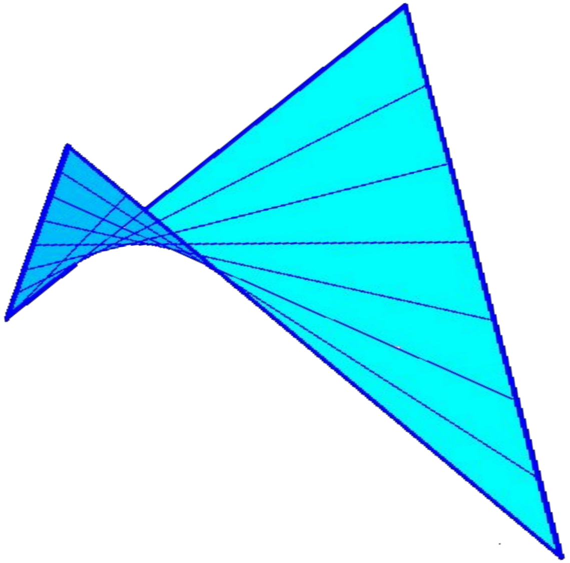
Волжский политехнический институт
(филиал) ФГБОУ ВО
«Волгоградский государственный технический университет»

Курс лекций
по начертательной геометрии и инженерной графике

Тышкевич Владимир Николаевич,
к.т.н., доцент, заведующий кафедрой
«Механика»

«Чертёж является языком техника…»
(Гаспар Монж)
«Если чертёж является языком техника, то начертательная геометрия служит грамматикой этого языка, так как она учит нас читать чужие и выражать наши собственные мысли, пользуясь в качестве слов одними только линиями и точками, как элементами всякого изображения»
(В.И. Курдюмов)



Лекция № 14

7. РАЗВЕРТКИ

7. Р А З В Е Р Т К И

Поверхность называется развертывающейся, если её она путём изгибания может быть совмещена с плоскостью без складок и разрывов.

Развертка - плоская фигура, полученная в результате совмещения поверхности с плоскостью.

В И Д Ы Р А З В Ё Р Т О К

Т О Ч Н Ы Е

Имеют только многогранники

П Р И Б Л И Ж Ё Н Н Ы Е

Для криволинейных развертываемых поверхностей (линейчатых с одной направляющей).

Построение - методом аппроксимации, т.е. заменой многогранной поверхностью.

У С Л О В Н Ы Е

Для неразвертывающихся поверхностей.

Поверхность мысленно делят на отдельные сектора и затем для каждого сектора строят развертку.

СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ Р А З В Ё Р Т О К

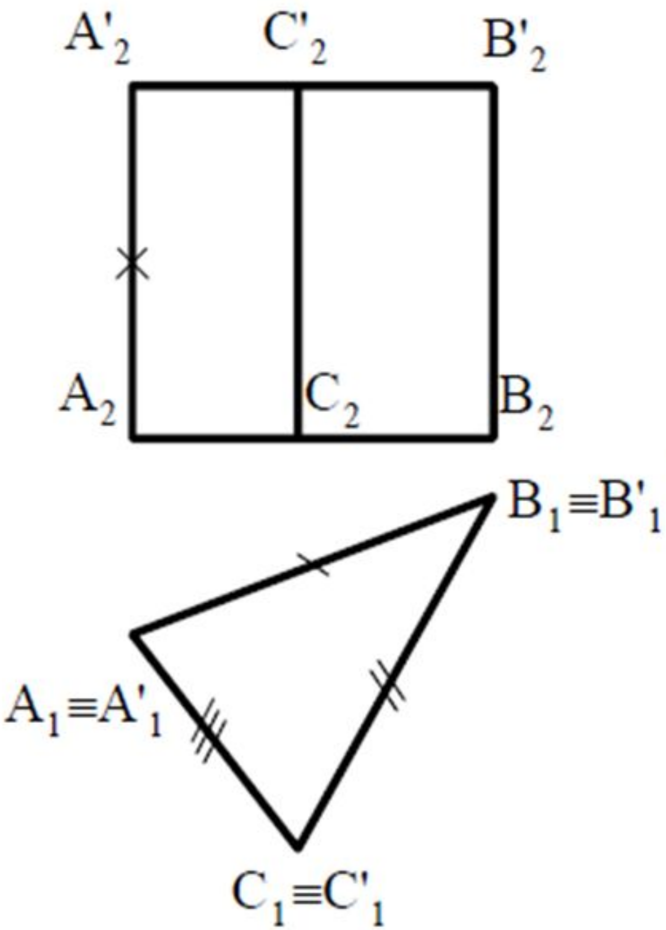
ТРИАНГУЛЯЦИИ
(треугольников)
Для пирамидальных и конических поверхностей.

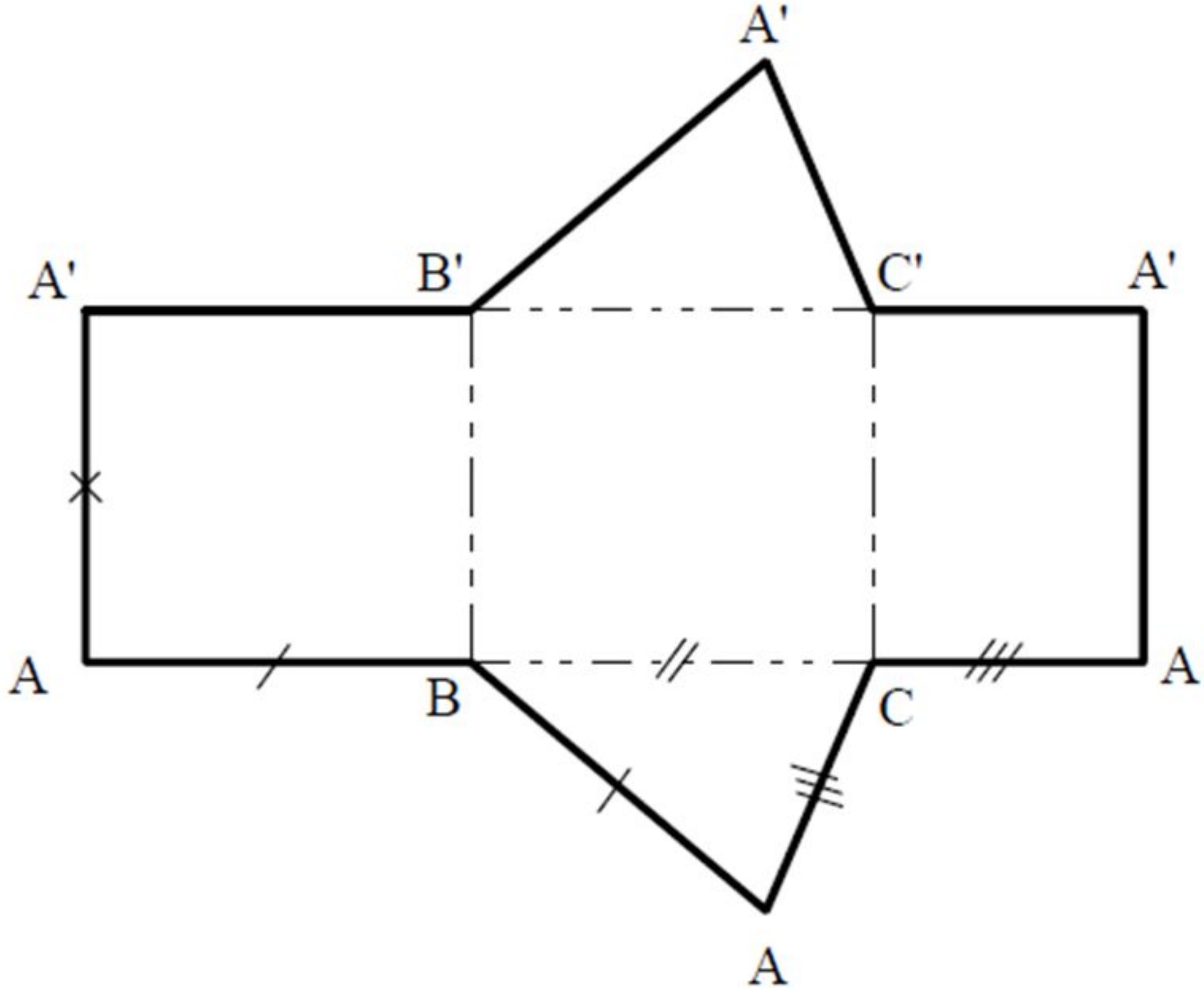
НОРМАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

РАСКАТКИ

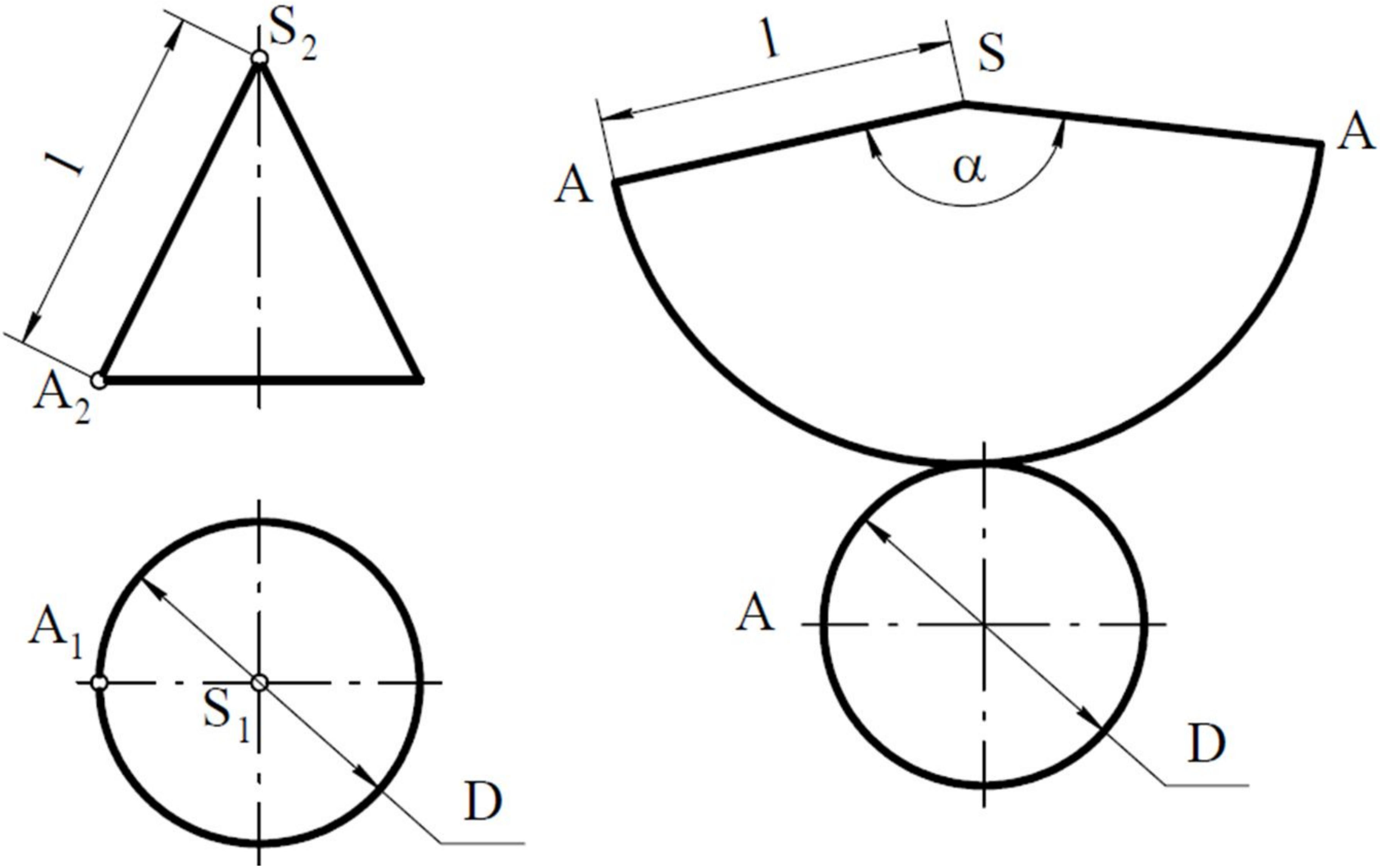
Для цилиндрических и призматических поверхностей, если образующие этих поверхностей - линии уровня

Разверткой поверхности прямой призмы является многоугольник с истинными размерами ребер-сторон.

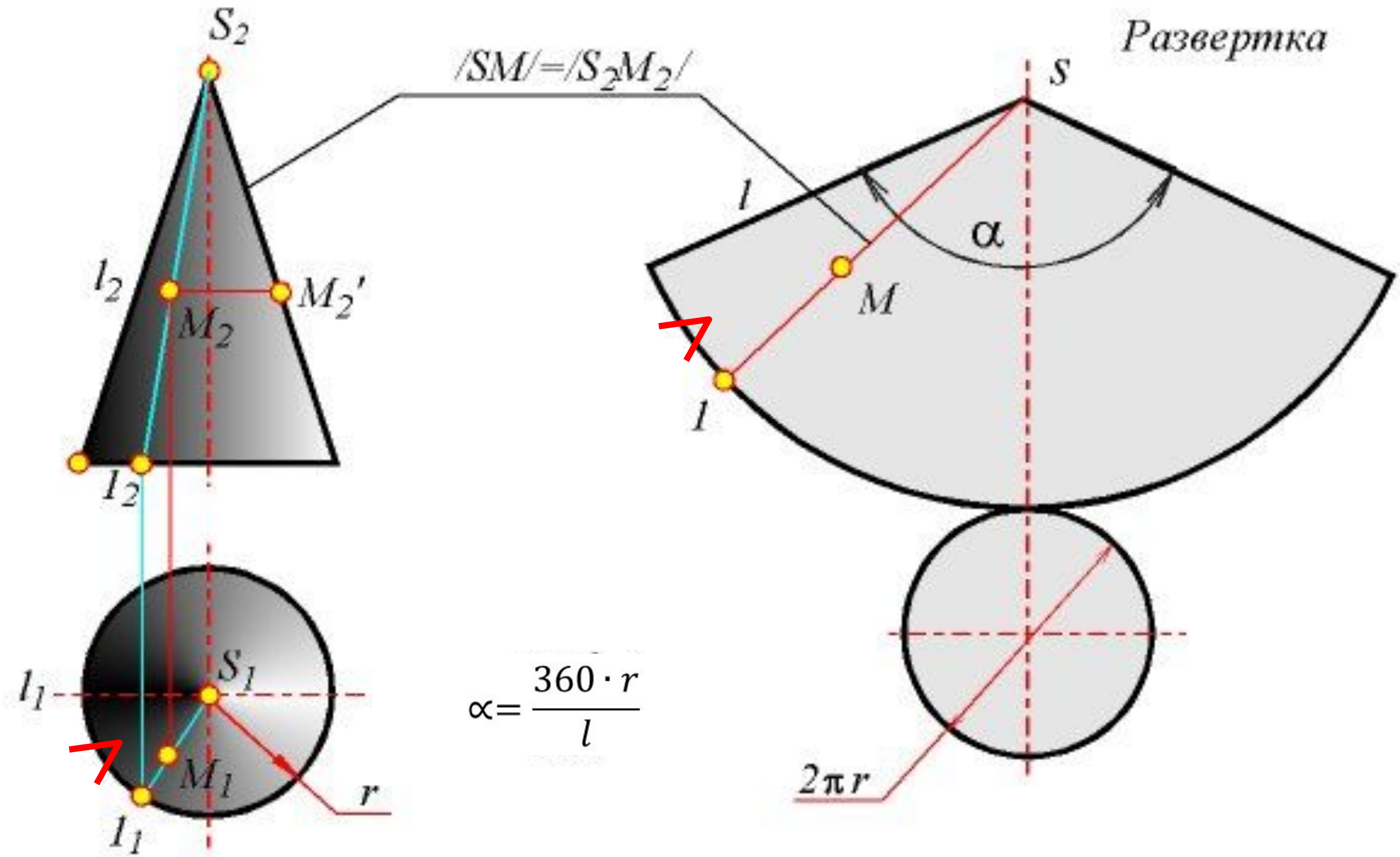




Разверткой поверхности конуса вращения является сектор круга радиусом $R = l$, где l – образующая, Угол $\alpha = 180^{\circ}D/l$, где D – диаметр окружности основания.

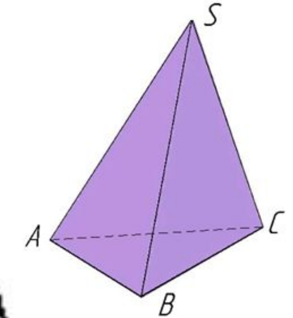


Разверткой поверхности конуса вращения является сектор круга радиусом R = l,
где l – образующая, α = 2πr / l - угол сектора,

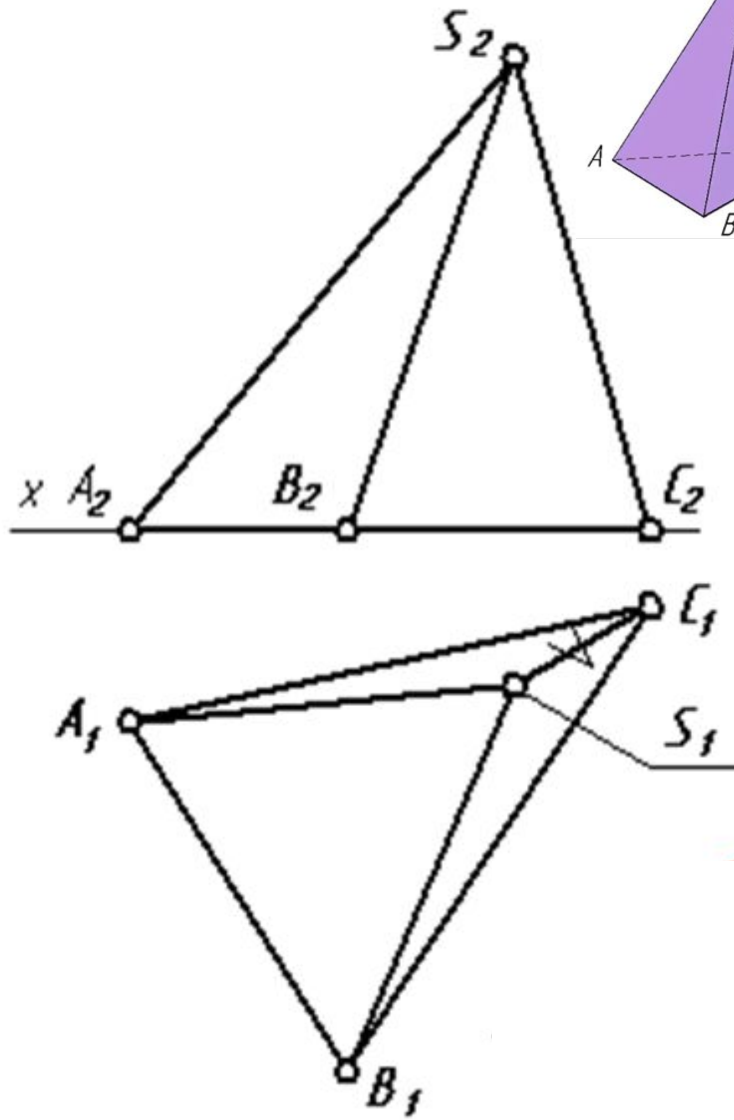


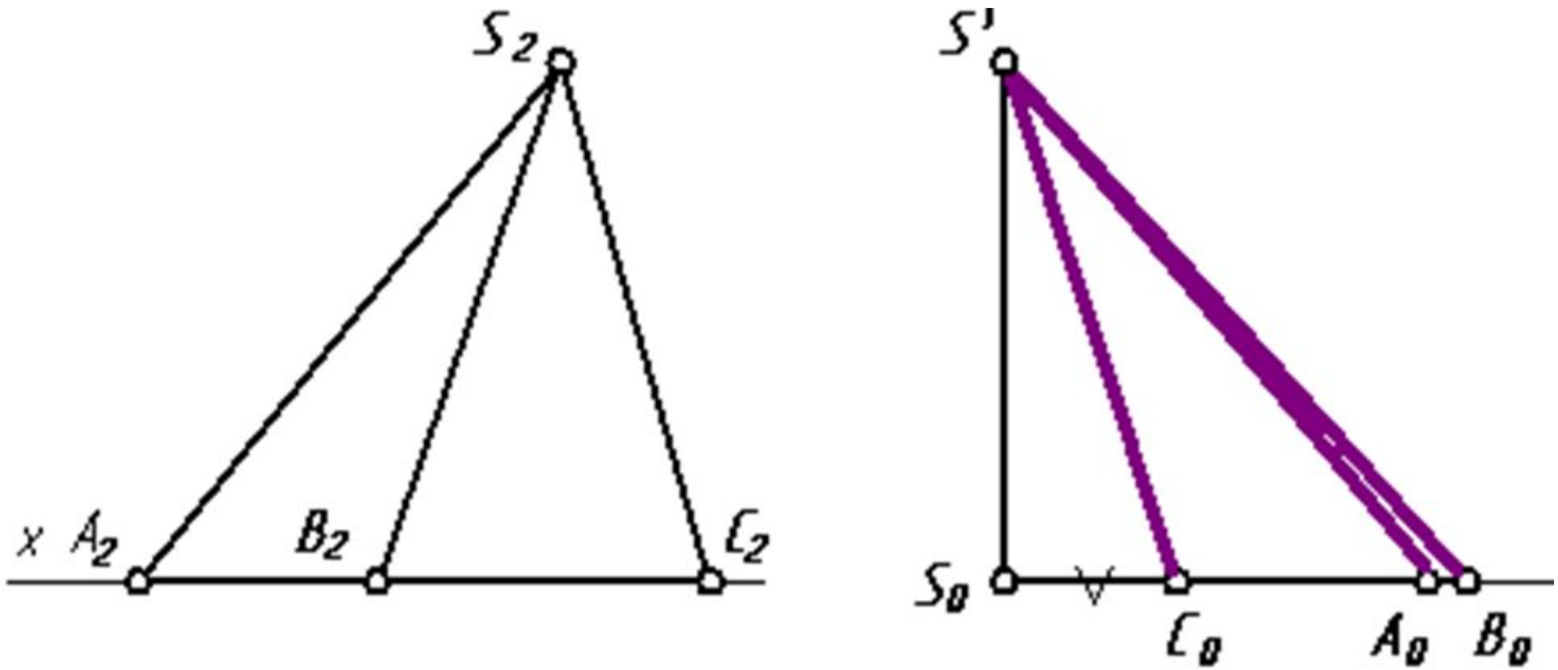
СПОСОБ ТРИАНГУЛЯЦИИ (треугольников)
Для пирамидальных и конических поверхностей.

Пример: ***Построить развертку пирамиды ABCS***

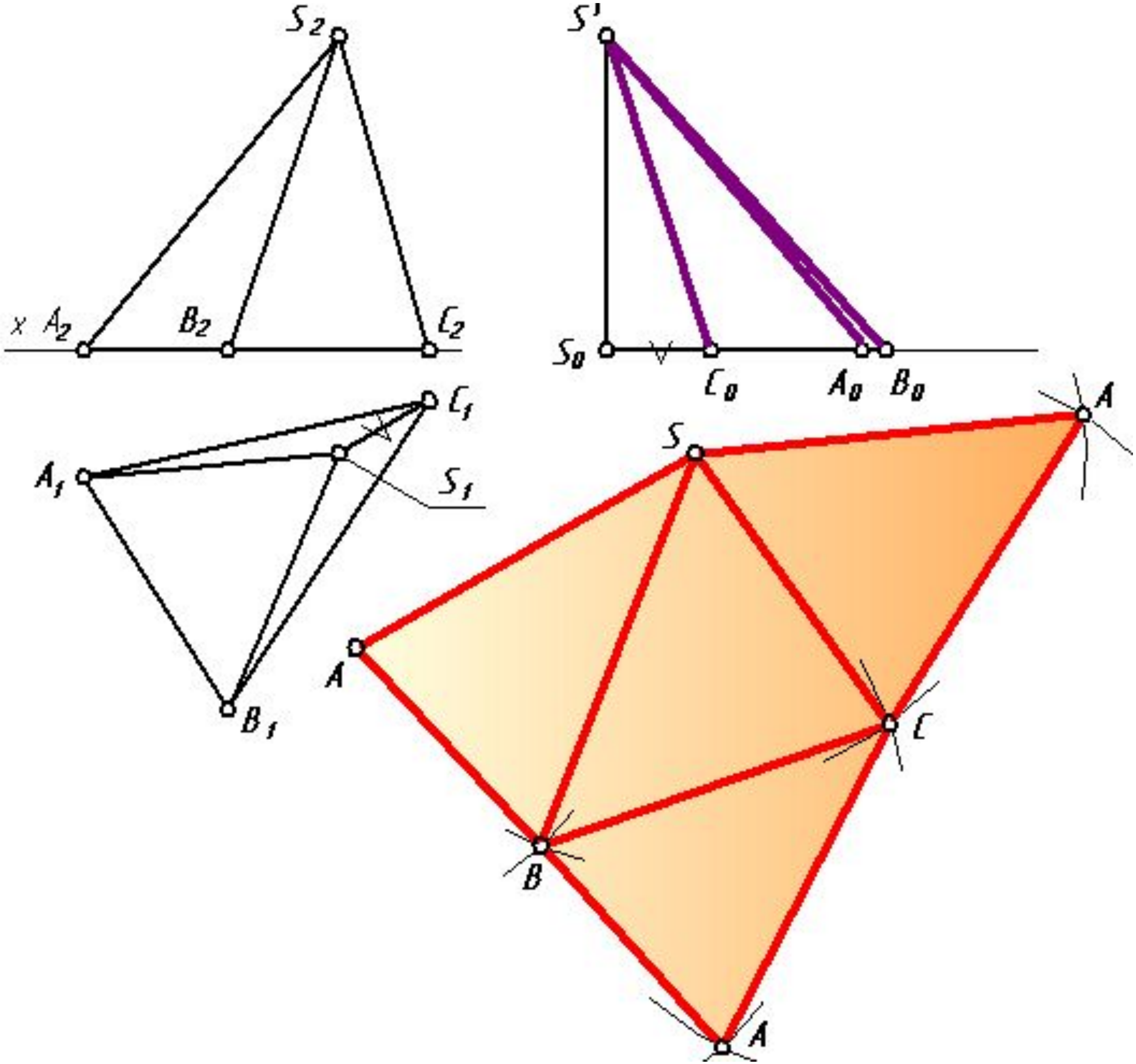


Данная развертка будет представлять собой плоскую фигуру, состоящую из четырех треугольников. Решение задачи сводится к определению истинных величин треугольников – граней пирамиды. Основание пирамиды располагается в горизонтальной плоскости проекций, поэтому горизонтальная проекция основания есть его истинная величина, т.е. $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$.

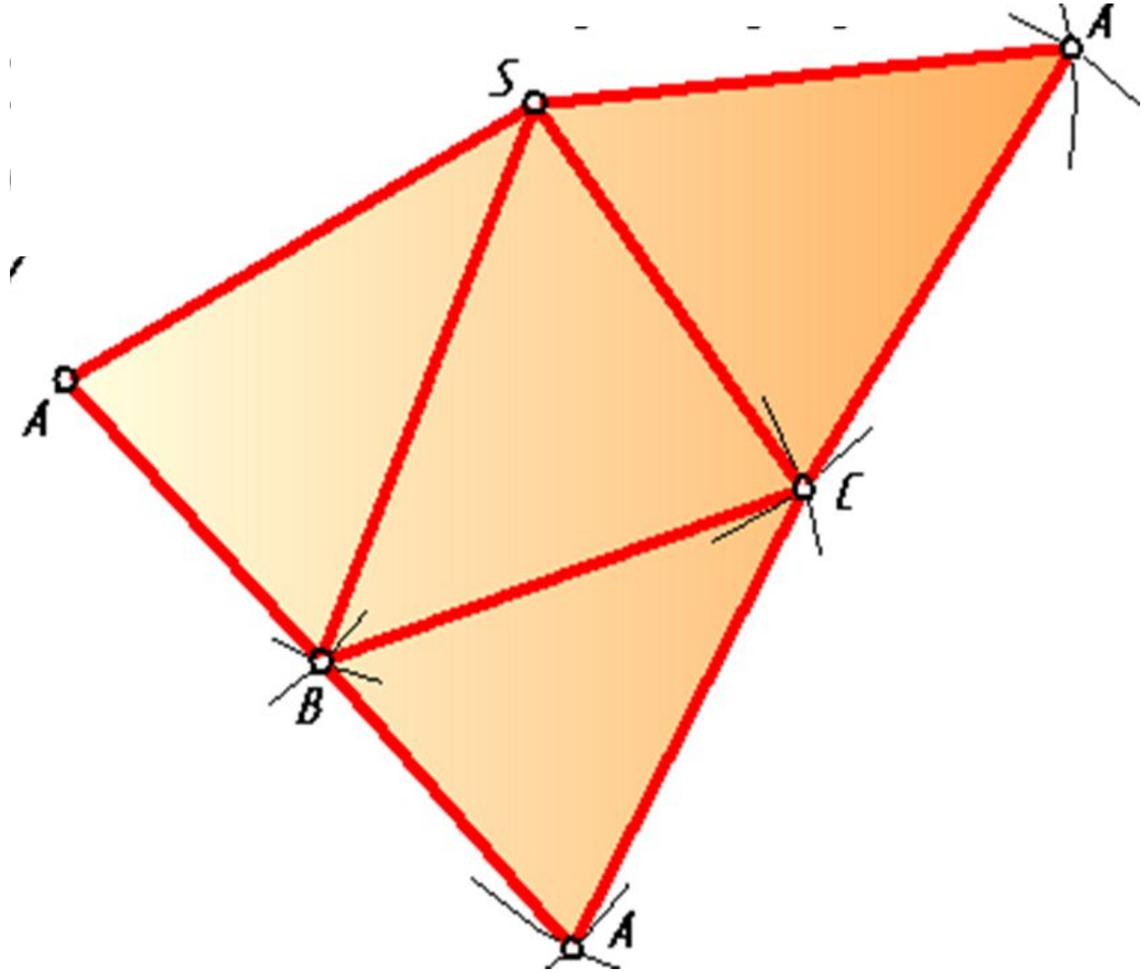




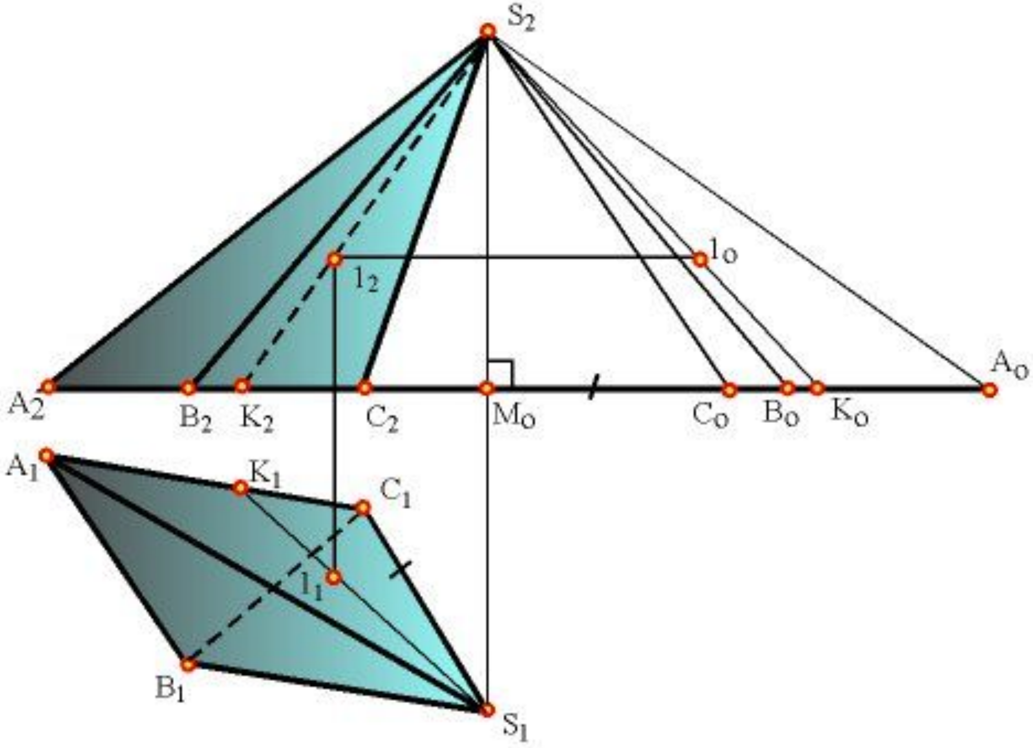
Для определения истинных величин боковых ребер воспользуемся способом прямоугольного треугольника. Так как разности высот вершины S и концов ребер A, B, и C равны, то построим прямоугольные треугольники с общим катетом $S'S_0$ (разность высот). В качестве вторых катетов будем последовательно откладывать горизонтальные проекции отрезков $S_1 A_1 = S_0 A_0$, $S_0 B_0 = S_1 B_1$, $S_0 C_0 = S_1 C_1$. Полученные точки A_0, B_0, C_0 соединим с S' и получим истинные величины боковых ребер. Такие построения называют диаграммой истинных величин ребер.

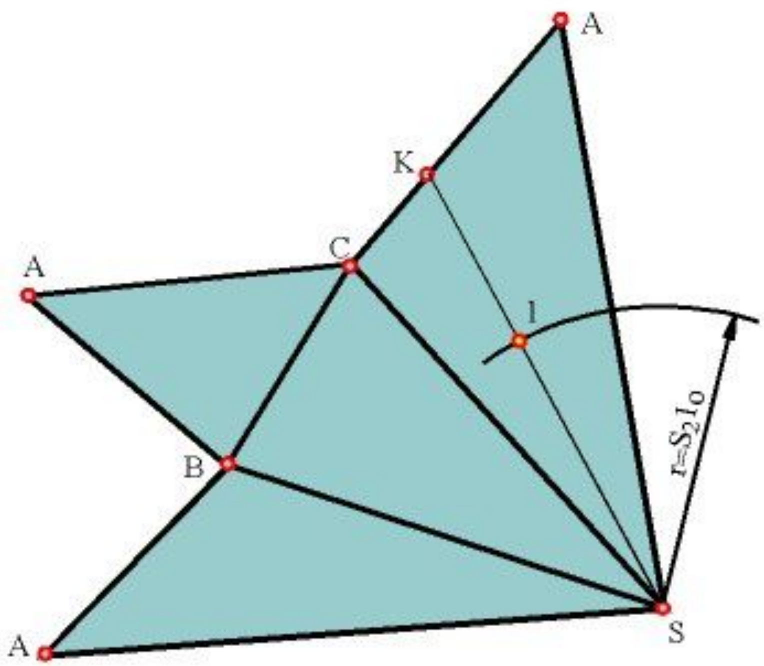

S_2
x
A_2
B_2
C_2
S'
S_0
C_0
A_0
B_0
C_1
A_1
S_1
B_1
S
A
A
C
B
A

Для построения развертки на свободном месте чертежа проведем линию S A= S'A$_0$, и последовательно построим все грани пирамиды.
При этом используем метод построения треугольников по трем сторонам.

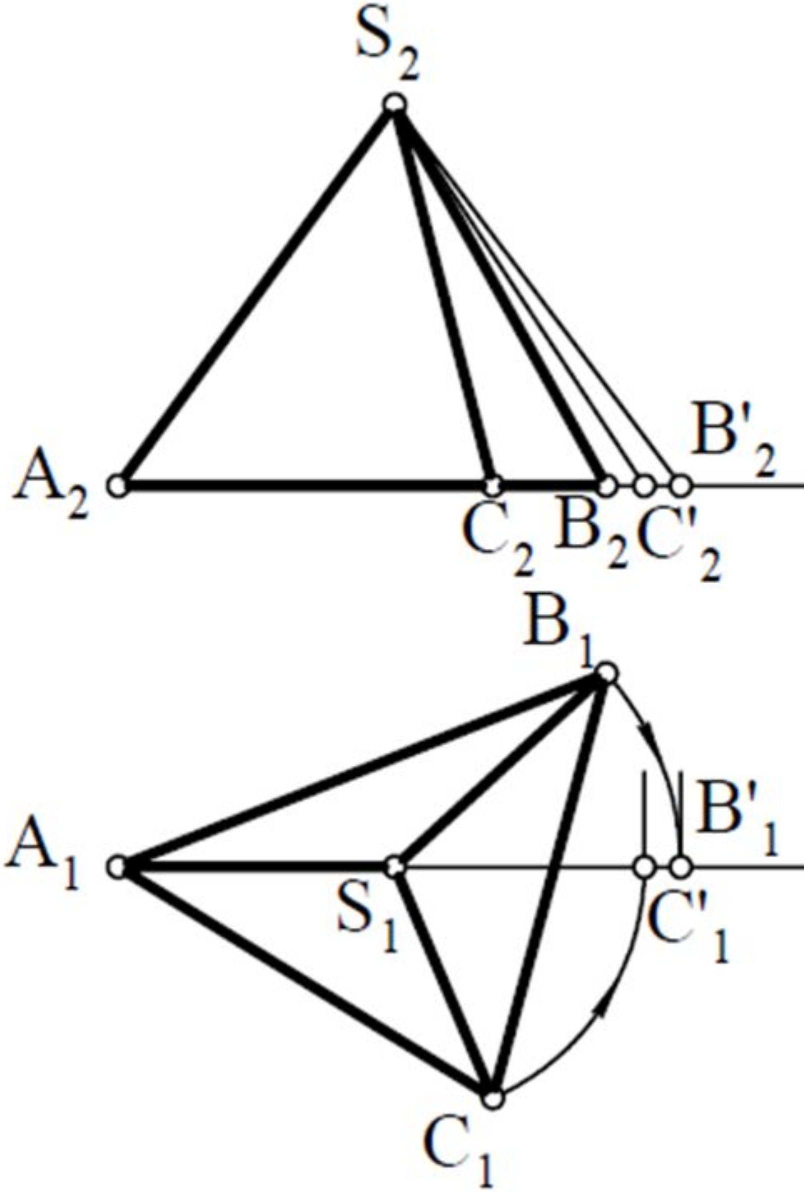


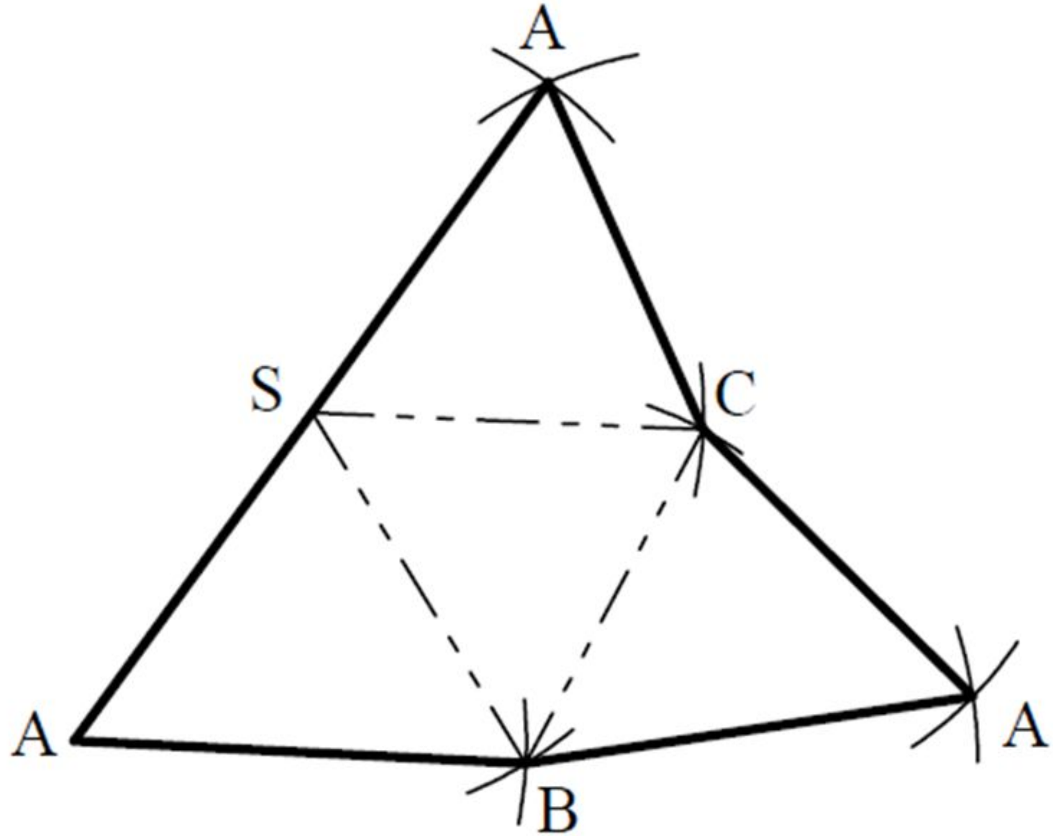
Иная последовательность построения точек на развертке. Алгоритм нахождения на развертке точки принадлежащей поверхности пирамиды.





Истинная величина ребер определяется вращением вокруг проецирующей оси

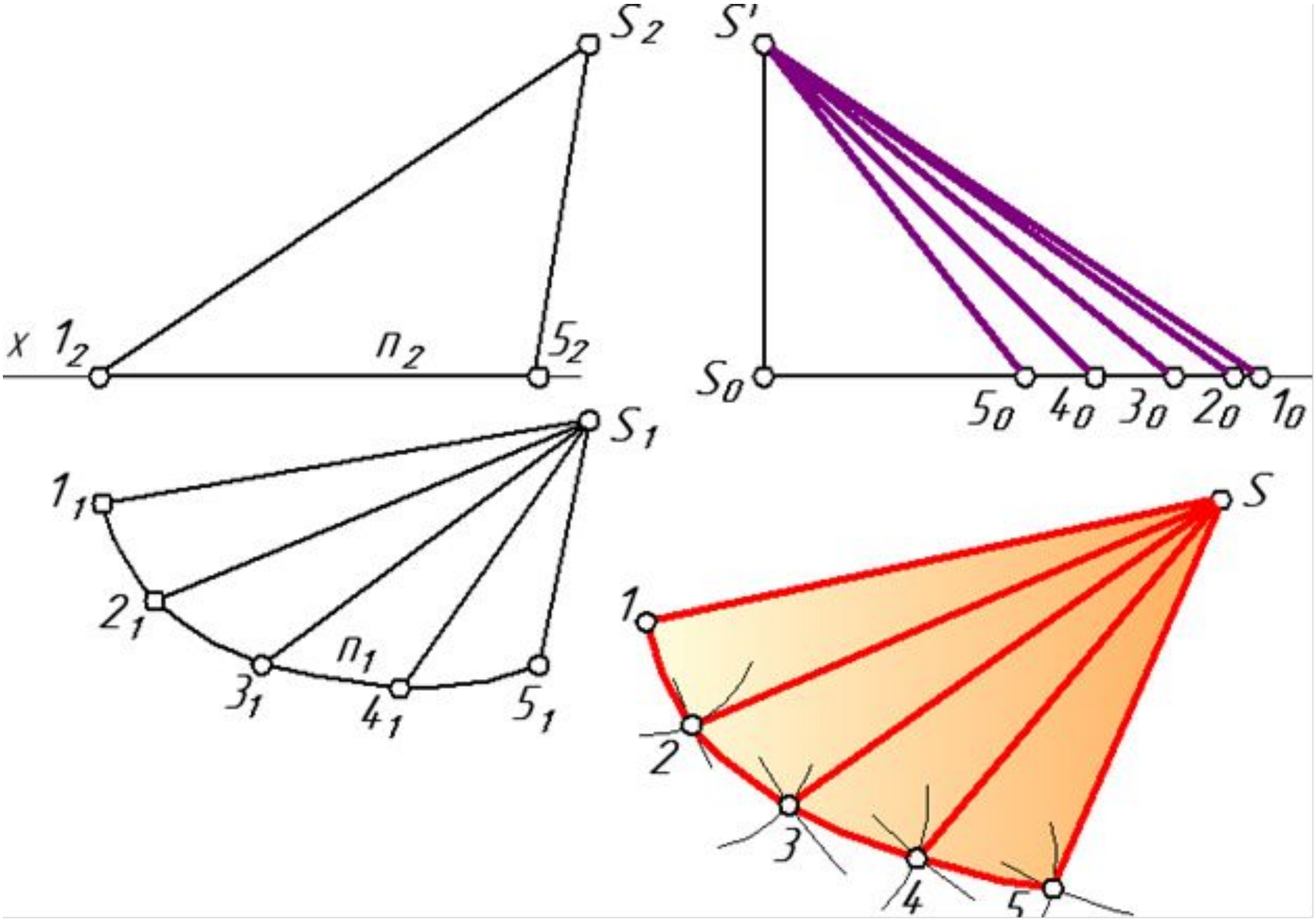




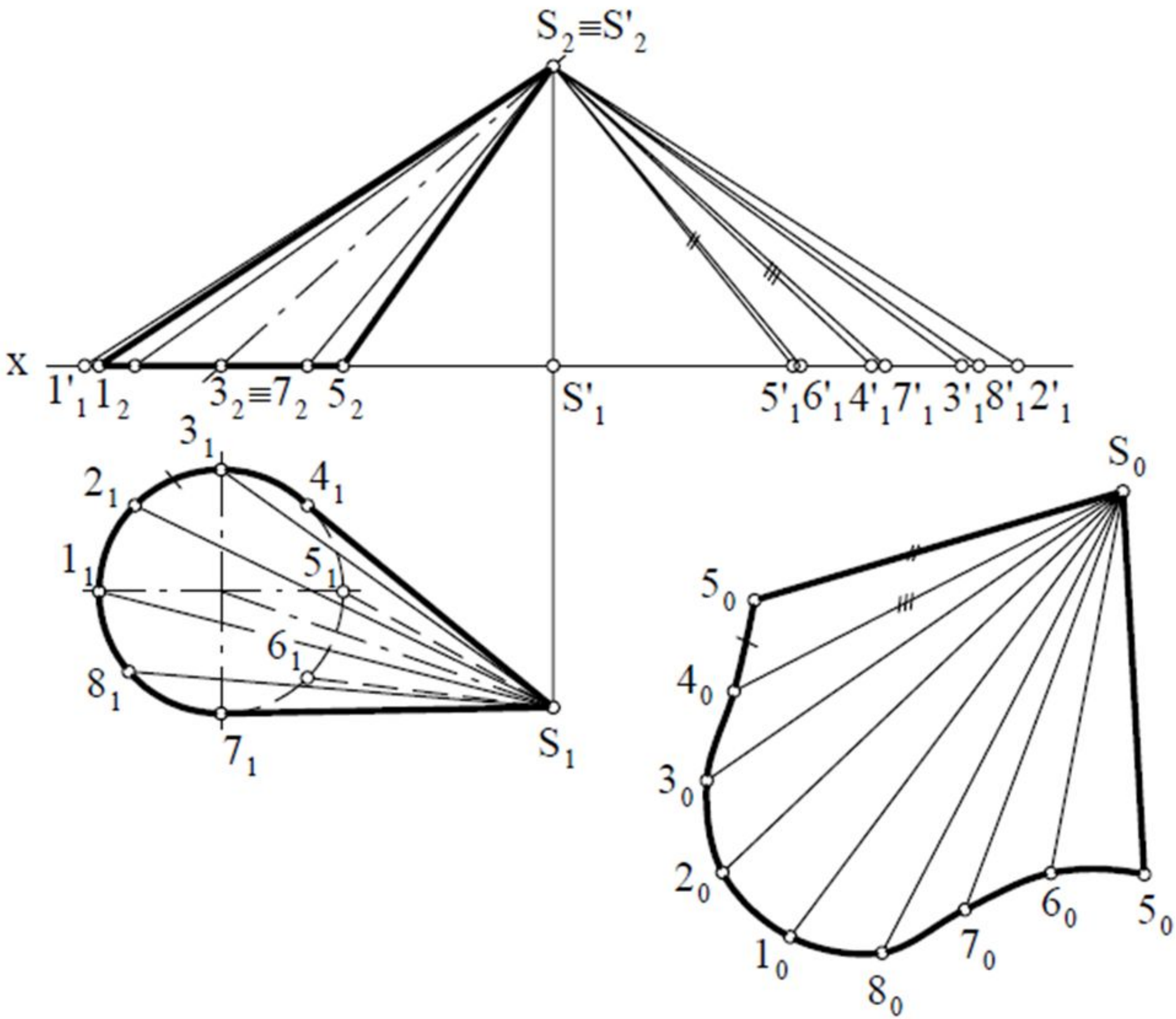
Для построения развертки конической поверхности применяем метод аппроксимации, *т. е. вписываем в эту поверхность или описываем вокруг нее пирамидальную поверхность, причем, чем больше граней, тем точнее получится приближенная развертка.*

Пример: *Построить **приближенную развертку конической поверхности**, заданную направляющей n и вершиной S*

На направляющей возьмем ряд точек и заменим коническую поверхность пирамидальной. Так как направляющая находится в горизонтальной плоскости проекций, горизонтальная проекция n_1 = n (истинная величина), а следовательно дуги $1_1 2_1$ = 12, $2_1 3_1$ = 23, $3_1 4_1$ = 34, $4_1 5_1$ = 45.
Как и в первом случае остается определить истинную величину боковых ребер (образующих).
Подобно предыдущему примеру изобразим диаграмму истинных величин ребер и построим развертку, при этом точки 1, 2, 3, 4 и 5 соединим плавной кривой

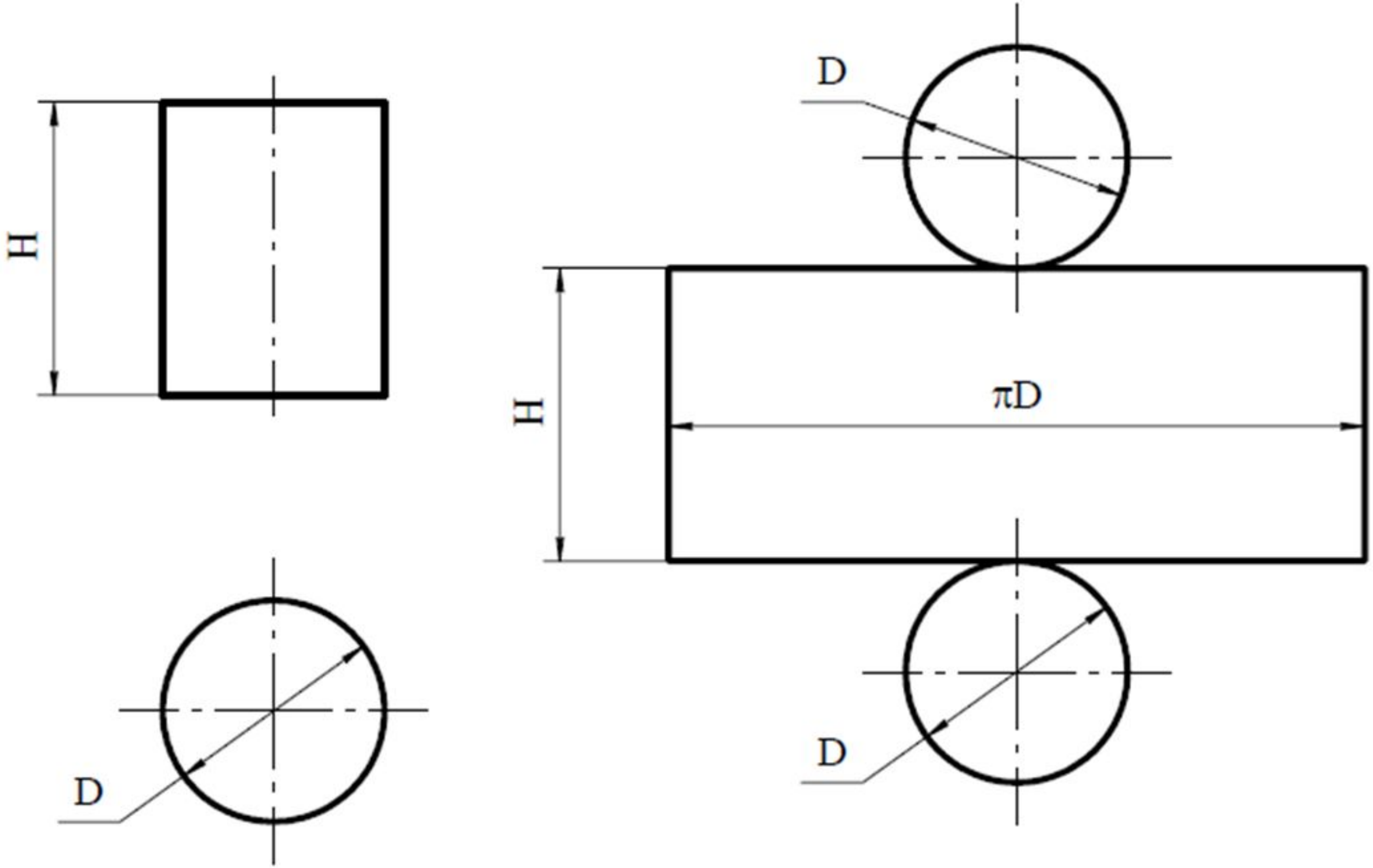


S_2
S'
x
1_2
n_2
5_2
S_0
5_0
4_0
3_0
2_0
1_0
S_1
1_1
2_1
n_1
3_1
4_1
5_1
S
1
2
3
4
5



$S_2 \equiv S'_2$
x
$1'_1$ 1_2 $3_2 \equiv 7_2$ 5_2
S'_1
$5'_1$ $6'_1$ $4'_1$ $7'_1$ $3'_1$ $8'_1$ $2'_1$
3_1 2_1 4_1 1_1 5_1 6_1 8_1 7_1 S_1
S_0 5_0 4_0 3_0 2_0 1_0 8_0 7_0 6_0 5_0

Разверткой поверхности цилиндра вращения является прямоугольник, у которого одна сторона равна длине окружности πD, а другая длине образующей.



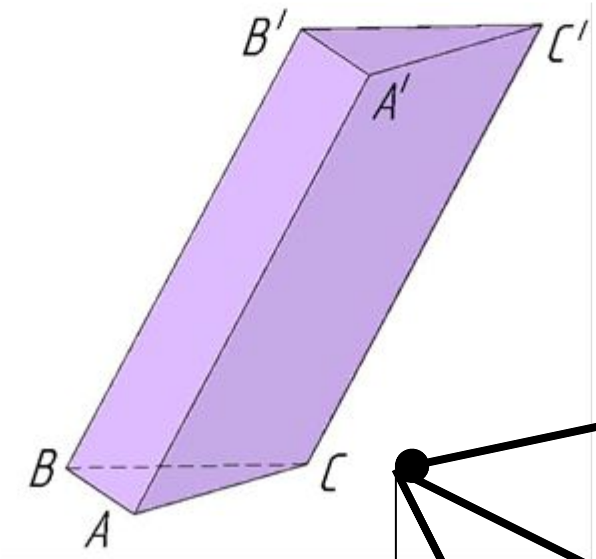
СПОСОБ НОРМАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

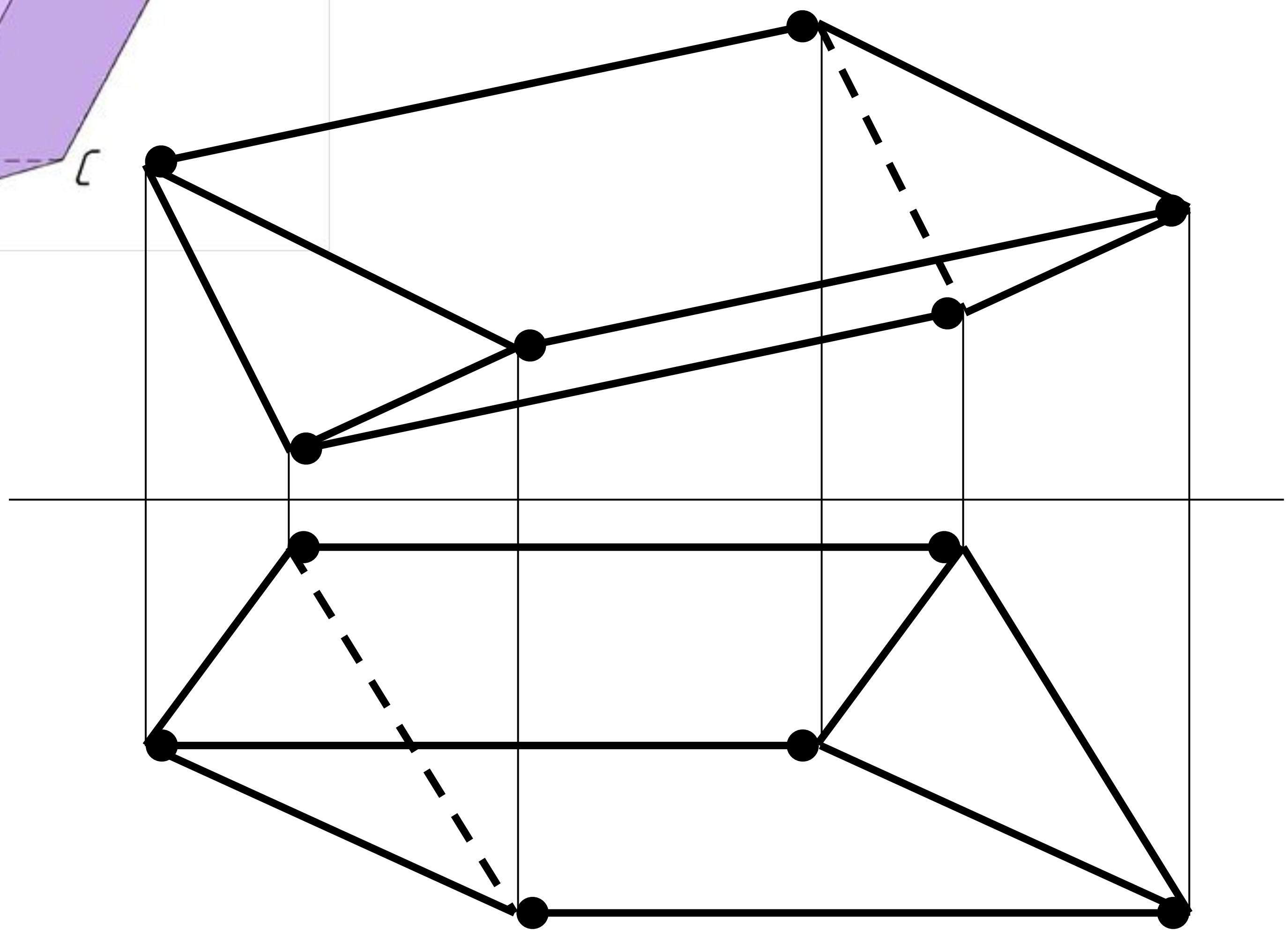
Для цилиндрических и призматических поверхностей, если образующие этих поверхностей - линии уровня

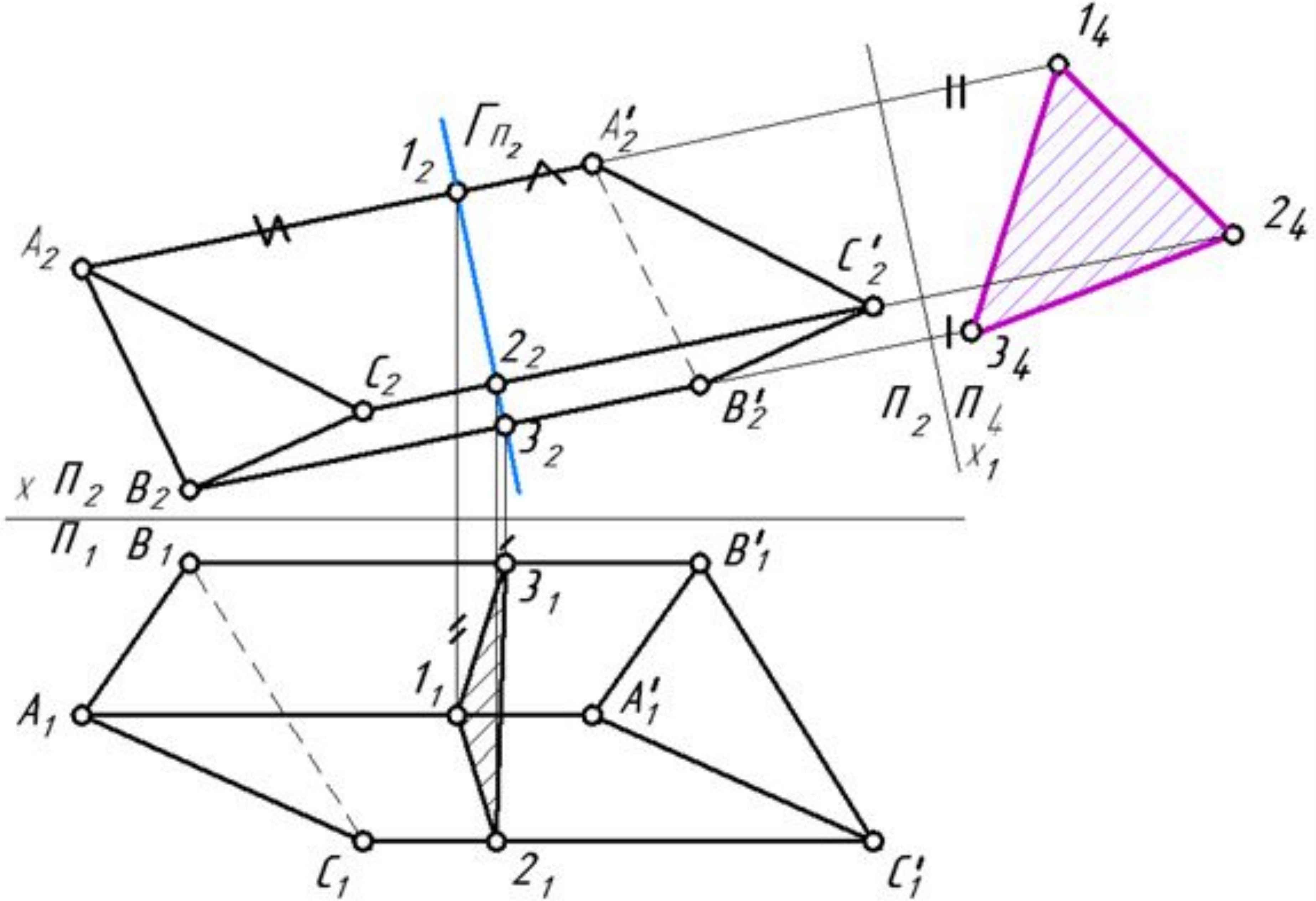
***Сущность данного способа* заключается в том, что поверхность пересекают плоскостью, перпендикулярной образующим, определяют методом замены плоскостей истинную величину нормального сечения, а затем разворачивают его в прямую линию и строят развертку.**

Пример: ***Построить развертку призмы ABCA'B'C'***

Образующие призмы - фронтали.
Призму пересекаем плоскостью $Г(Г_2)$, перпендикулярной ребрам AA', BB', CC'
Определяем методом замены плоскостей проекций (вводим новую плоскость $П_4$ параллельно плоскости Г) истинную величину нормального сечения 123 ($1_4\ 2_4\ 3_4$).

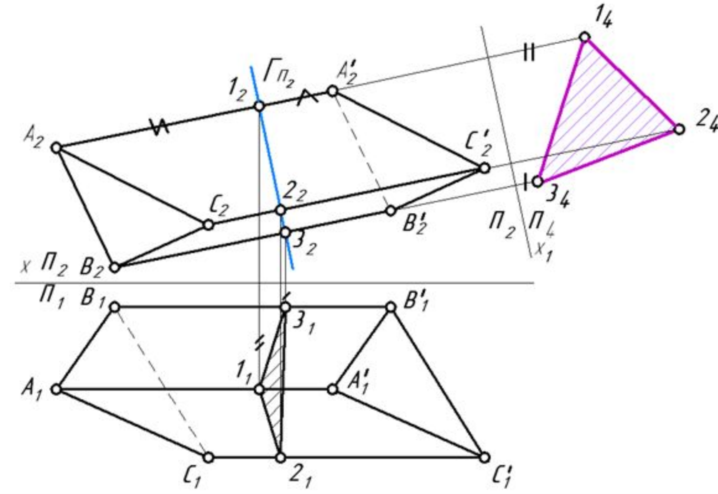

B'
C'
A'
B
C
A

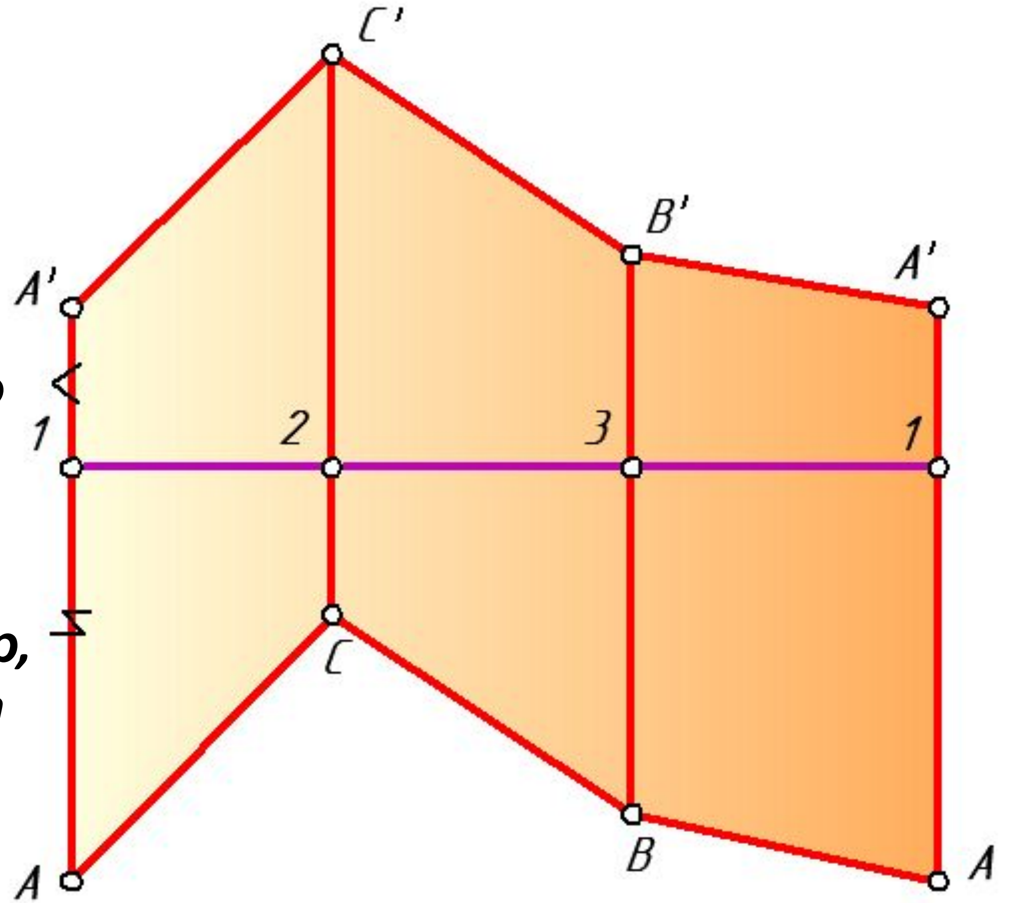




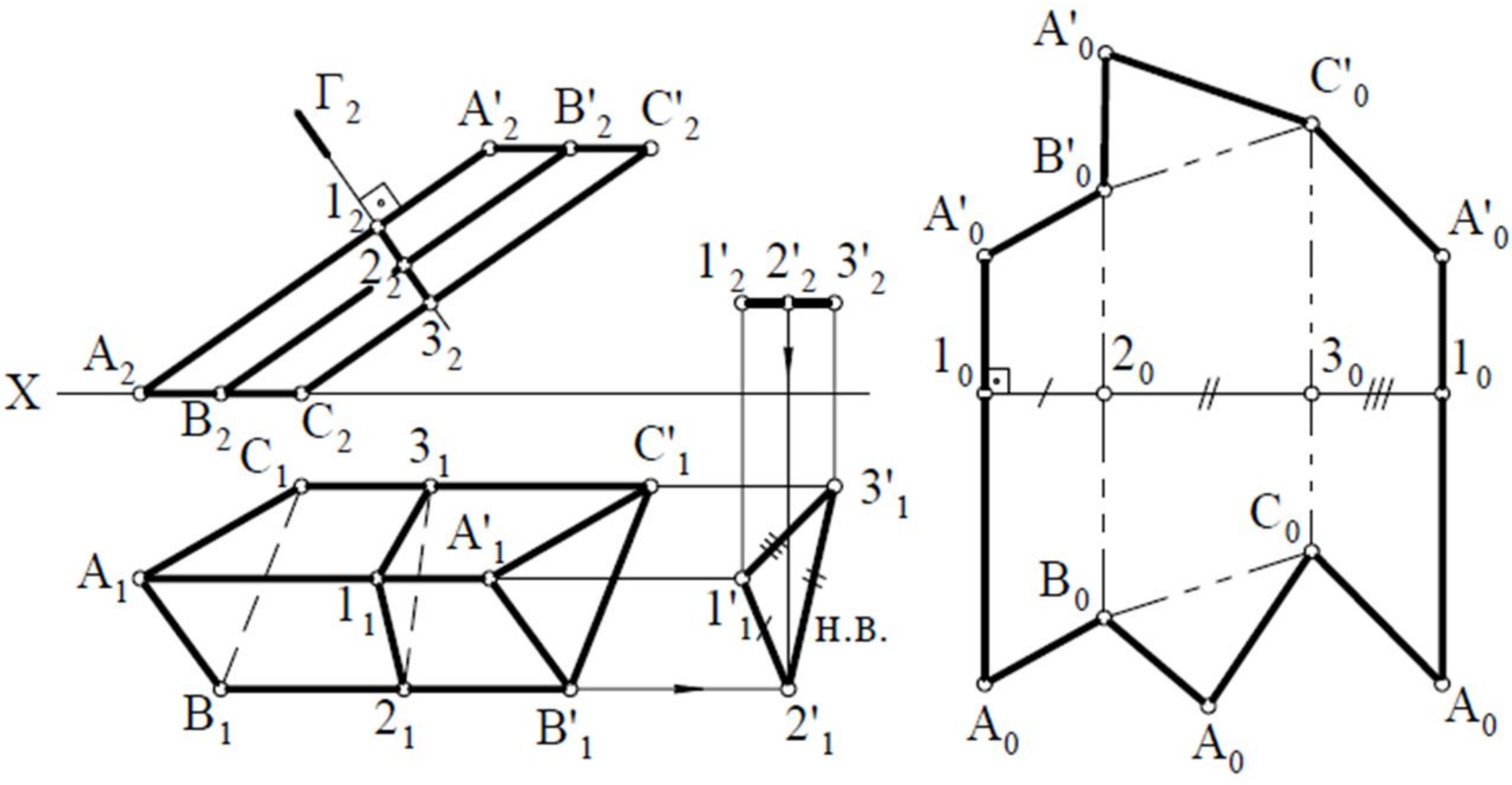
1_4
2_4
3_4
A_2'
Γ_{Π_2}
1_2
A_2
C_2'
2_2
C_2
B_2'
3_2
Π_2
Π_4
x_1
x
Π_2
B_2
Π_1
B_1
B_1'
3_1
1_1
A_1
A_1'
C_1
2_1
C_1'

На свободном поле чертежа проводим горизонтальную прямую и последовательно откладываем на ней отрезки $12=1_4\,2_4$, $23=2_4\,3_4$, $31=3_4 1_4$.
Из точек 1,2 и 3 строим перпендикулярные линии 1-1 прямые.
На вертикальных прямых вверх и вниз от точек 1,2,3 откладываем участки фронтальных проекций боковых ребер, учитывая, что боковые ребра фронтали (фронтальные проекции – истинные величины).
Например: вверх участки ребер, которые находятся справа от сечения, а вниз – слева от сечения.





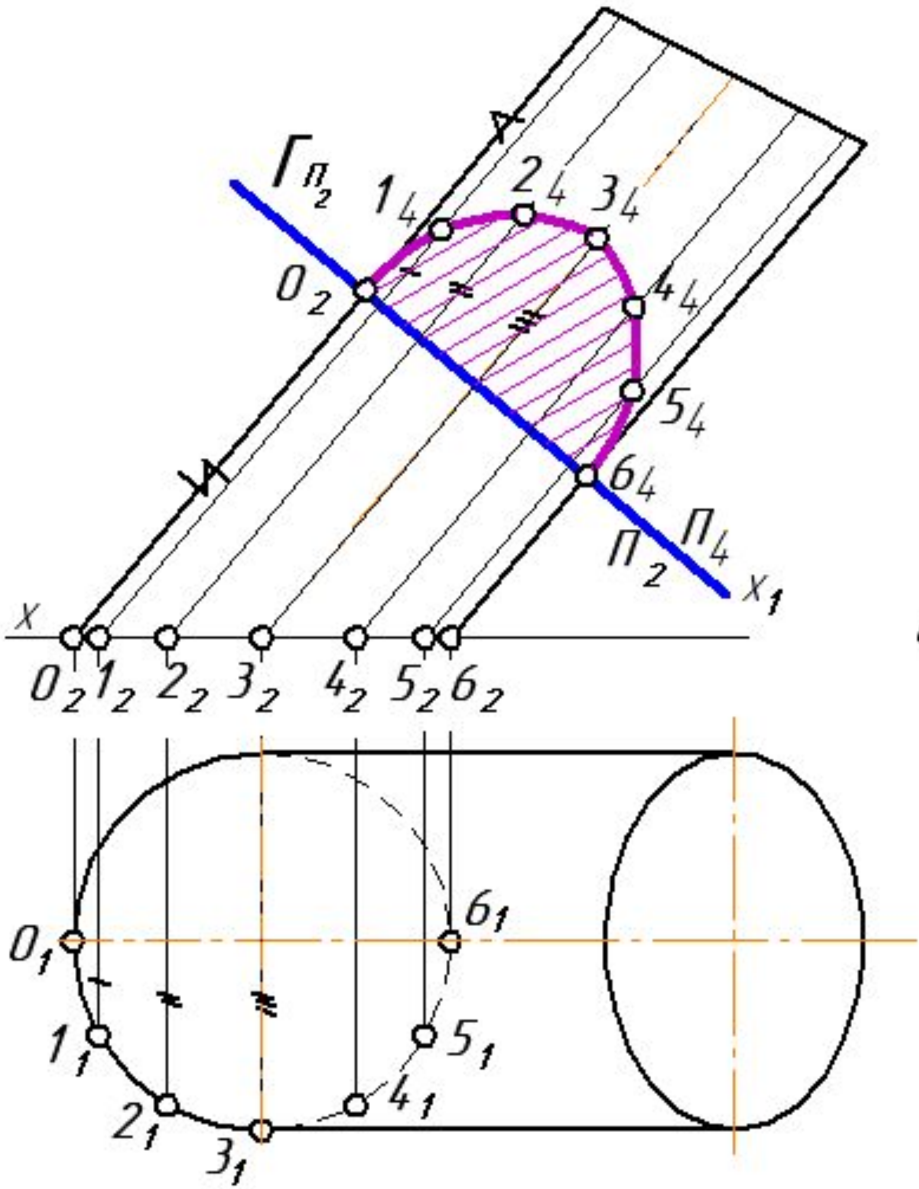
Построение развертки поверхности трехгранной наклонной призмы способом нормального сечения.



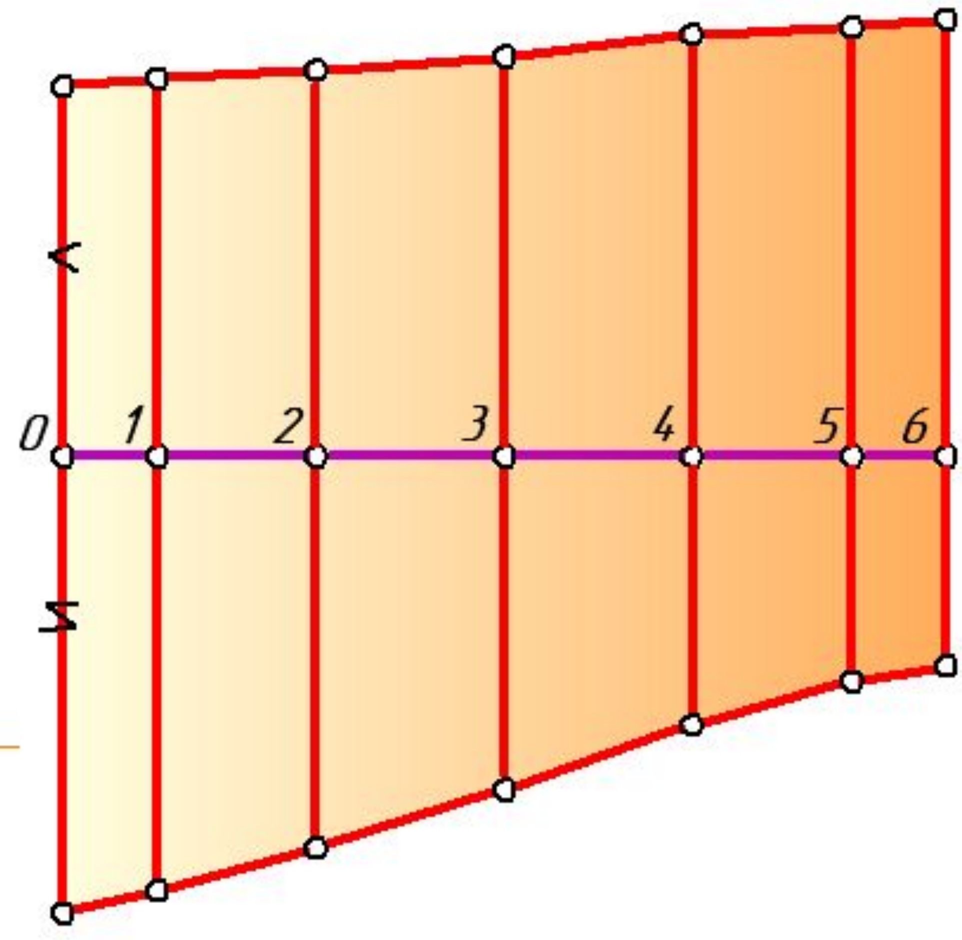
Пример: ***Построить развертку цилиндрической поверхности***

Применяя метод аппроксимации, заменим цилиндрическую поверхность призматической. ***Так как поверхность симметрична относительно плоскости параллельной $П_2$, то достаточно построить половину развертки и затем ее зеркально отобразить. В основании поверхности лежит окружность, поделим половину окружности на 6 равных частей и впишем призму, построим фронтальные проекции образующих, проходящих через точки 1-6. Пересечем призму плоскостью Г перпендикулярной образующим (фронтали), затем методом замены плоскостей проекций определим истинную величину сечения $1_4 – 6_4$.***

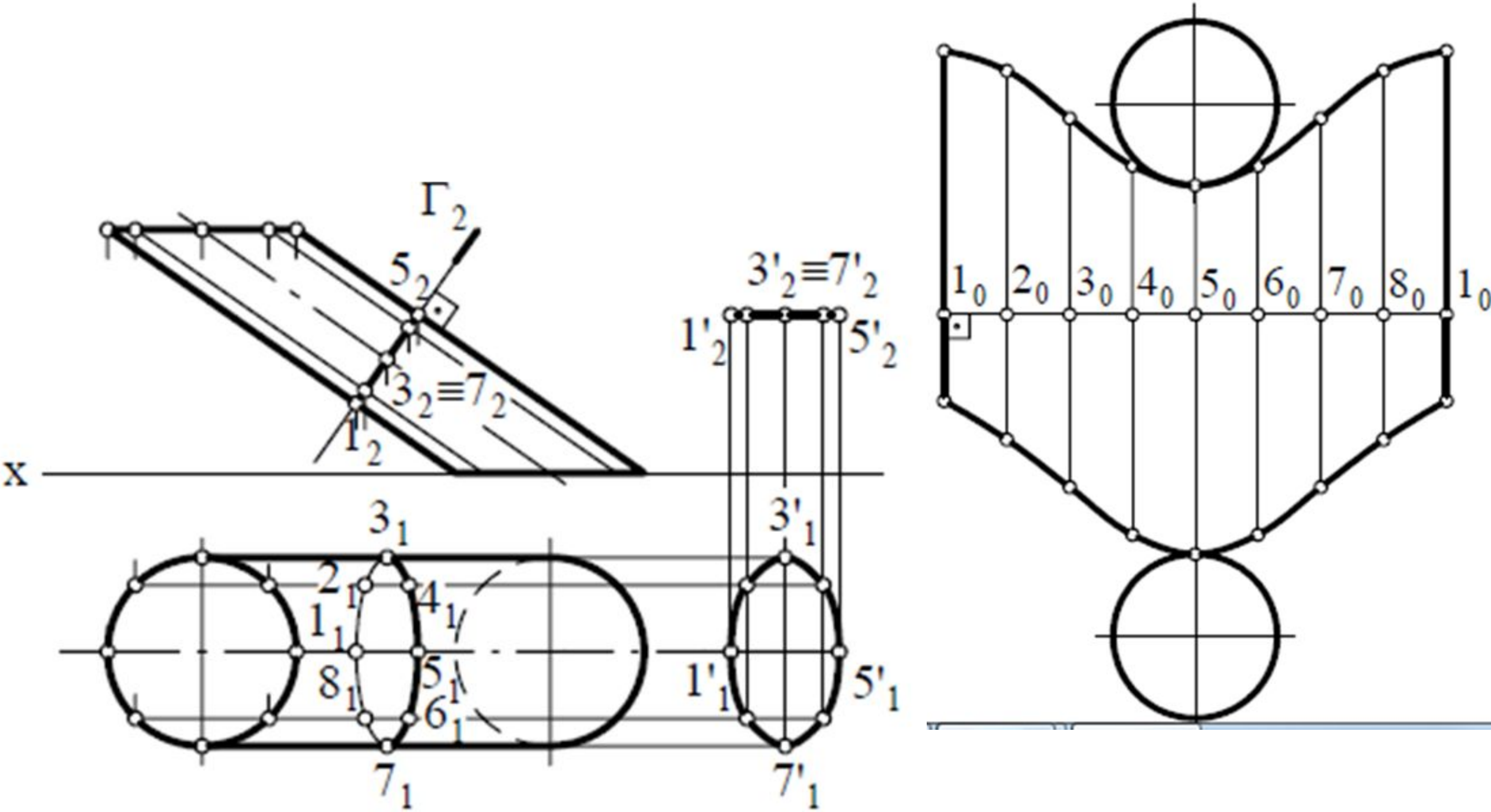
На свободном поле чертежа строим развертку аналогично предыдущему примеру. Отличием в построении будет то, что полученные точки соединяем плавной кривой.
Чтобы получить полную развертку, необходимо зеркально отобразить ее относительно шестой образующей.



Γ
П2
14
24
34
02
44
54
64
П4
П2
x1
x
02
12
22
32
42
52
62
01
11
21
31
41
51
61



0
1
2
3
4
5
6



Γ2
5 2
3 2≡7 2
1 2
x
3'2≡7'2
1'2
5'2
3 1
2 1
4 1
1 1
8 1
5 1
6 1
7 1
3'1
1'1
5'1
7'1
1 0
2 0
3 0
4 0
5 0
6 0
7 0
8 0
1 0

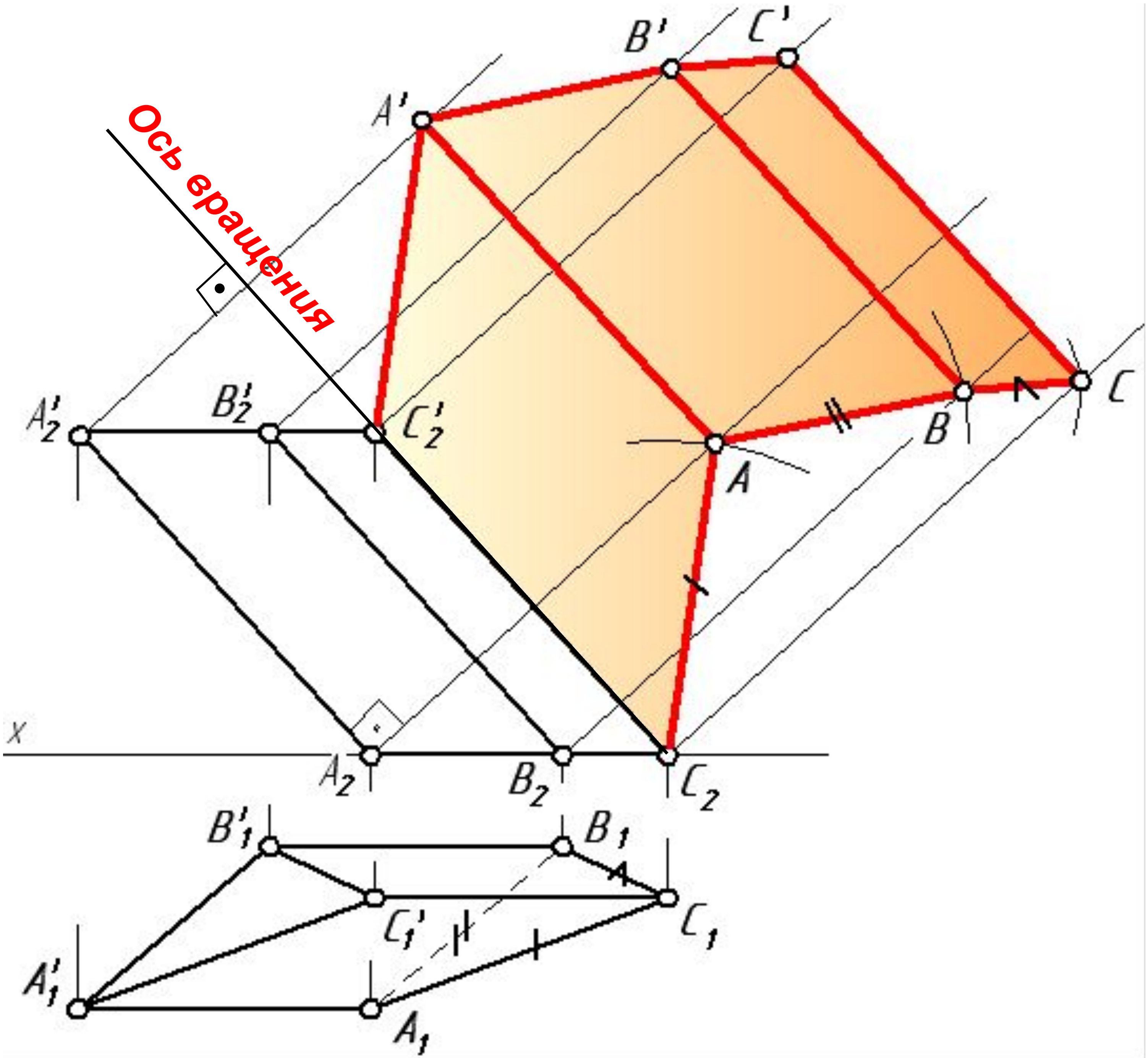
СПОСОБ РАСКАТКИ

Способ раскатки применяется для построения разверток цилиндрических и призматических поверхностей, если образующими и направляющими этих поверхностей являются линии уровня.
Сущность данного способа заключается в том, что поверхность вращением каждой следующей образующей вокруг предыдущей совмещается с одной из плоскостей или раскатывается в плоскую фигуру.

Пример: ***Построить развертку призмы ABCA'B'C'. Образующие призмы - фронтали, а направляющая - горизонталь.***

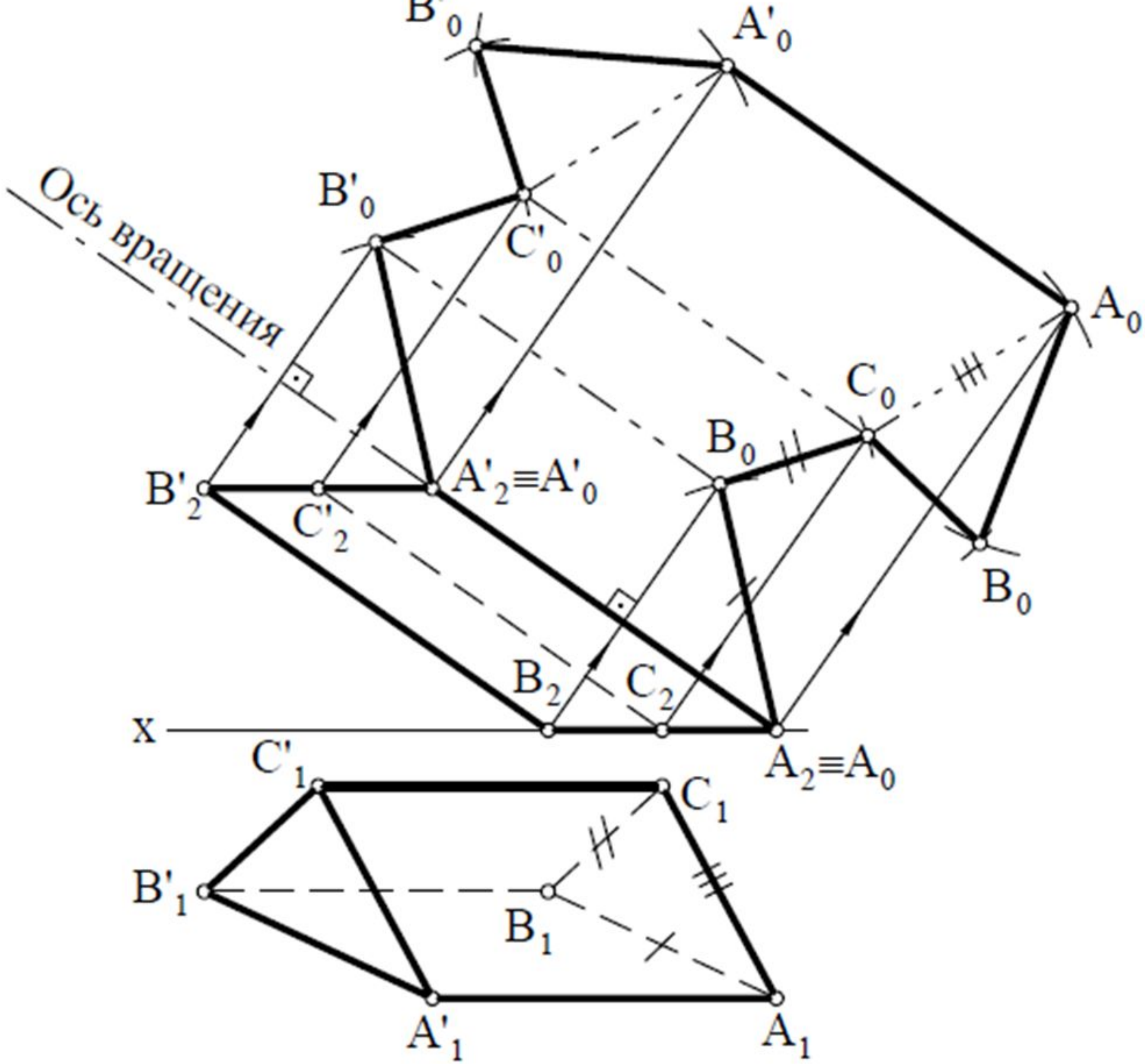
Следовательно фронтальные проекции боковых ребер A_2A_2', B_2B_2' и C_2C_2' равны соответственно AA', BB' и CC', а горизонтальные проекции ребер, образующих основание A_1 B_1, B_1 C_1, и C_1 A_1 равны соответственно AB, BC и C A.
Примем за первую ось вращения ребро CC' (C_2C_2') и вращением вокруг него совместим грань CC'AA' с плоскостью параллельной $П_2$.

Для этого строим лучи из точек A_2, B_2, C_2 перпендикулярно фронтальным проекциям A_2A_2', B_2B_2' и C_2C_2'.
Из точки C_2, как из центра проводим дугу окружности, радиусом равным C_1A_1 до пересечения с лучом, выходящим из точки A_2.
Соединим точки C_2 и A и строим прямую $C_2'A'$, параллельную C_2A.
Аналогично вращаем ребро BB' (B_2B_2') вокруг ребра AA' и ребро CC' (C_2C_2') вокруг ребра BB'. В результате получим боковую развертку поверхности призмы.



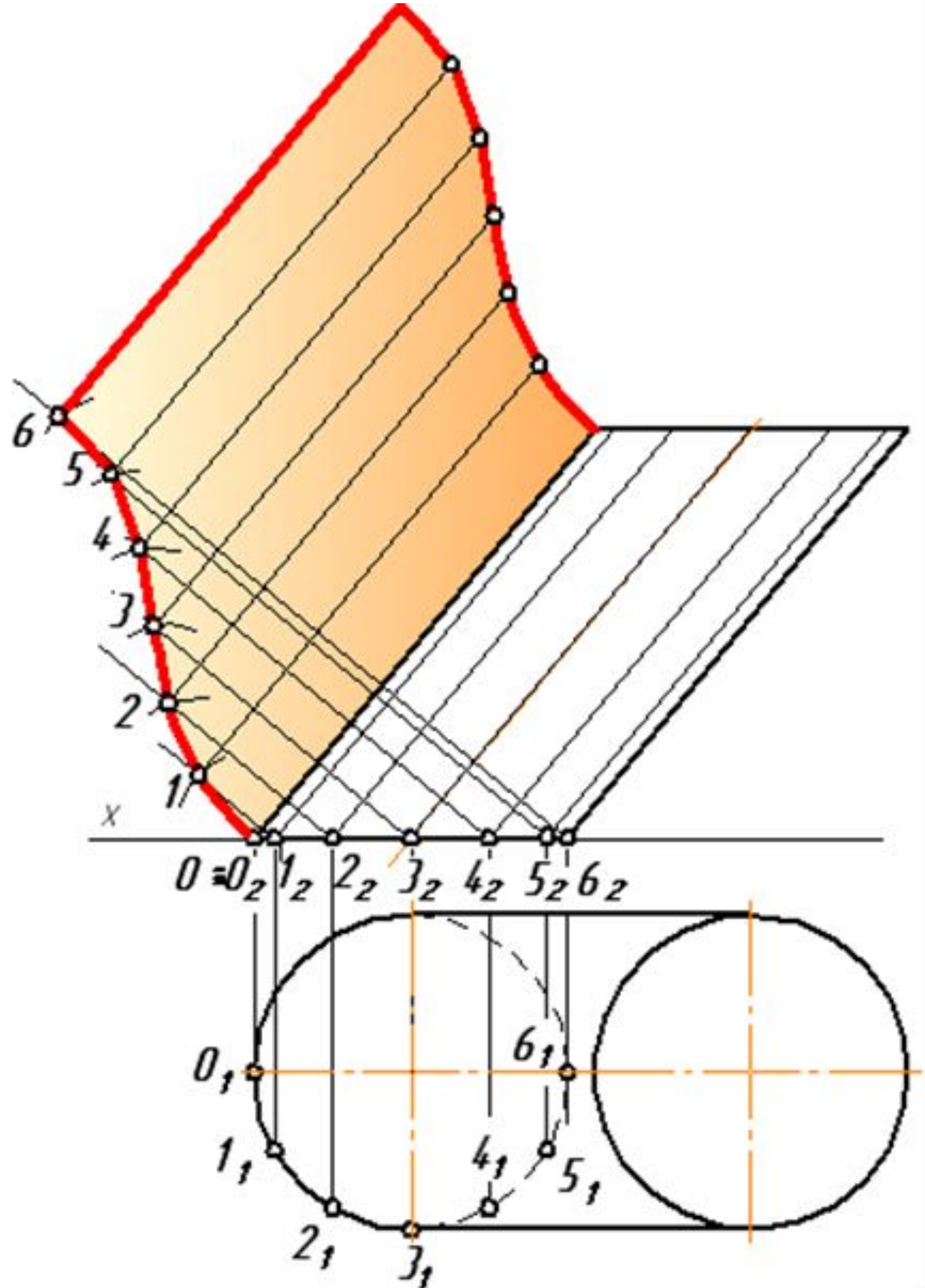
Ось вращения
A'
B'
C'
A'_2
B'_2
C'_2
A
B
C
x
A_2
B_2
C_2
B'_1
B_1
C'_1
C_1
A'_1
A_1

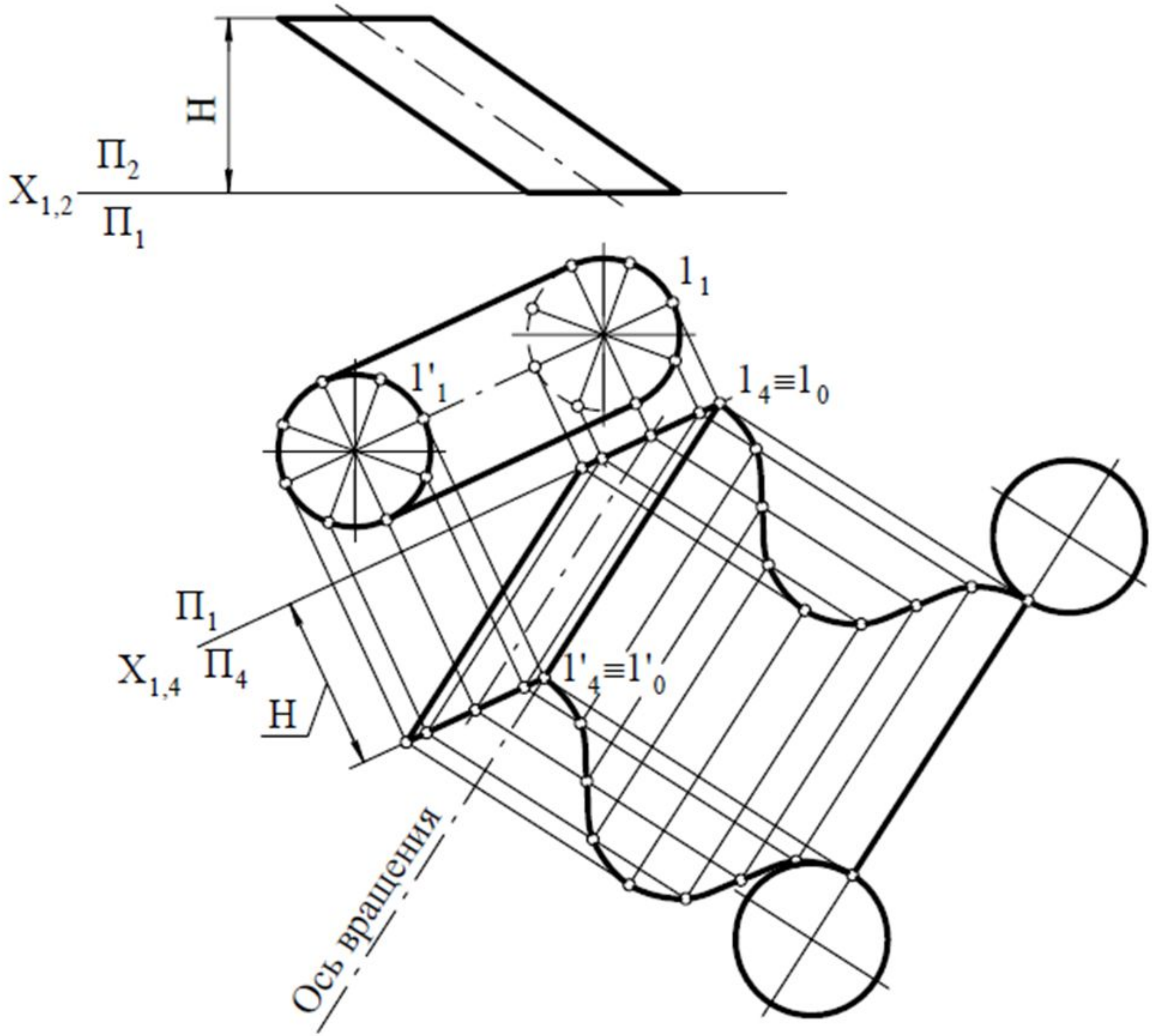
Построение развертки поверхности наклонной трехгранной призмы способом раскатки.



Пример: ***Построить развертку цилиндрической поверхности. Образующие поверхности - фронтали, а направляющая лежит в горизонтальной плоскости проекций.***

Применяя метод аппроксимации, заменим цилиндрическую поверхность призмой. Для этого основание (окружность) поделим на 12 равных частей. Так как поверхность симметрична относительно плоскости параллельной $П_2$, рассмотрим построение развертки половины поверхности. Примем за первую ось вращения ребро 00' ($0_2 0_2'$) и вращением вокруг него совместим грань 00'11' с плоскостью параллельной $П_2$. Все построения выполняем аналогично предыдущему примеру.


6
5
4
3
2
1
x
0 =0₂ 1₂ 2₂ 3₂ 4₂ 5₂ 6₂
0₁
6₁
1₁
4₁
5₁
2₁
3₁


H
Π_2
$X_{1,2}$
Π_1
1_1
$1'_1$
$1_4 \equiv 1_0$
Π_1
$X_{1,4}$
Π_4
$1'_4 \equiv 1'_0$
H
Ось вращения

Условные развертки

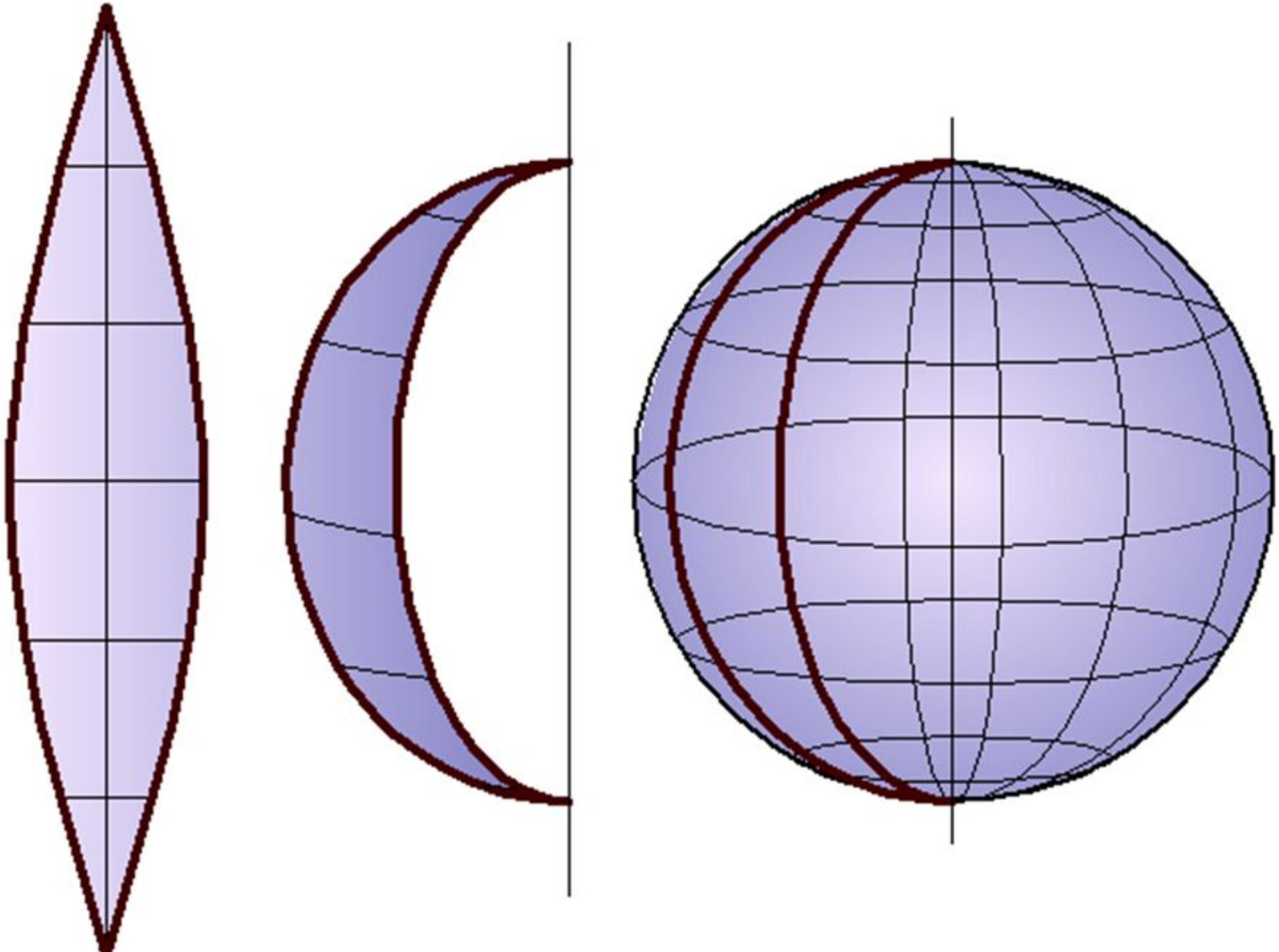
Строятся для не развертывающихся поверхностей. Сущность этого метода заключается в том, что поверхность мысленно пересекают плоскостями, проходящими через меридианы или параллели, и делят ее на ряд конических или цилиндрических поверхностей.

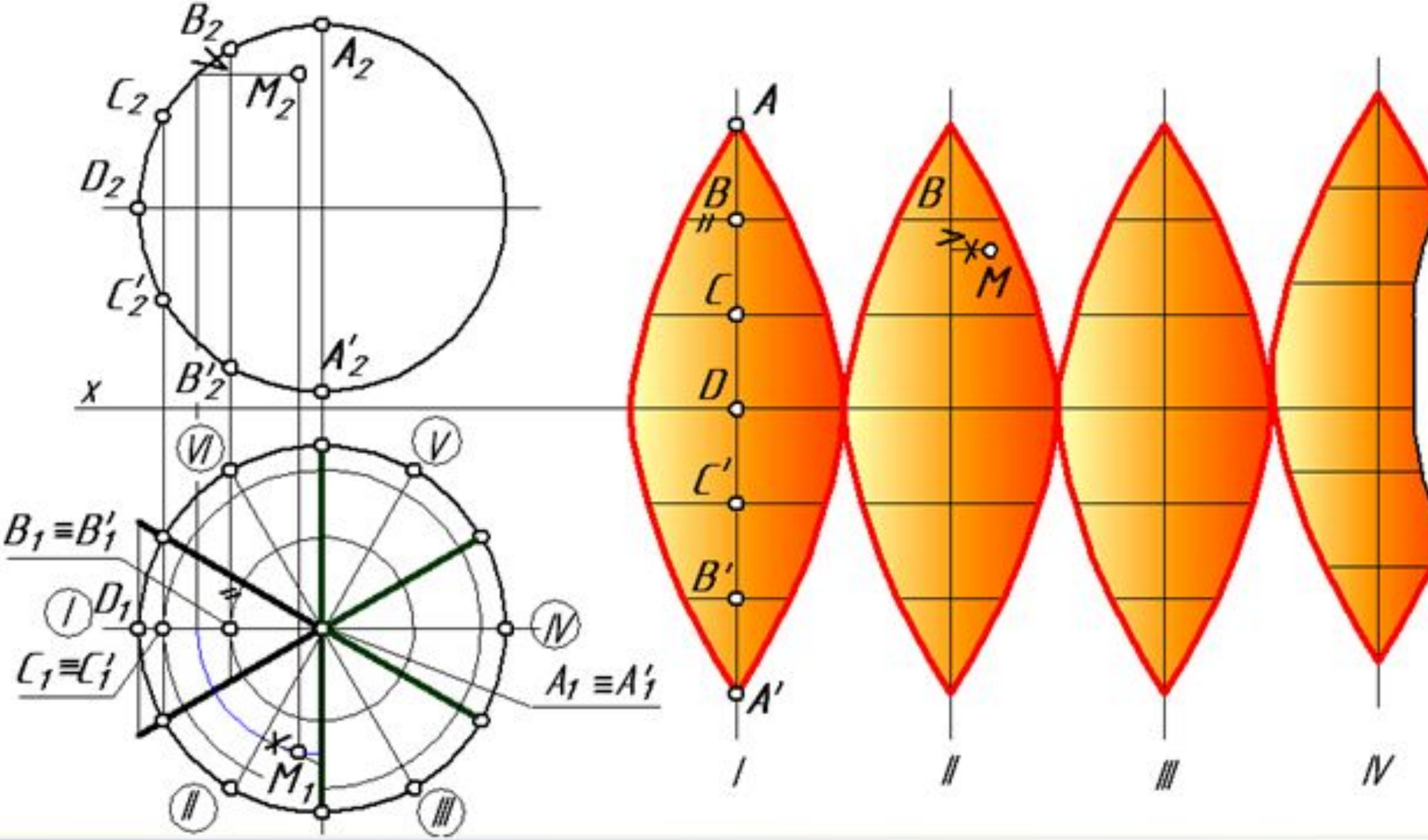
Пример:* *Построить развертку сферы

Разделим сферу с помощью меридианальных плоскостей на шесть равных секторов. Каждый сектор будем рассматривать как цилиндрическую поверхность, у которой образующая меняется от 0 до некоторого максимального значения и затем опять до 0. В качестве образующей принимают касательную, построенную к дуге параллели. В каждом секторе строим нулевой или средний меридиан. Для первого сектора это главный меридиан. Строим развертку методом нормального сечения. Поделим фронтальную проекцию главного меридиана на 6 равных частей и обозначим точки A_2, A_2', B_2, B_2', C_2, C_2' ***и*** D_2. ***На свободном поле чертежа проведем горизонтальную прямую и выберем на ней произвольную точку*** D. ***Через точку*** D_2 ***построим перпендикуляр к прямой и на этом перпендикуляре вверх и вниз отложим хорды*** $DC = D_2C_2$, $DC' = D_2C'_2$, $CB = C_2B_2$, $C'B' = C'_2B'_2$, $BA = B_2A_2$ ***и*** $B'A' = B'_2A'_2$ ***(нормальное сечение).***

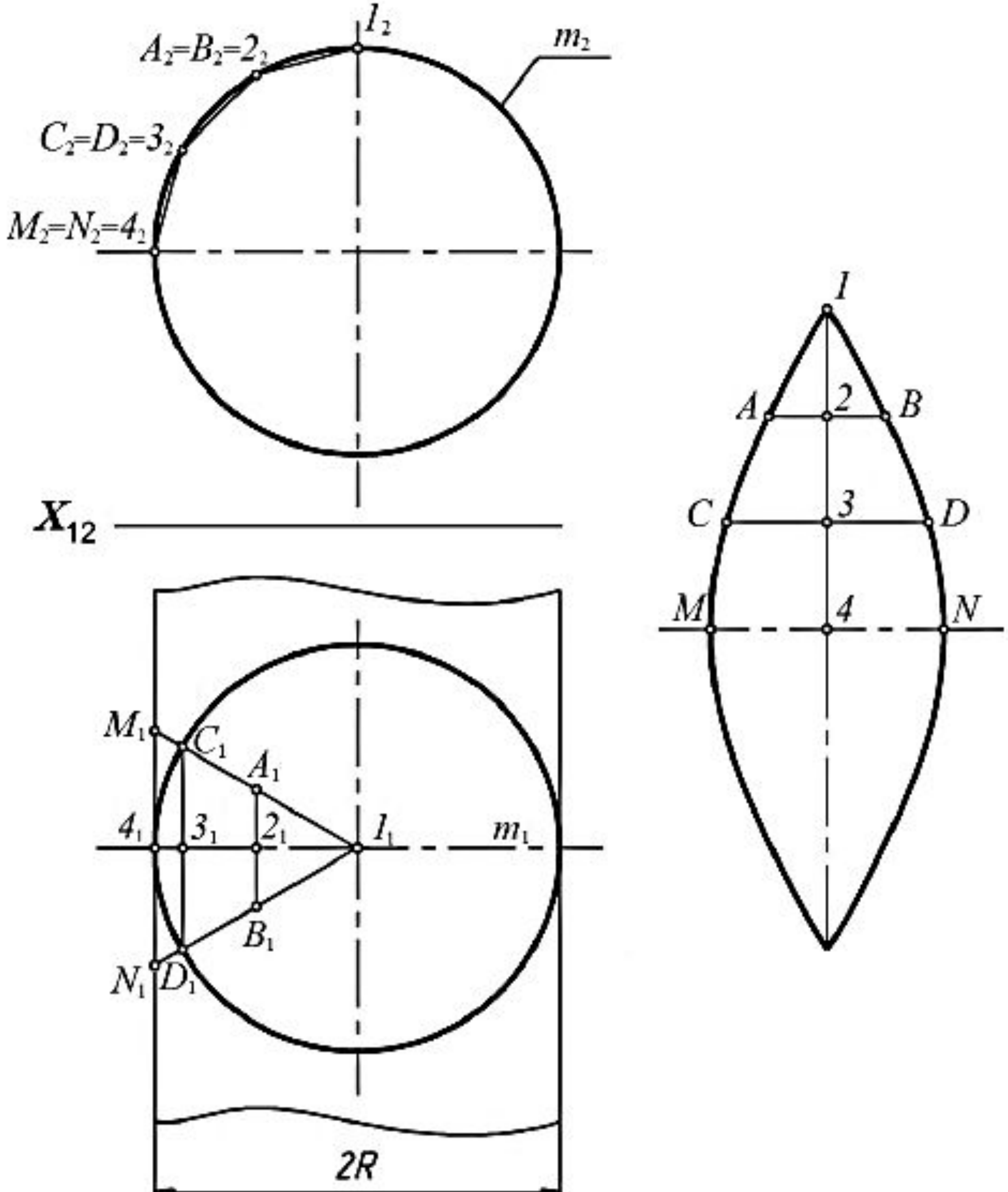
Через полученные точки А, А', В, В', С, С' и D проведем горизонтальные прямые и вправо и влево будем откладывать отрезки полукасательных, построенных в точках B_1, B'_1, C_1, C'_1 и D_1 к горизонтальным проекциям параллелей. Длины отрезков определены граничными меридианами первого сектора. Концы отрезков соединим плавной кривой, и получим развертку первого сектора. Так как мы делили поверхность на шесть равных частей, то остальные сектора будут иметь аналогичные развертки.

Для того чтобы определить на развертке положение точки М, принадлежащей поверхности, прежде всего необходимо найти с помощью параллели горизонтальную проекцию точки М (M_1). Горизонтальная проекция точки укажет, в каком секторе поверхности будет находиться точка. На рис. точка М находится во втором секторе. На развертке положение точки определяют с помощью двух координат по меридиану и параллели.

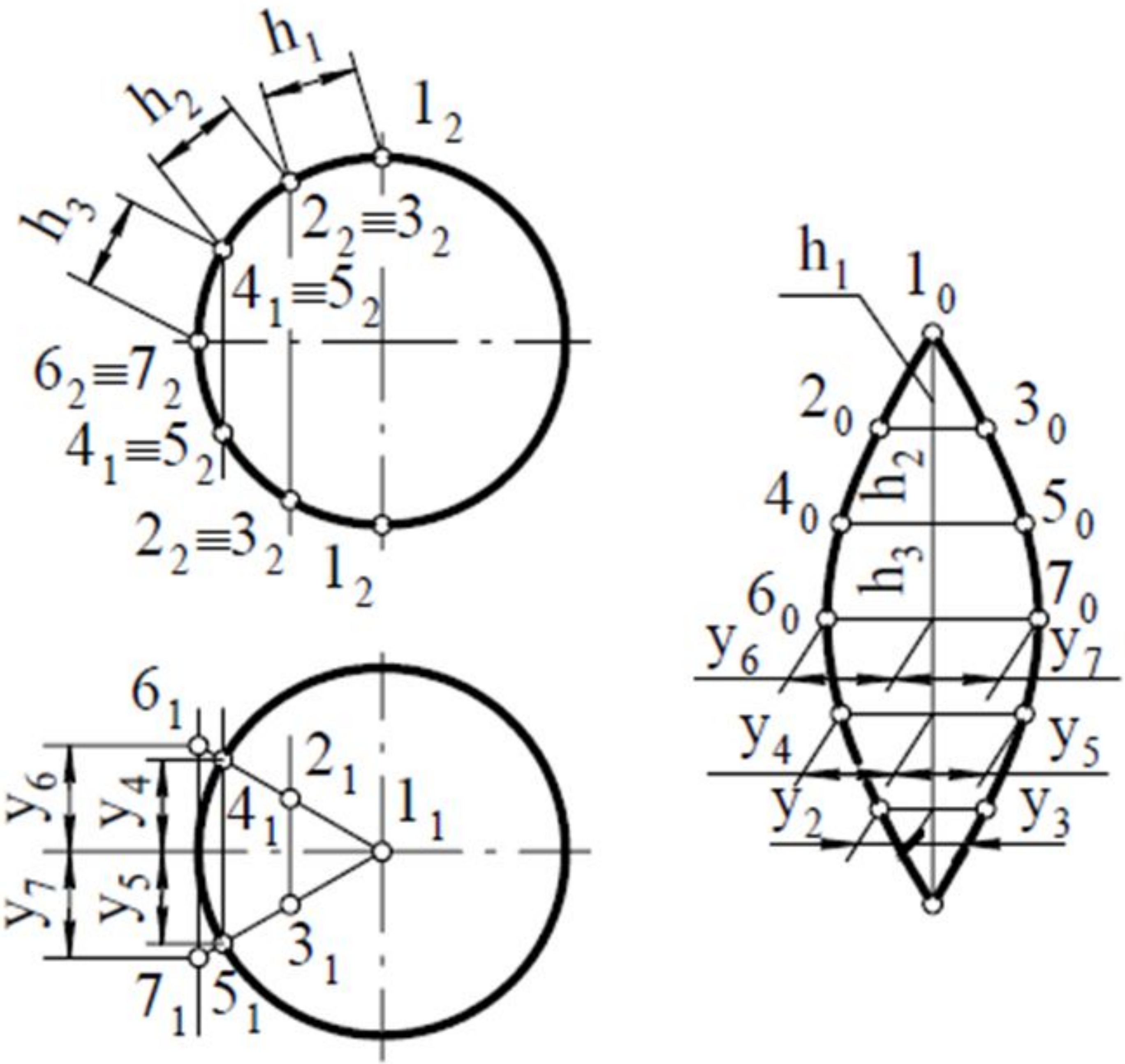




B2
A2
M2
C2
D2
C'2
B'2
A'2
x
VI
V
B1 ≡B'1
I
D1
IV
C1 ≡C'1
A1 ≡A'1
M1
II
III
A
B
C
D
C'
B'
A'
B
M
I
II
III
IV

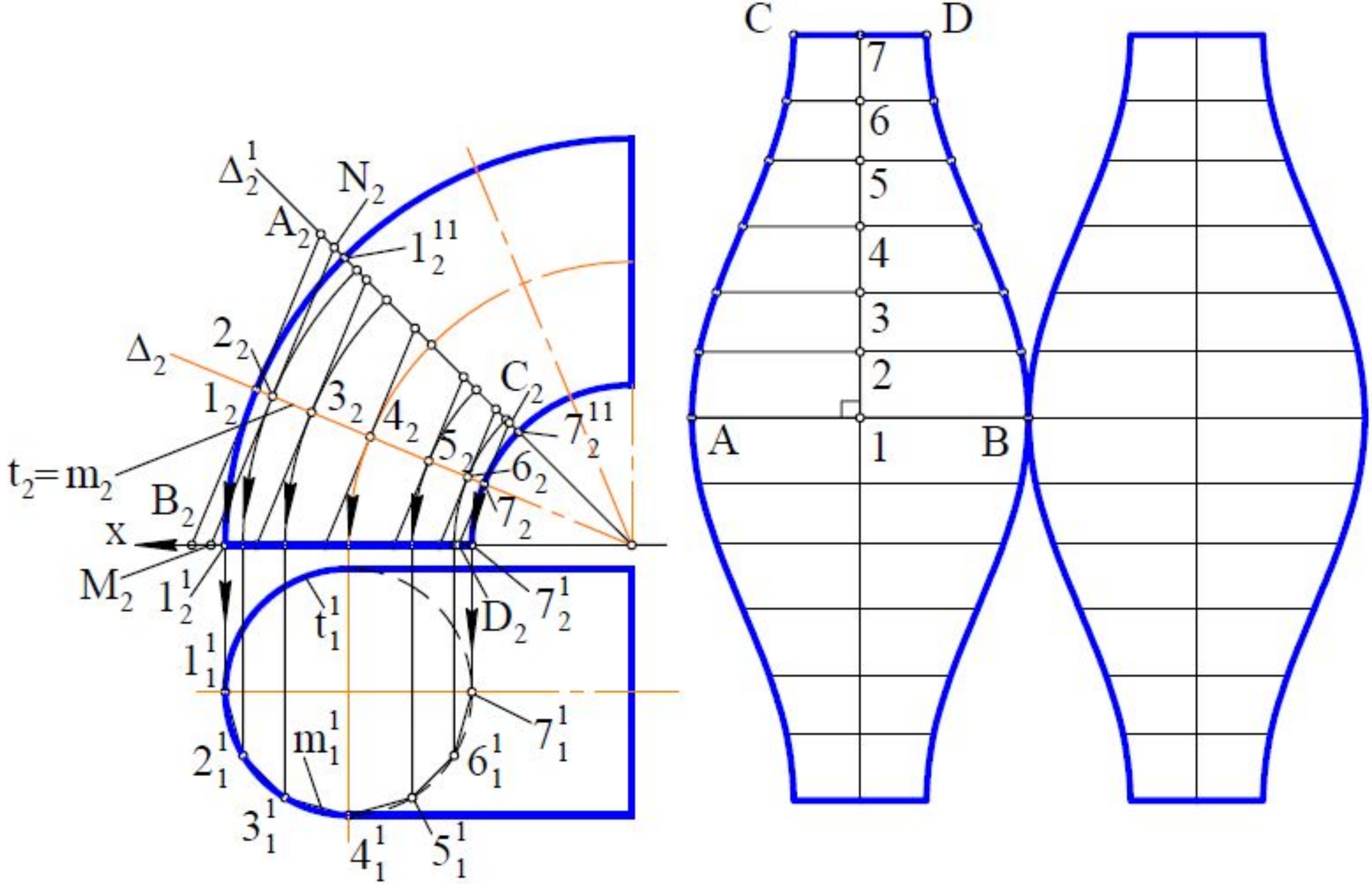


1_2
m_2
$A_2=B_2=2_2$
$C_2=D_2=3_2$
$M_2=N_2=4_2$
X_{12}
M_1
C_1
A_1
4_1
3_1
2_1
1_1
m_1
B_1
N_1
D_1
2R
1
A
2
B
C
3
D
M
4
N



h1
h2
h3
12
22≡32
41≡52
62≡72
41≡52
22≡32
12
61
21
41
11
y6
y4
y7
y5
31
71
51
h1
10
20
30
h2
40
50
h3
60
70
y6
y7
y4
y5
y2
y3

Условная развёртка тора



Развёртку конуса вращения с криволинейной образующей получаем разбивкой на ряд описанных конусов. Точные развертки этих получаем, используя формулы углов соответствующих секторов:
$\alpha = 2\pi r/R$, где r принимает значения r_1, r_2, r_3; R принимает значения S^1C, S^2C, S^2B, S^3B, S^3A