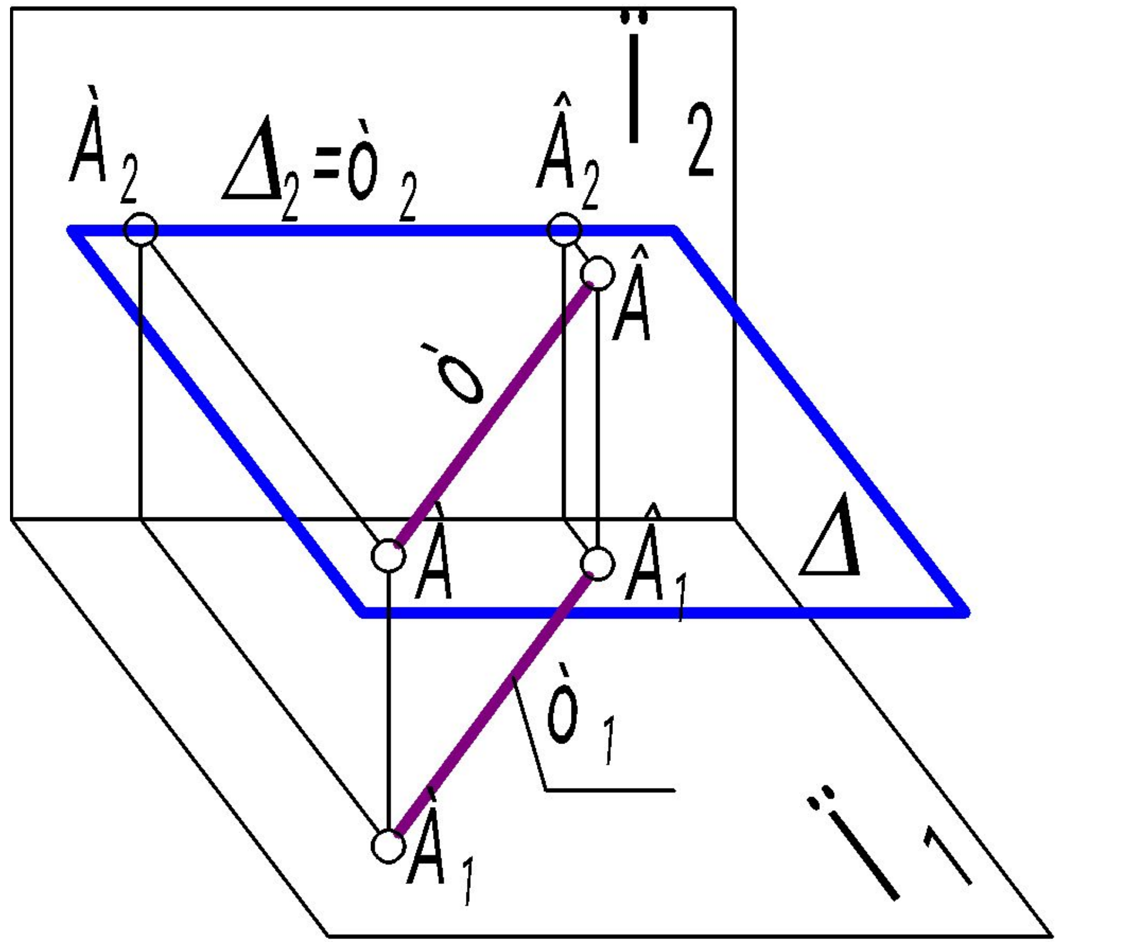
Плоскости уровня
(дважды проецирующие)

- Если плоскость перпендикулярна одновременно двум плоскостям проекций, а, следовательно, параллельна третьей, то она называется **плоскостью уровня**.

Горизонтальная плоскость уровня

Это плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций:

$\Delta \parallel \Pi_1$.



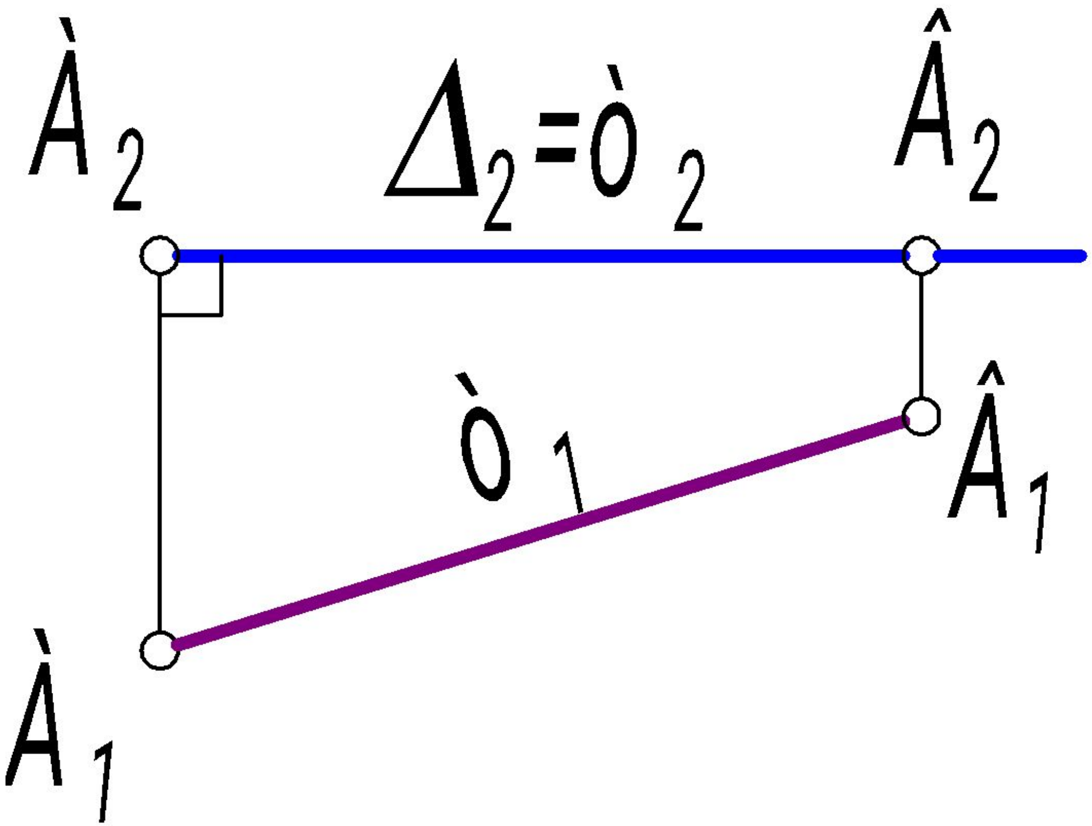
Пространственный чертеж

Плоский чертеж

$\left.\begin{array}{l}\Delta \perp \Pi_2 \\ \Delta \perp \Pi_3\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta \parallel \Pi_1$ – горизонтальная плоскость уровня.

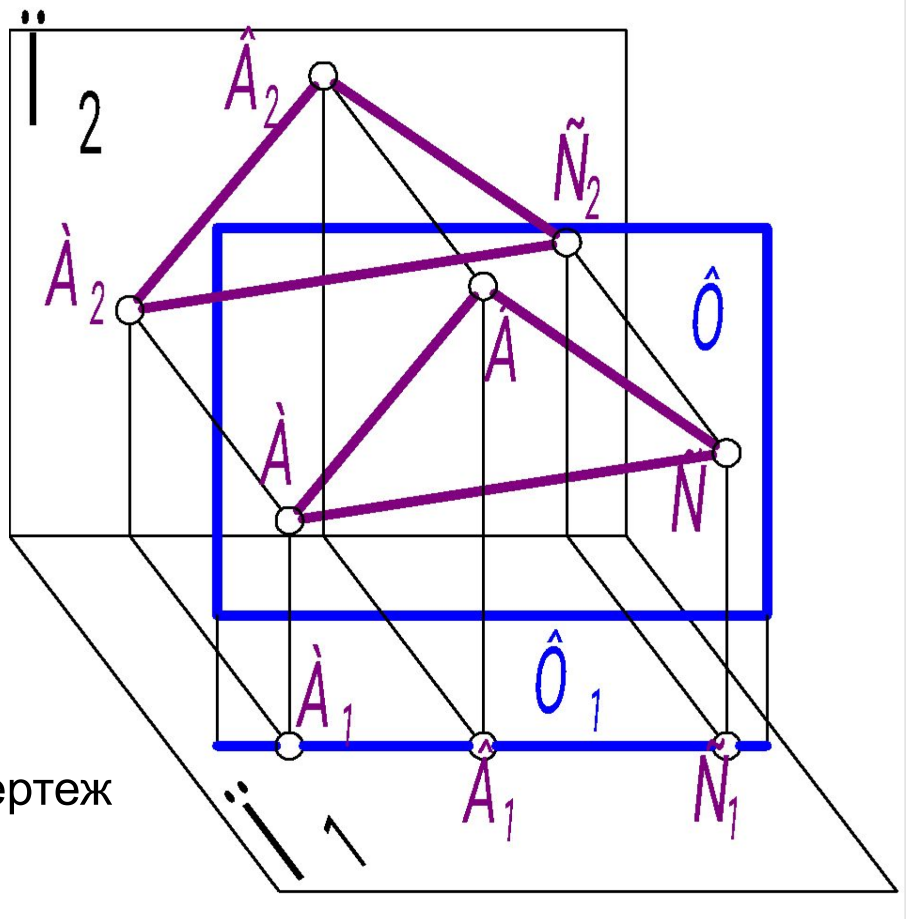
Δ_2 – главная проекция. $\Delta_2 \perp A_2A_1$. $m \subset \Delta \Rightarrow m_2 = \Delta_2$;

$\Delta \parallel \Pi_1 \Rightarrow |m_1|$ - натуральная величина m



Фронтальная плоскость уровня

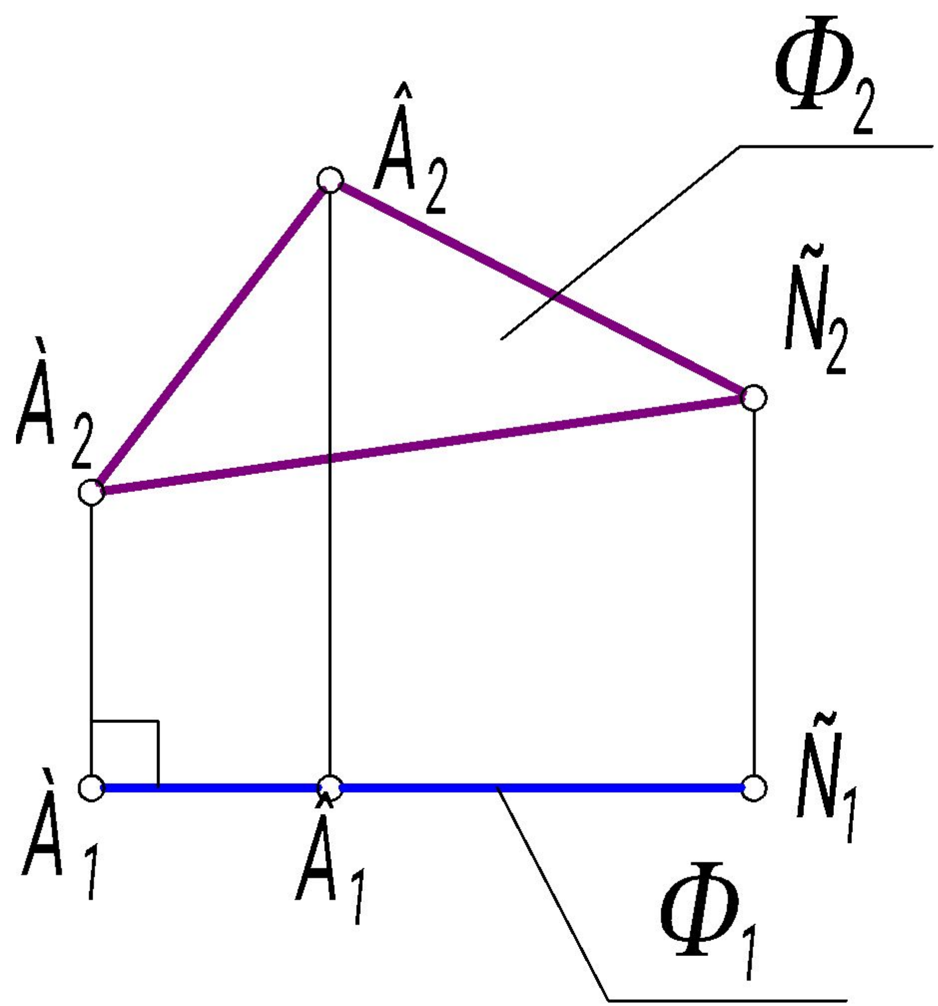
Это плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций: $Ф \parallel П_2$. Горизонтальная проекция $Ф_1$ фронтальной плоскости уровня - прямая линия, перпендикулярная линиям связи в системе $П_1 – П_2$. Это - **главная** проекция.



Пространственный чертеж

Плоскость *Ф* задана *ΔABC*, *Ф* - фронтальная плоскость уровня.

$\Rightarrow \Phi \parallel \Pi_2$; $\Phi_1 \perp A_2A_1$; $\Delta ABC \subset \Phi \Rightarrow A_1B_1C_1 = \Phi_1$; $| A_2B_2C_2 |$ - натуральная величина ΔABC



Плоский четеж

Особые линии плоскости

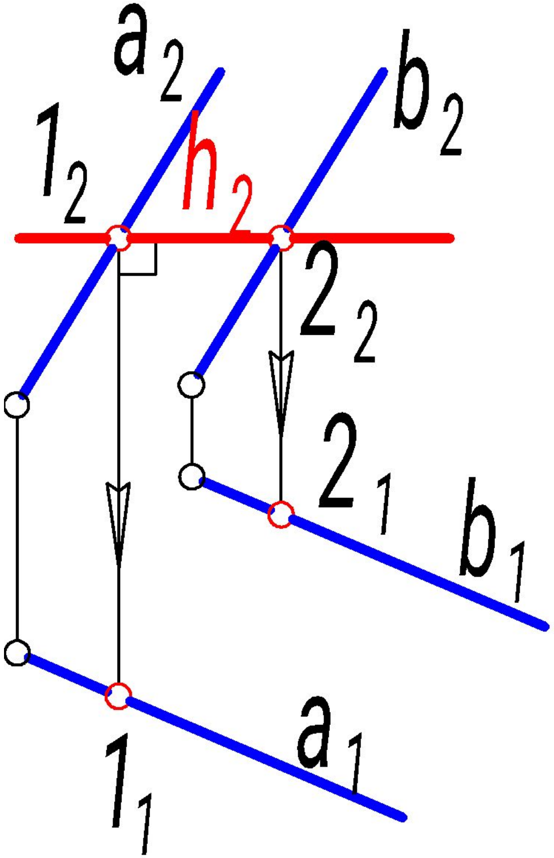
- Если прямая принадлежит плоскости и занимает в ней какое-то особое положение, то она называется **особой линией плоскости**. К ним относятся линии уровня плоскости: горизонталь, фронталь и профильная прямая, а также линии наибольшего наклона плоскости.

Горизонталь плоскости

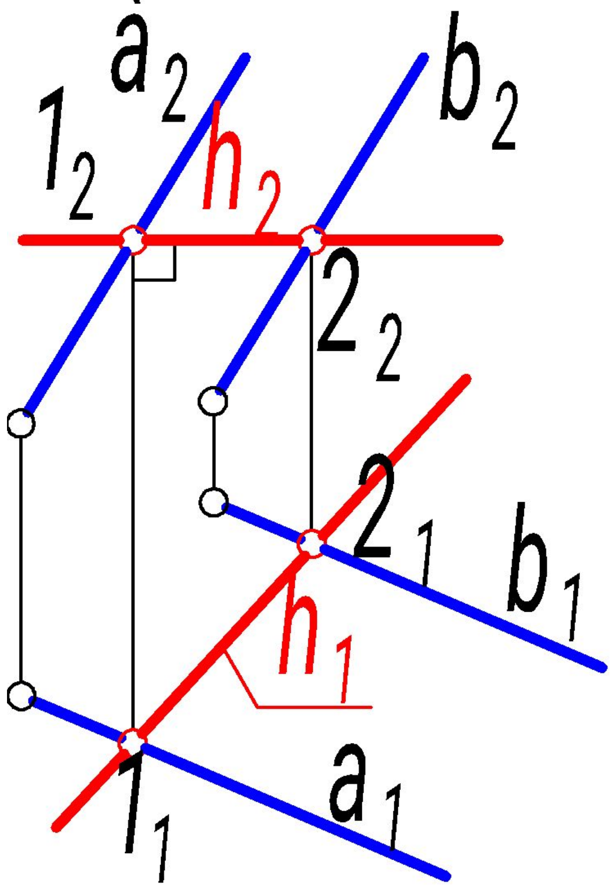
Это прямая, принадлежащая плоскости, и параллельная горизонтальной плоскости проекций

$Г\ (a \parallel b)$ Построить: $h \subset Г;\ h \parallel П_1$

1. Проводим h_2 перпендикулярно линиям связи.



2. Так как *h* принадлежит плоскости, то h_1 находим по двум точкам в плоскости ($1 \in a$, $2 \in b$). h_1 - натуральная величина *h.*



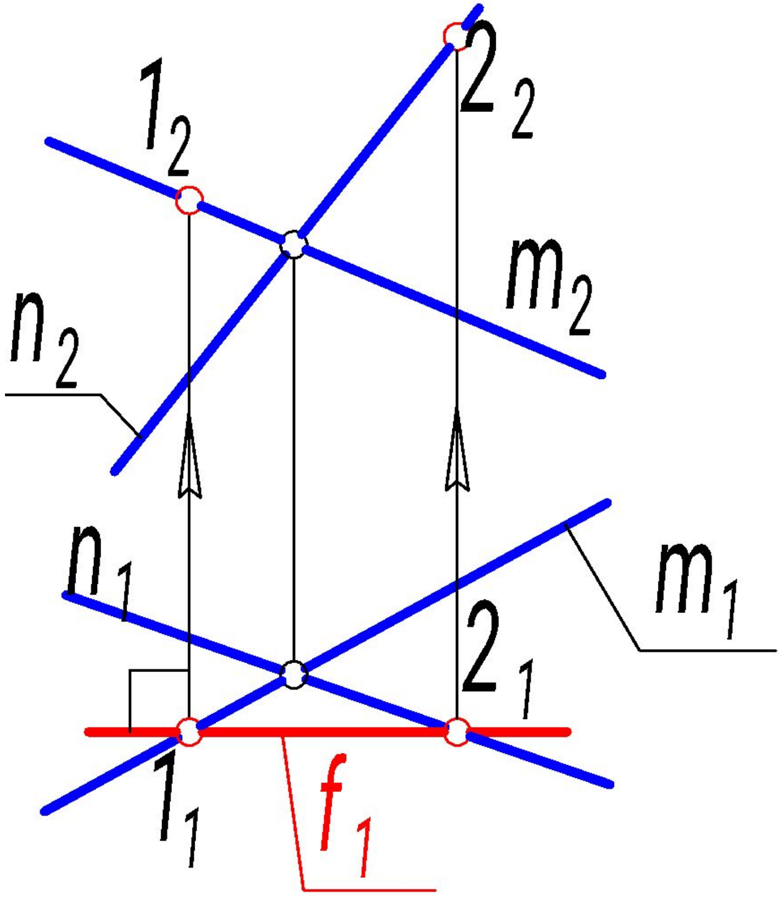
- Построение **горизонтали** в плоскости начинают с фронтальной проекции h_2: она всегда перпендикулярна линиям связи в системе $П_2 – П_1$. h_1 находят по принадлежности плоскости и она является натуральной длиной горизонтали.

Фронталь плоскости

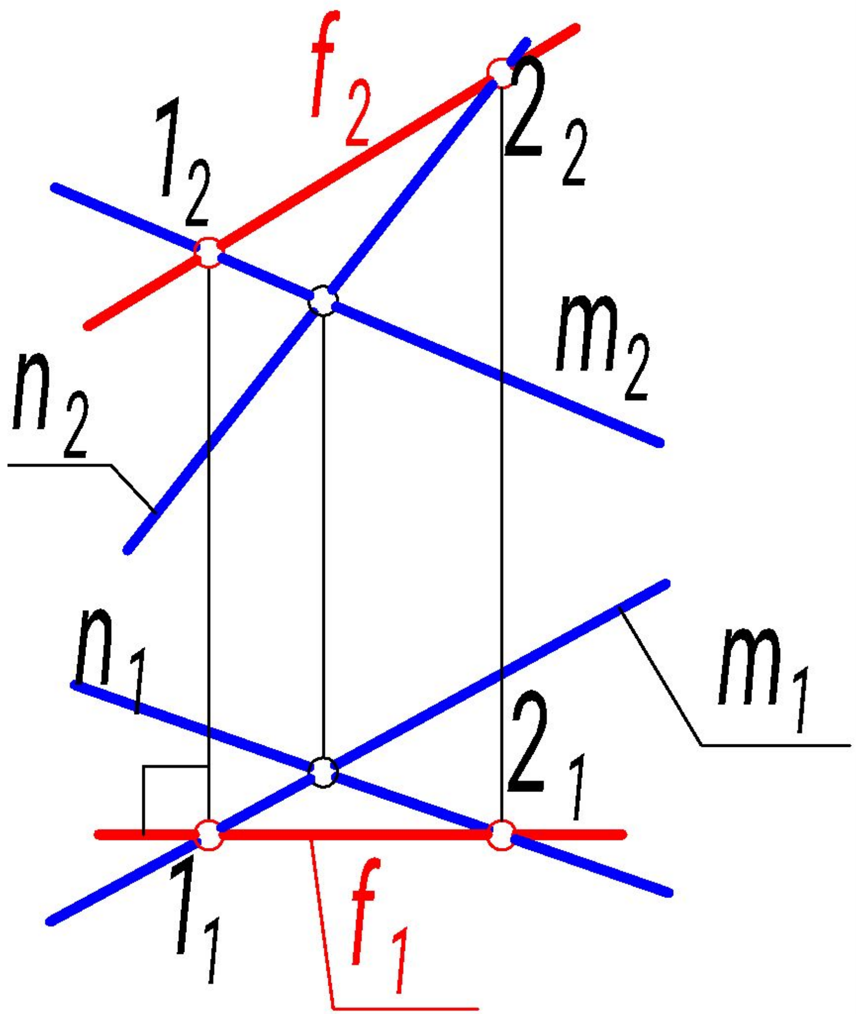
Это прямая, принадлежащая плоскости, и параллельная фронтальной плоскости проекций

Σ $(m \cap n)$ Построить: $f \subset \Sigma$; $f \parallel \Pi_2$

1. Проводим f_1 перпендикулярно линиям связи.



2. Так как *f* принадлежит плоскости, то f_2 находим по двум точкам в плоскости ($1 \in m$, $2 \in n$).

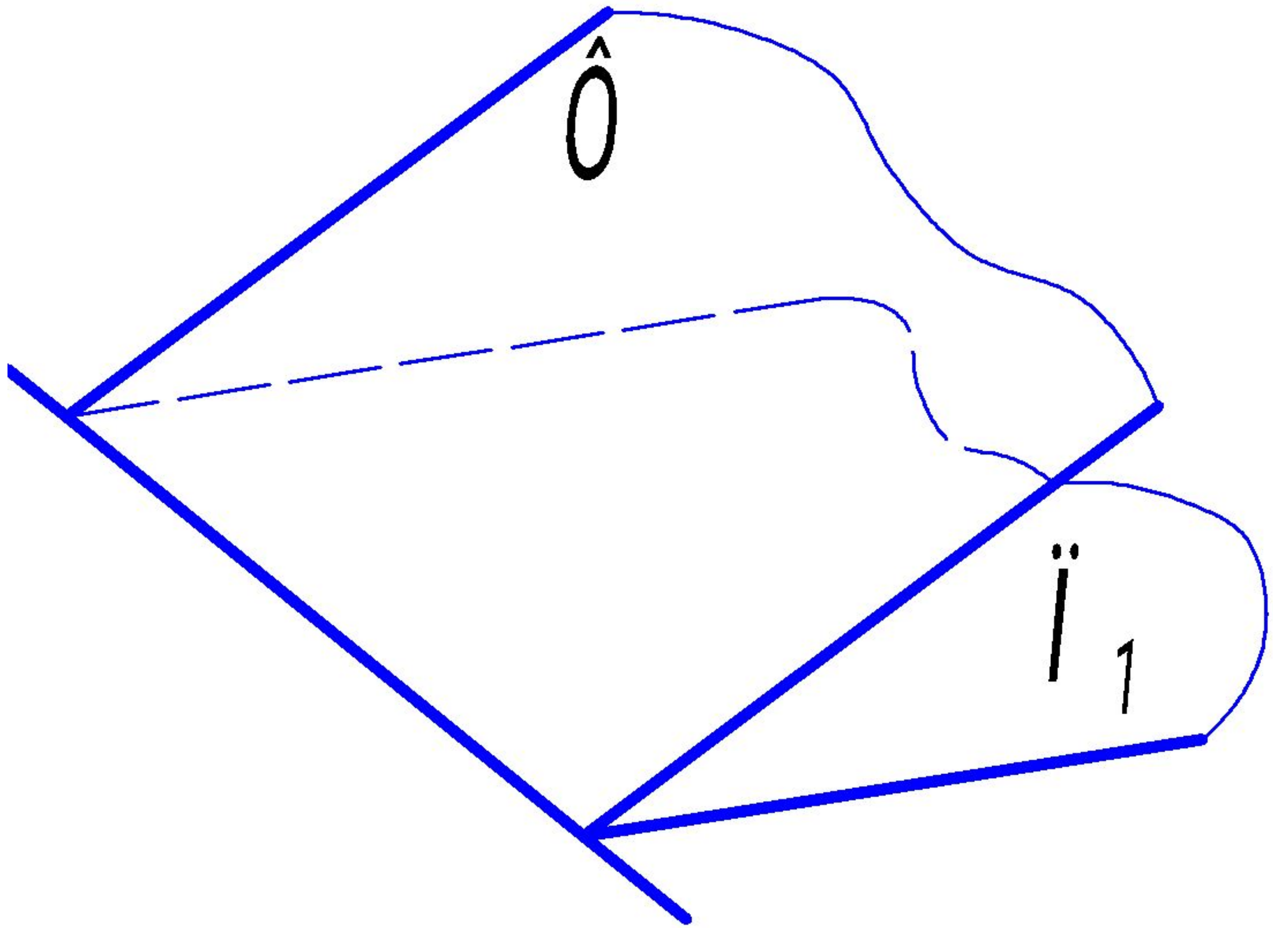


- Построение **фронтали** в плоскости начинают с горизонтальной проекции f_1 : она всегда перпендикулярна линиям связи в системе $П_2 – П_1$. f_2 находят по принадлежности плоскости.Это - натуральная величина *f*.

Линия наибольшего наклона плоскости

- Это прямая, принадлежащая плоскости и перпендикулярная одной из линий уровня плоскости. С её помощью определяют угол наклона заданной плоскости к одной из плоскостей проекций. Условимся линию наибольшего наклона плоскости к $П_1$ обозначать буквой *g* , к $П_2$ - буквой *e.*
- Линия наибольшего наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций называется **линией ската**

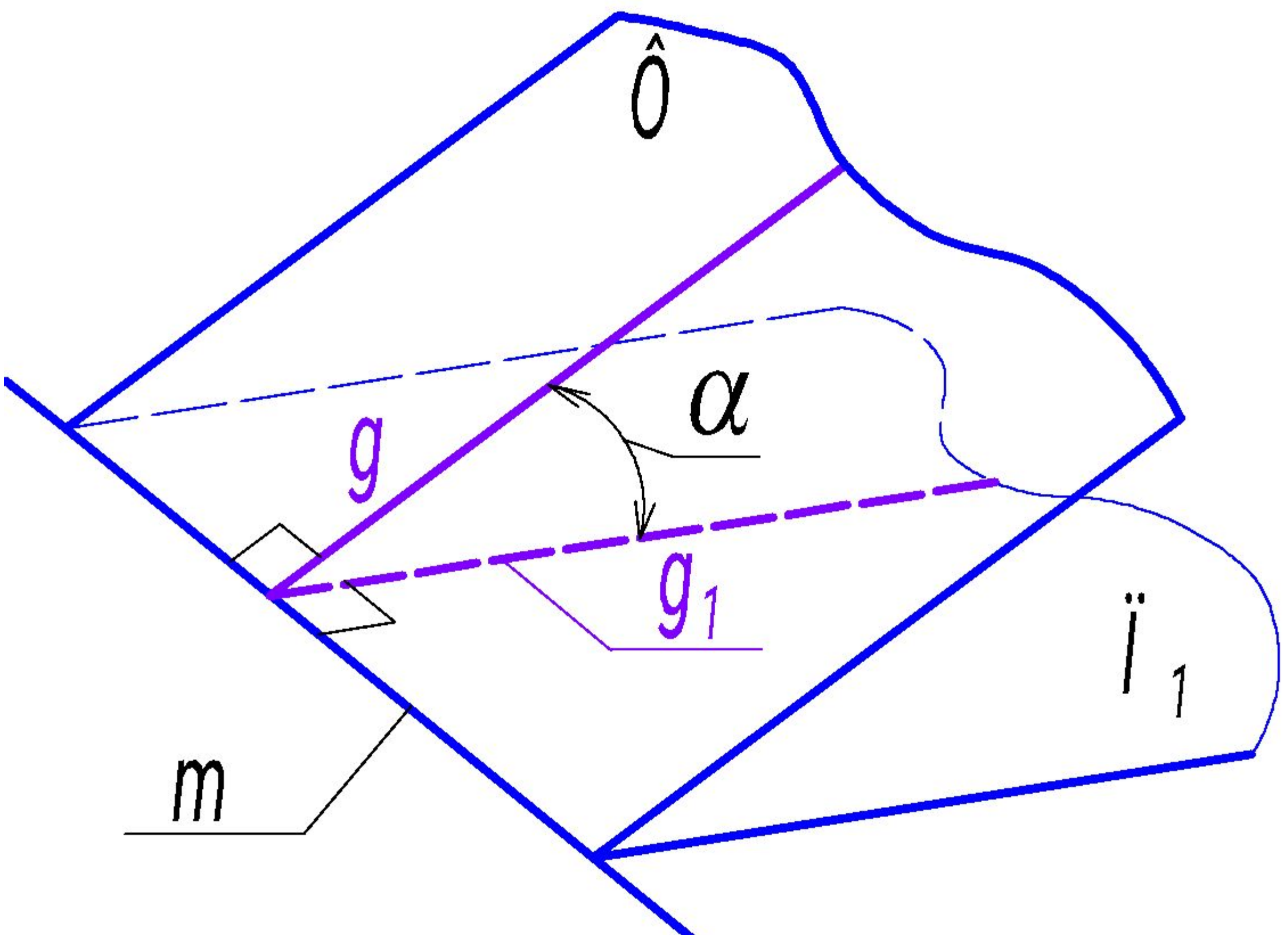
Задача: Определить угол наклона плоскости *Ф* к горизонтальной плоскости проекций



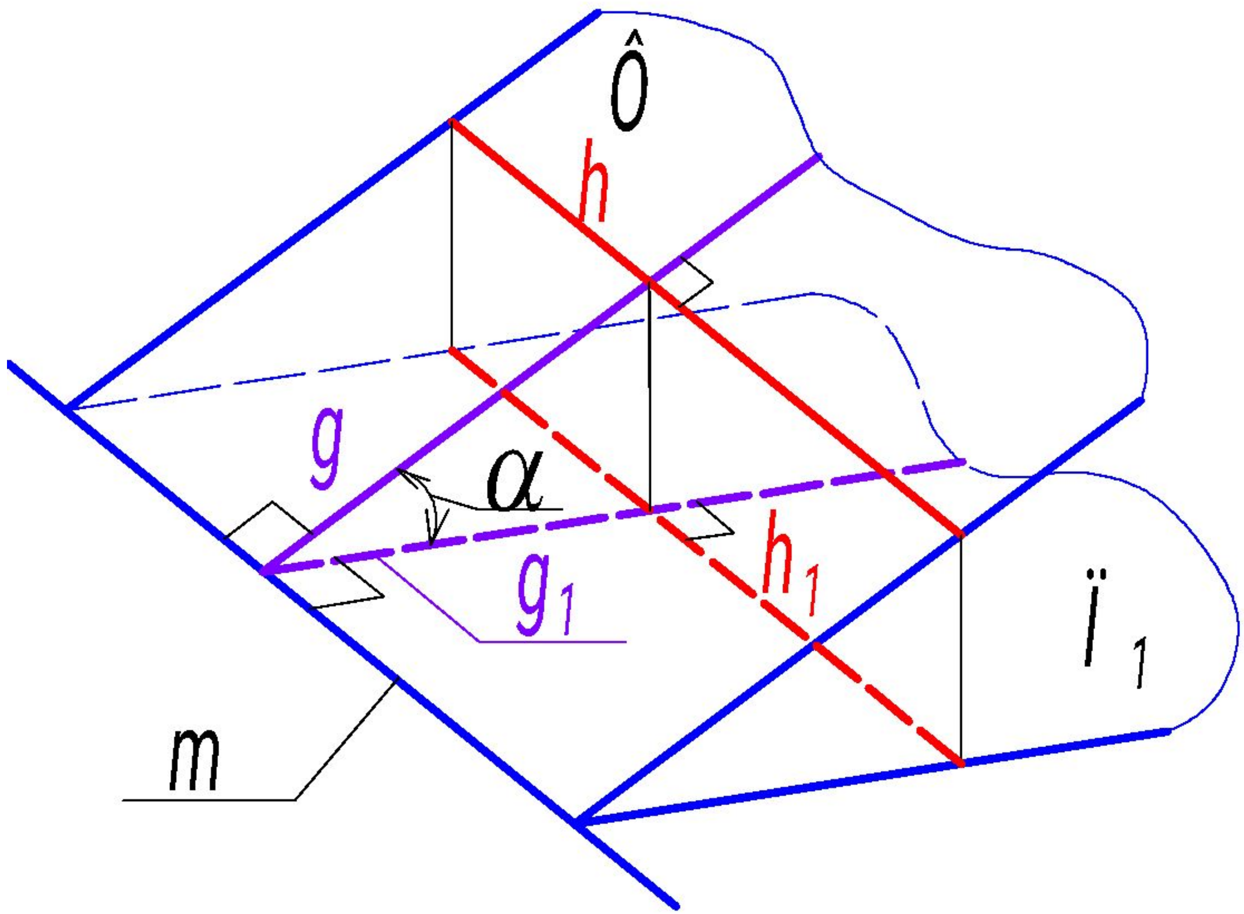
Пространственная модель.

Мерой двугранного угла является линейный угол. Следовательно, нам нужно определить угол между прямой *g* , перпендикулярной *m* (линии

пересечения плоскостей *Ф* и $П_1$), и её горизонтальной проекцией g_1



Согласно теореме о проецировании прямого угла,
если $g \perp h$, то $g_1 \perp h_1$. Проводим g_1.
Угол α между g и g_1 - есть угол наклона плоскости $Ф$ к $П_1$.



Таким образом, угол наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций - это угол между горизонтальной проекцией линии ската этой плоскости и её натуральной величиной.

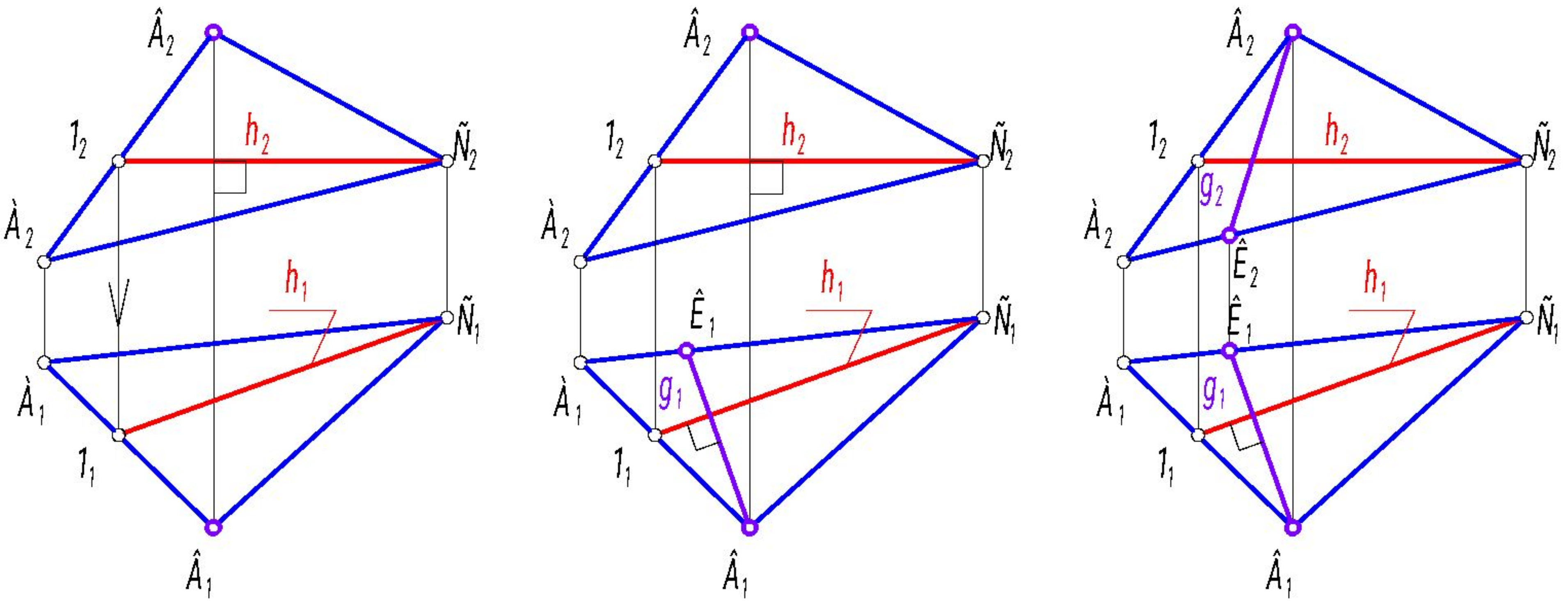
Выполним алгоритмическую запись вышеизложенного:

$\mathit{\Phi} \wedge \mathit{\Pi}_1 = g \wedge g_1;\ g \perp h \Rightarrow g_1 \perp h_1.$

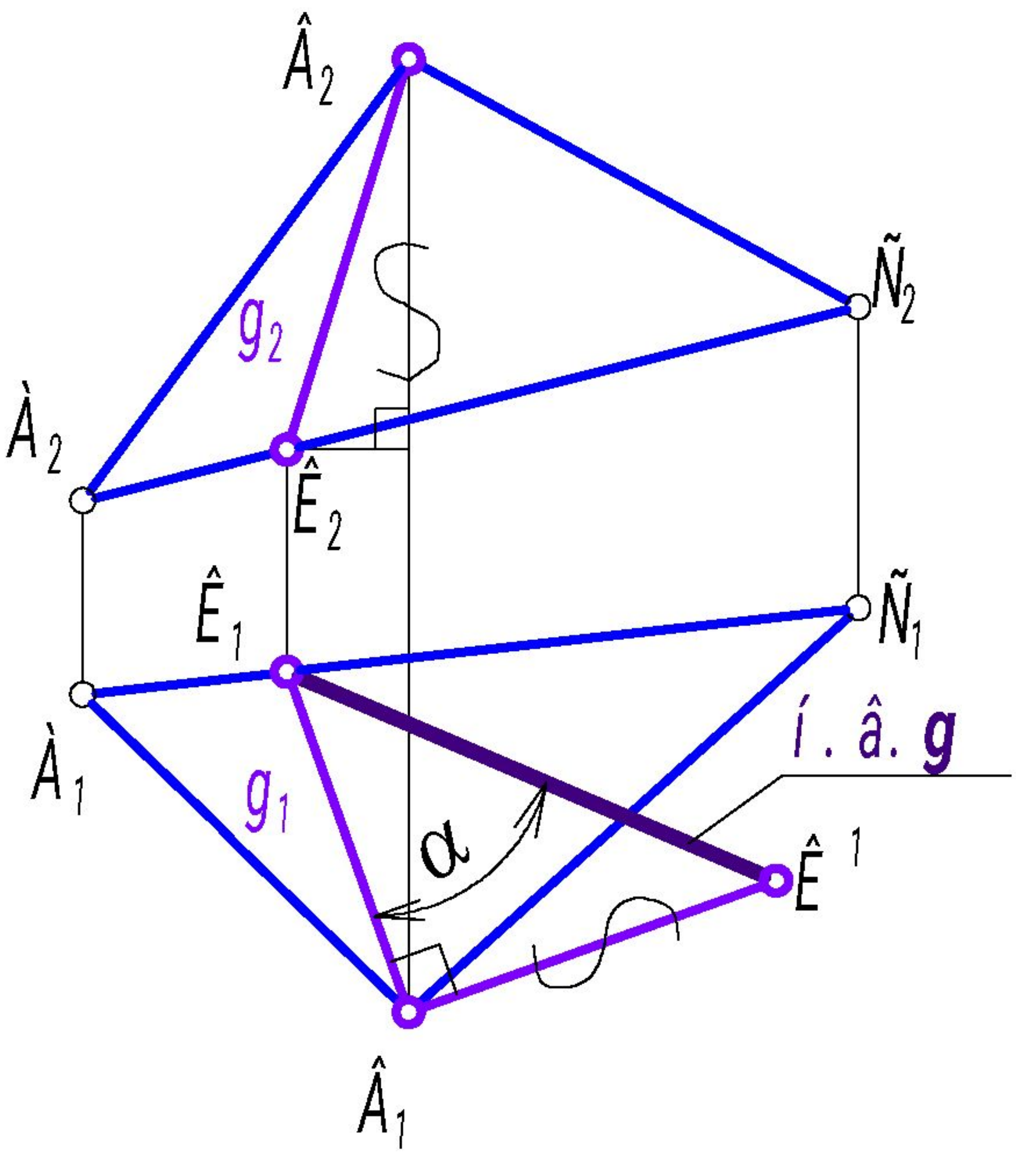
Плоский чертёж.

Зададим плоскость *Ф* треугольником *ABC*

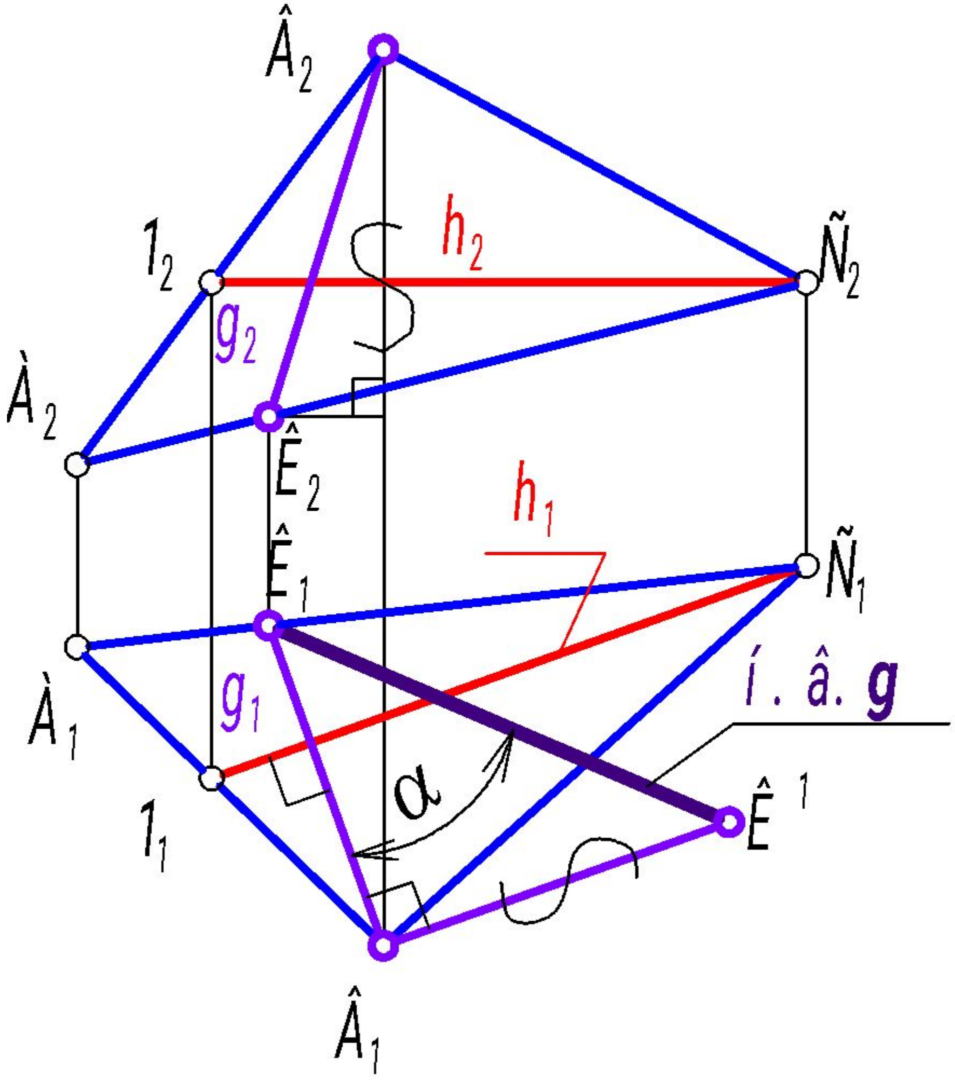
- **Алгоритм решения задачи:**
- 1. Проводим в плоскости *Ф(ABC)* горизонталь *h(h1,h2)*.
- 2. Проводим *g1(B1K1)* $\perp$ *h1*. Находим *g2(B2K2)* по принадлежности плоскости.
- 3. Находим натуральную величину *g* методом прямоугольного треугольника (рис. 2-21).
- 4. Угол *α* между *g1* u *g* - есть угол наклона плоскости *Ф(ABC*) к *П*1.



$\hat{A}_2$
1_2
h_2
$\tilde{N}_2$
$\grave{A}_2$
h_1
$\tilde{N}_1$
$\grave{A}_1$
1_1
$\hat{A}_1$
$\hat{A}_2$
1_2
h_2
$\tilde{N}_2$
$\grave{A}_2$
h_1
$\hat{E}_1$
$\tilde{N}_1$
$\grave{A}_1$
g_1
1_1
$\hat{A}_1$
$\hat{A}_2$
1_2
h_2
$\tilde{N}_2$
g_2
$\grave{A}_2$
$\hat{E}_2$
h_1
$\hat{E}_1$
$\tilde{N}_1$
$\grave{A}_1$
g_1
1_1
$\hat{A}_1$


Â2
À2
Ñ2
g2
Ê2
Ê1
Ñ1
À1
g1
í. â. g
α
Ê 1
Â1

Полное решение задачи



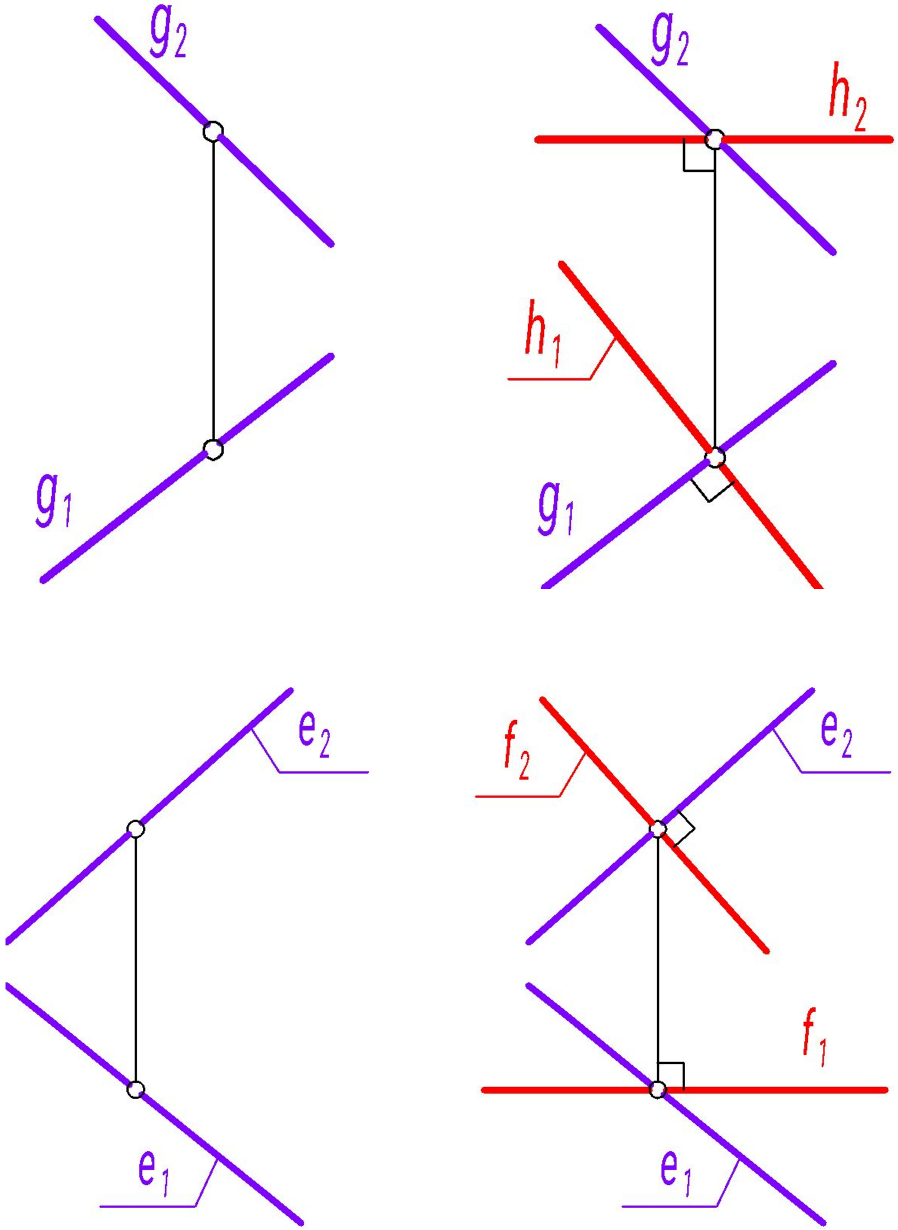
Аналогично можно решить задачу на определение угла наклона плоскости *Ф* к $П_2$. Для этого в плоскости *Ф* нужно взять фронталь, линию наибольшего наклона плоскости к $П_2$ - *е* строить перпендикулярно фронтали ($e_2 \perp f_2 \rightarrow e$) и находить натуральную величину *е* на $П_2$.

Если плоскости заданы с помощью линии ската *g* и линии наибольшего наклона плоскости к $П_2$ – *е,* то*:*

в первом случае к линии ската необходимо добавить горизонталь ($h_2 \perp$ линиям связи, $h_1 \perp g_1$) ;

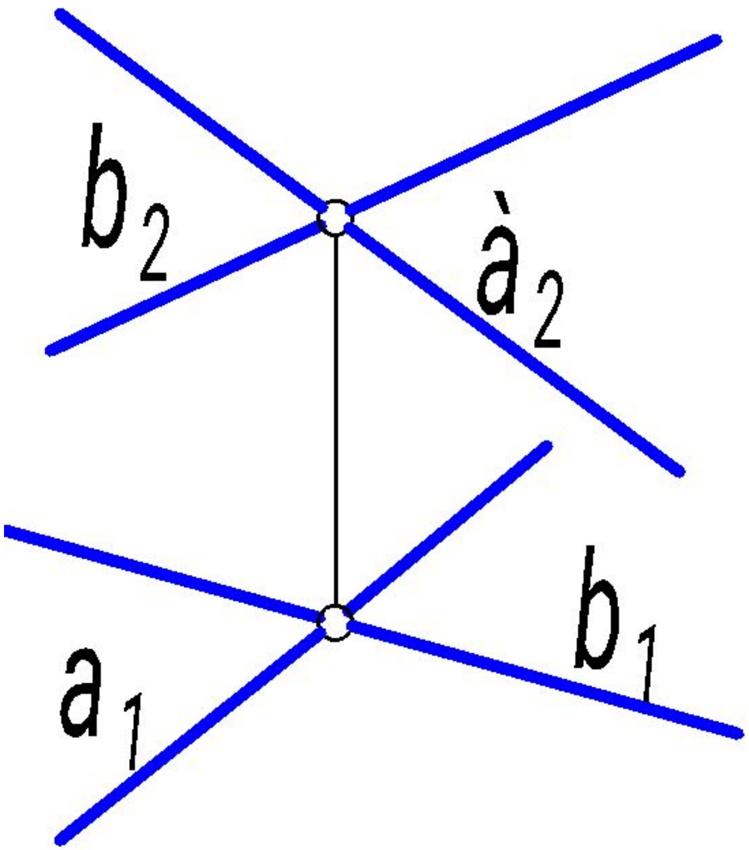
во втором к линии наибольшего наклона *е* добавляют фронталь ($f_1 \perp$ линиям связи, $f_2 \perp e_2$)

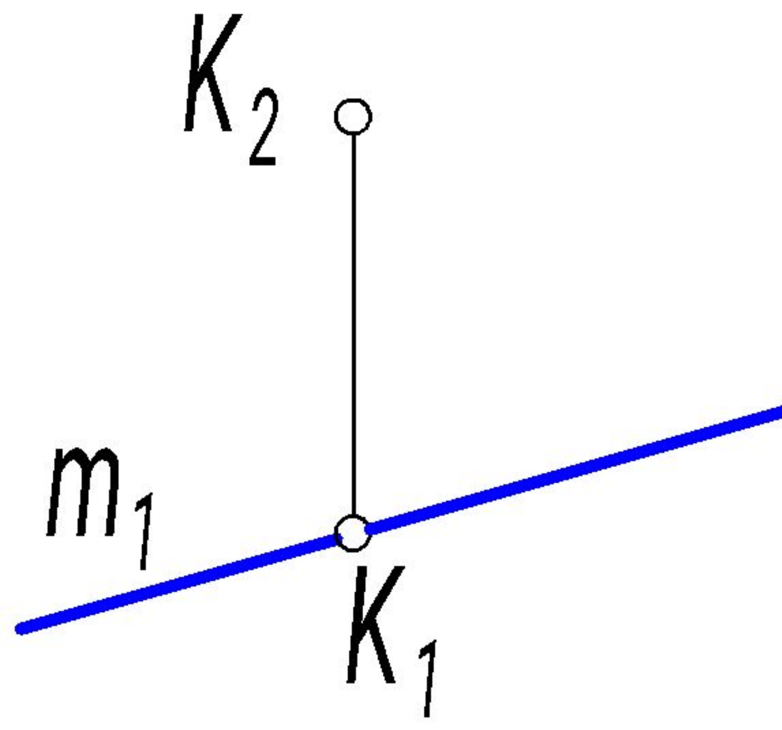
. В обоих случаях плоскость получается заданной пересекающимися прямыми.


g_2
g_1
g_2
h_2
h_1
g_1
e_2
e_1
f_2
e_2
f_1
e_1

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.

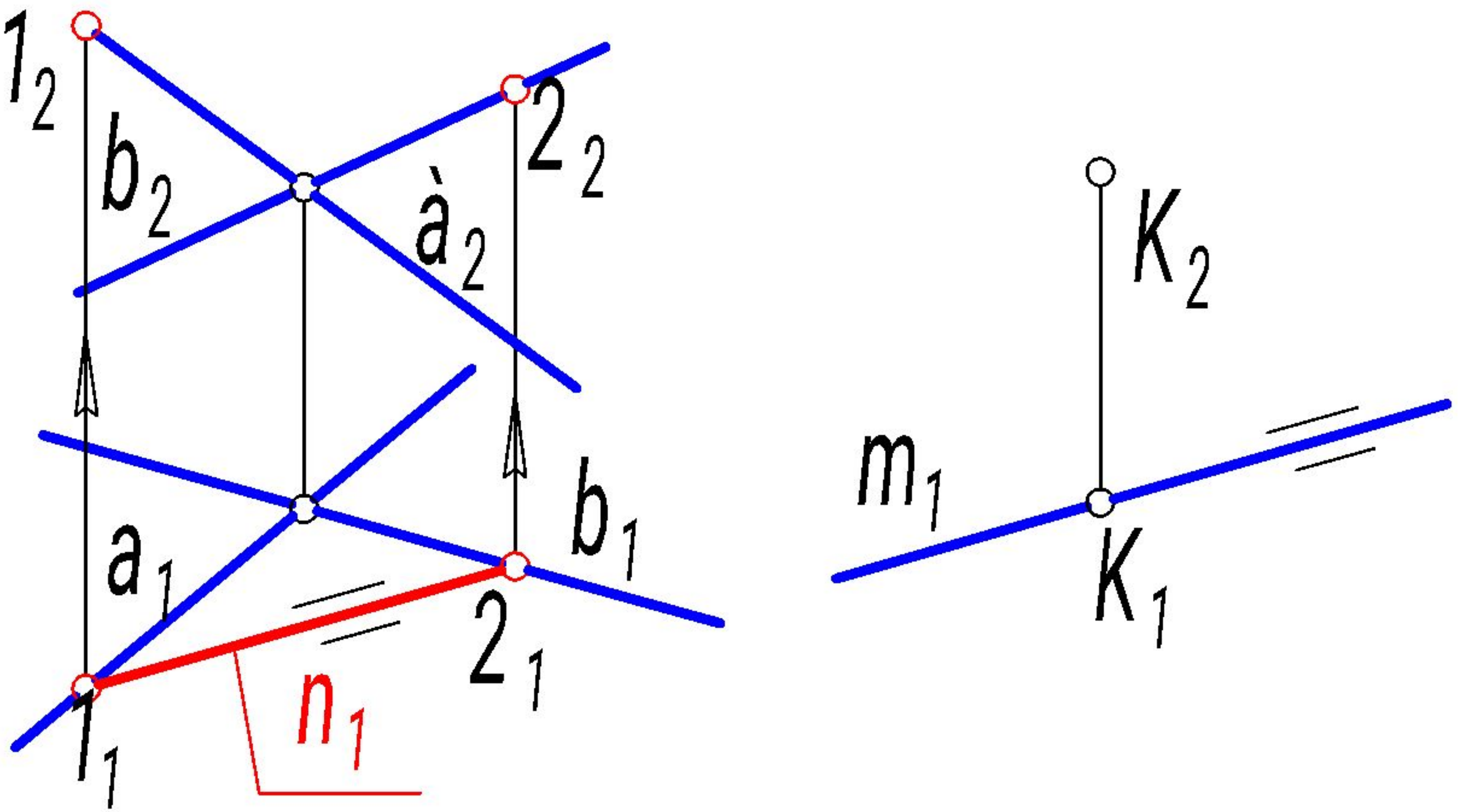
Задача: Через точку *К*(K_2,K_1) провести прямую *m*(m_1), параллельную плоскости $\Sigma(a \cap b)$





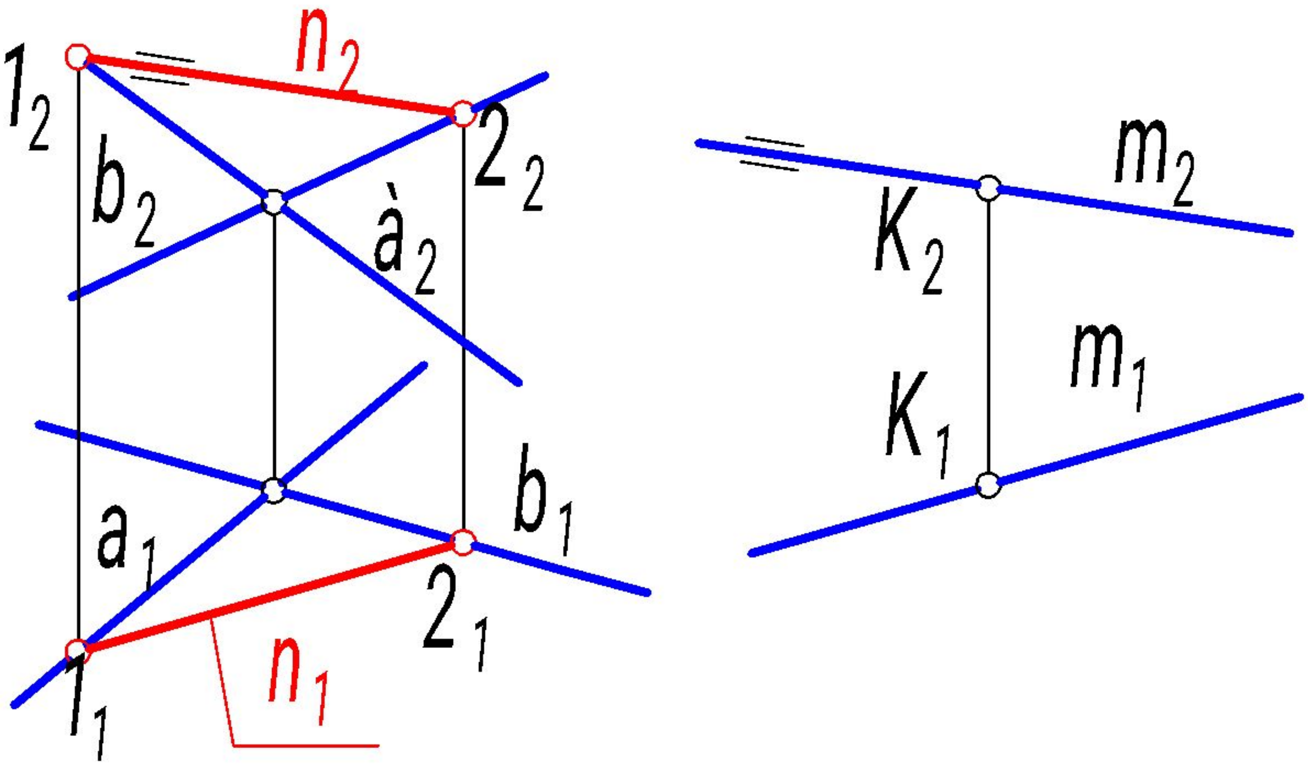
Алгоритм

1. В плоскости Σ проведём прямую n, параллельную m. Для этого сначала проведём $1_1 2_1 \parallel m_1$, затем найдём $1_2 2_2$ в плоскости. Это будет n_2



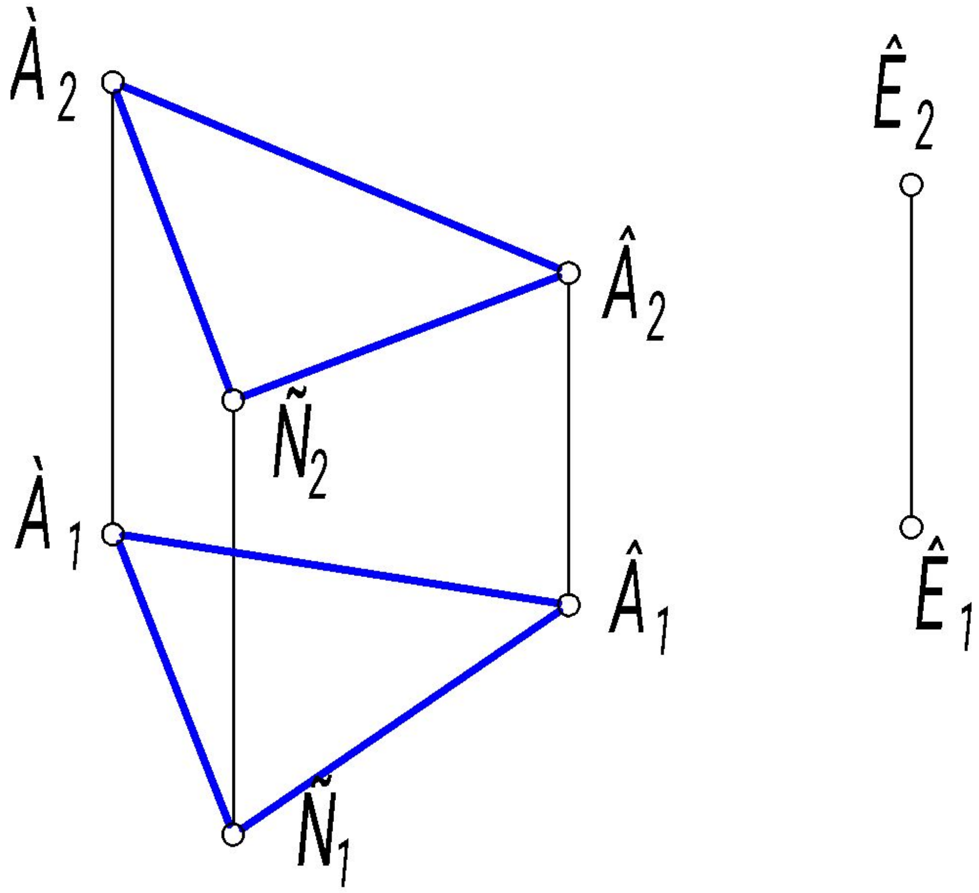
2. Через $1_2 2_2$ проведем n_2 .Через точку K_2 проводим m_2 параллельно n_2.

3. Согласно пятому свойству параллельного проецирования прямая m параллельна прямой n, но $n \subset \Sigma$, следовательно, $m \parallel \Sigma$



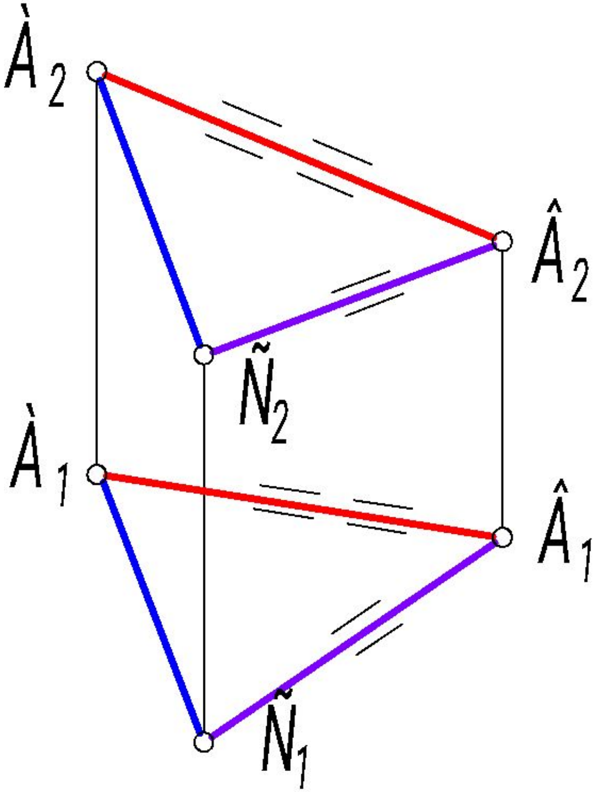
Две плоскости взаимно параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

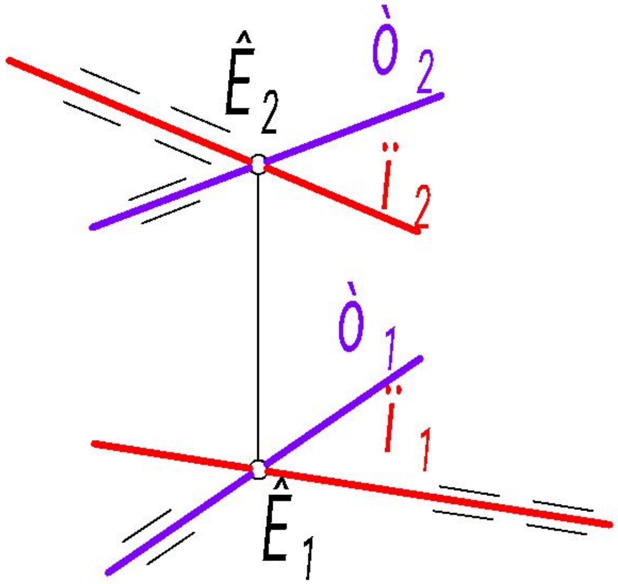
Задача: Через точку $K(K_1K_2)$ провести плоскость Δ, параллельную плоскости $\Gamma(ABC)$. Плоскость Δ задать пересекающимися прямыми.



Алгоритм:

1. Плоскость Δ зададим прямыми $m \cap n = K$.
2. Прямую m возьмём параллельно стороне CB треугольника. Если $m \parallel CB$, то $m_1 \parallel C_1B_1$, а $m_2 \parallel C_2B_2$
3. Прямую n возьмём параллельно стороне AB треугольника. Если $n \parallel AB$, то $n_1 \parallel A_1B_1$, а $n_2 \parallel A_2B_2$.
4. Таким образом, плоскости $\Sigma(ABC)$ и $\Delta(m \cap n)$ параллельны.





Задание поверхности на комплексном чертеже

Существует несколько способов задания поверхности: аналитический, графический, кинематический.

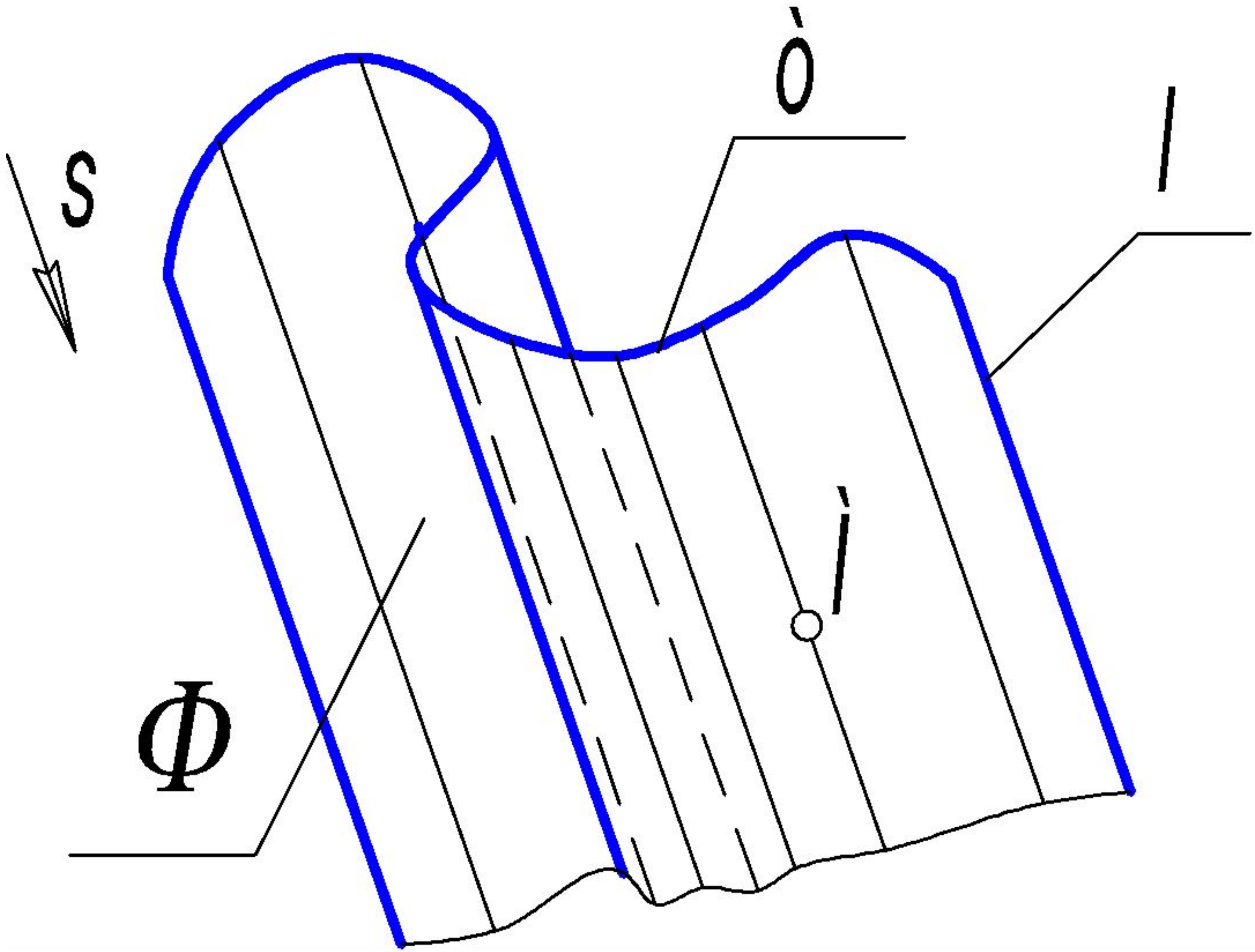
Любое тело ограничивается своей поверхностью. Тело - конечно и состоит из конкретного материала - металла, пластмассы, древесины.

Поверхность является абстрактной фигурой, не имеющей толщины, т.е. образно говоря, это тонкая пленка, натянутая на каркас поверхности. Например, шар - тело, которое ограничено сферой - поверхностью.

В начертательной геометрии поверхность задают кинематически - как множество всех положений перемещающейся по определенному закону линии в пространстве. Эта линия называется **образующей - *l*.** Как правило, она скользит по некоторой неподвижной линии, называемой **направляющей - *m***, направляющих может быть одна или несколько.

Образующая *l* , скользя по неподвижной направляющей *m*, создает плотную сеть линий. Такое упорядоченное множество линий поверхности называется ее каркасом:

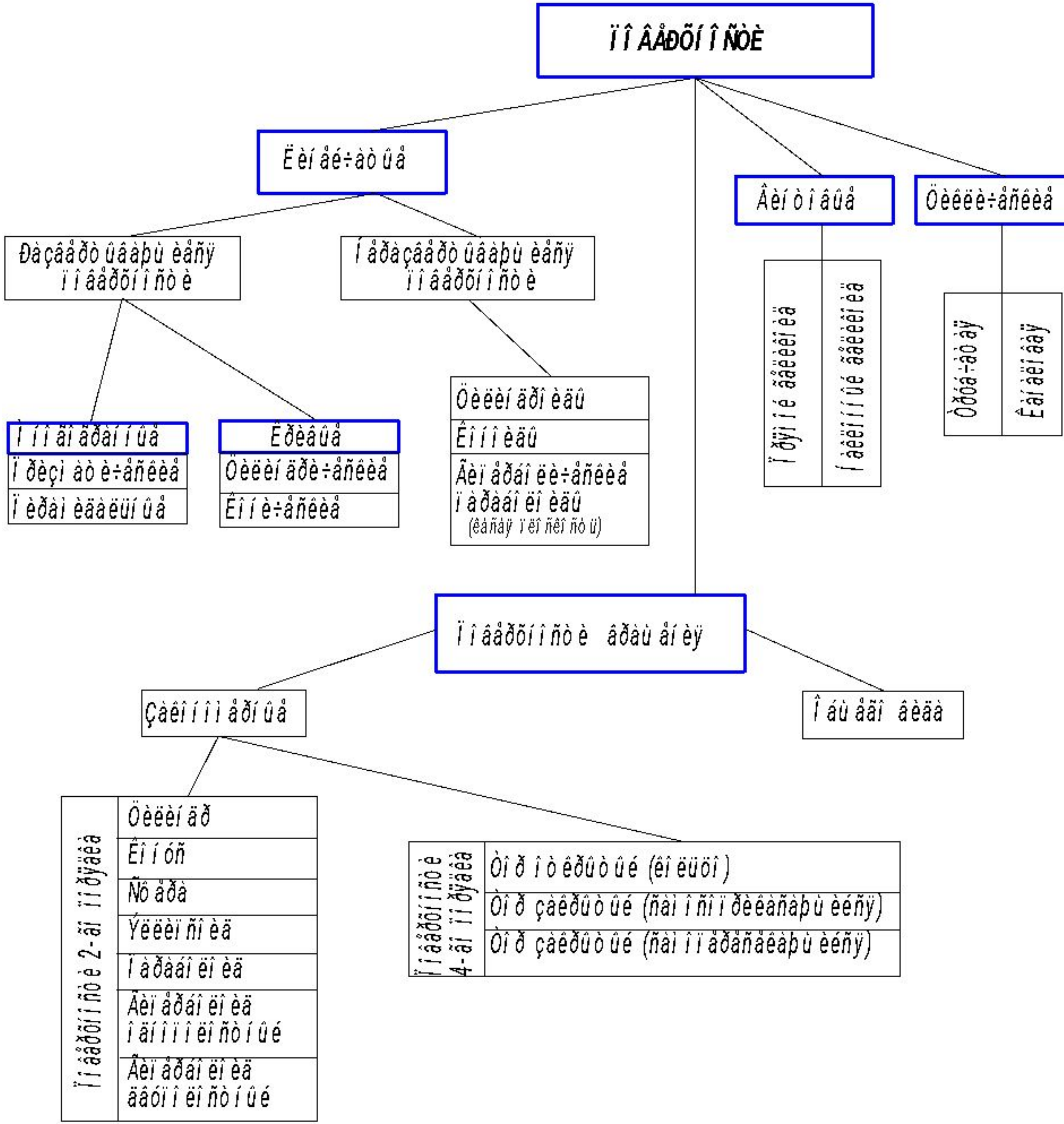
- Каркасы бывают **непрерывными** – поверхность задана всем множеством образующих, или **дискретными**, когда имеется конечное число образующих.
- При построении дискретного каркаса поверхности необходимо учитывать закон каркаса.
- Закон каркаса - это закон движения образующей.



S
ò
l
Ì
Φ

Определитель поверхности

- Определитель состоит из двух частей: $D = G + A$.
- **Геометрическая часть - *G*** устанавливает набор геометрических фигур (геометрических элементов), участвующих в образовании поверхности, например: $\Phi(m,s)$
- **Алгоритмическая часть - *A*** устанавливает закон (характер) взаимодействия геометрических фигур в процессе образования поверхности, например: $l \cap m$, $l \parallel s$.
- При построении чертежа поверхности алгоритмической частью определителя является закон каркаса поверхности.

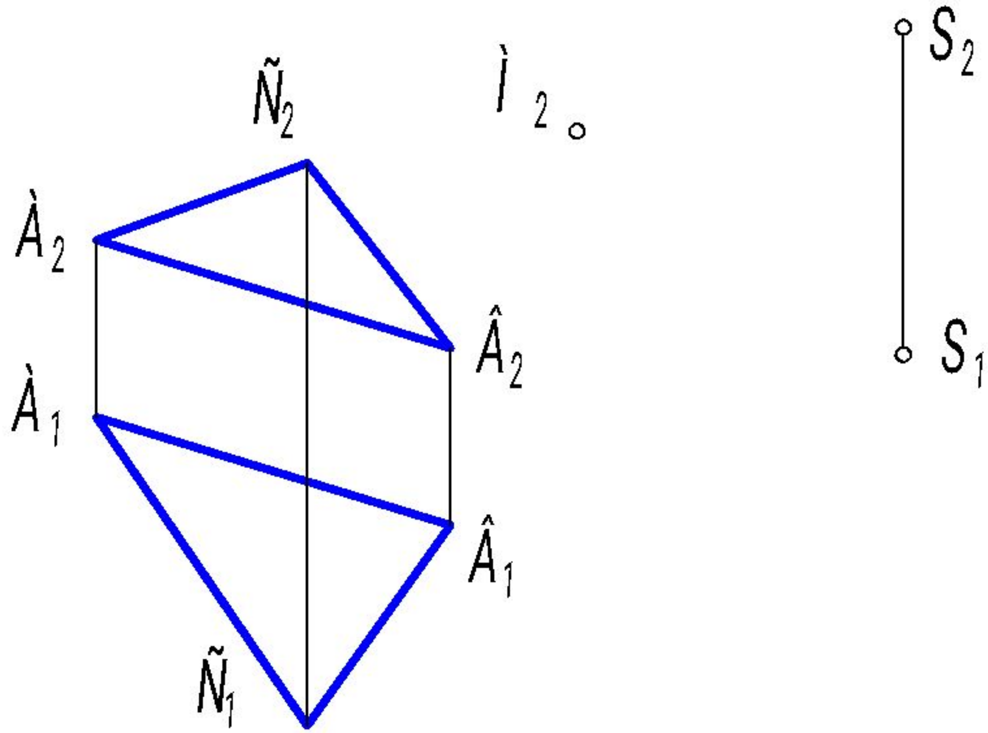

ÏÎ ÂÅÐÕÍÎÑÒÈ
Ëèíåé÷àòûå
Âèíòîâûå
Öèêëè÷åñêèå
Ðàçâåðòûâàþùèåñÿ ïîâåðõíîñòè
Íåðàçâåðòûâàþùèåñÿ ïîâåðõíîñòè
Ïðÿìîé ãåëèêîèä
Íàêëîííûé ãåëèêîèä
Òðóá÷àòàÿ
Êàíàëîâàÿ
Ìíîãîãðàííûå
Ïðèçìàòè÷åñêèå
Ïèðàìèäàëüíûå
Êðèâûå
Öèëèíäðè÷åñêèå
Êîíè÷åñêèå
Öèëèíäðîèäû
Êîíîèäû
Ãèïåðáîëè÷åñêèå ïàðàáîëîèäû
(êîñàÿ ïëîñêîñòü)
Ïîâåðõíîñòè âðàùåíèÿ
Çàêîíîìåðíûå
Îáùåãî âèäà
Ïîâåðõíîñòè 2-ãî ïîðÿäêà
Öèëèíäð
Êîíóñ
Ñôåðà
Ýëëèïñîèä
Ïàðàáîëîèä
Ãèïåðáîëîèä îäíîïîëîñòíûé
Ãèïåðáîëîèä äâóïîëîñòíûé
Ïîâåðõíîñòè 4-ãî ïîðÿäêà
Òîð îòêðûòûé (êîëüöî)
Òîð çàêðûòûé (ñàìîñîïðèêàñàþùèéñÿ)
Òîð çàêðûòûé (ñàìîïåðåñåêàþùèéñÿ)

Поверхность считается графически заданной на комплексном чертеже, если можно построить точку на поверхности.

- Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит линии, лежащей на поверхности. Для линейчатых поверхностей выбирают образующую - прямую линию. Для других поверхностей выбирают графически простые линии, к которым относят прямую и окружность.

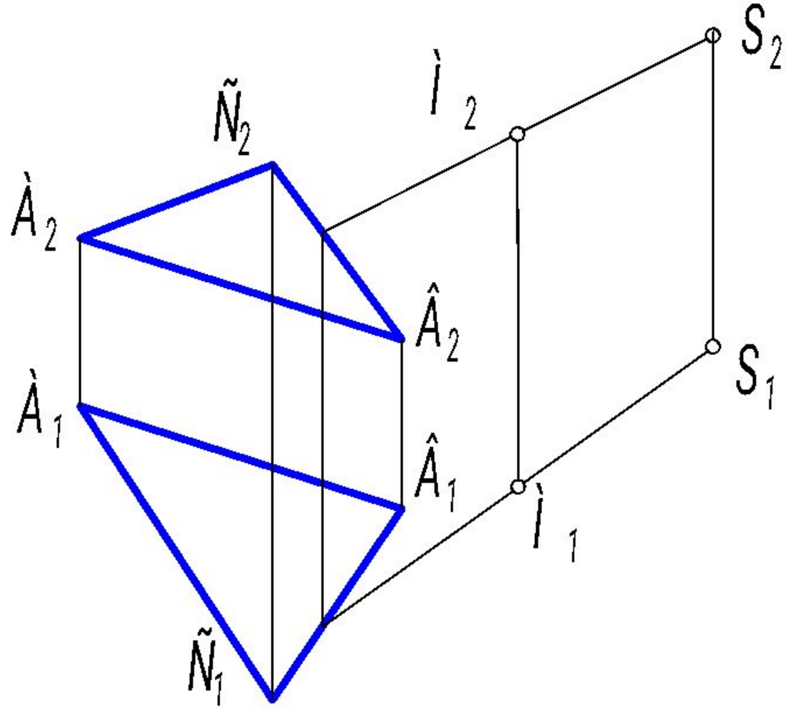
Рассмотрим пример задания треугольной призмы проекциями геометрической части определителя *Σ*

(ABC,S)



Поверхность действительно задана, т.к. можно построить недостающую проекцию точки *M(M$_1$)*, т.е. чертеж обратим, но не является наглядным. Следовательно, необходимо дополнить чертеж

поверхности ее очертаниями



Поэтому конструировать поверхности мы будем с помощью построения дискретного каркаса, проекции которого обеспечат обратимость и наглядность чертежа поверхности.

Сконструировать поверхность - это значит построить проекции поверхности, состоящие из проекций определителя и проекций характерных линий, к которым относятся **линии контура и линии обреза.**

Алгоритм (последовательность построения чертежа любой поверхности):

1. Задать проекции элементов определителя (будем иметь в виду задание проекций геометрической части определителя).
2. Построить проекции дискретного каркаса, состоящего из конечного числа графически простых линий.
3. Построить проекции линии обреза, которые для образования поверхности существенной роли не играют, они лишь ограничивают, обрезают поверхность.
4. Определить видимость проекций поверхности.
5. Обвести видимые линии проекций поверхности сплошной толстой линией.