

Лекция 6

Метрические задачи

Метрическими называются такие задачи, в условии или решении которых присутствуют геометрические фигуры или понятия, связанные с численной характеристикой.

- Наиболее часто встречаются метрические задачи: на взаимную перпендикулярность геометрических фигур, на определение натуральной величины заданных отрезка или угла, на построение натурального вида плоской фигуры и т. п.

Метрические задачи связаны с различными измерениями: натуральных величин отрезков, углов, плоских фигур; расстояний между фигурами и т.д.

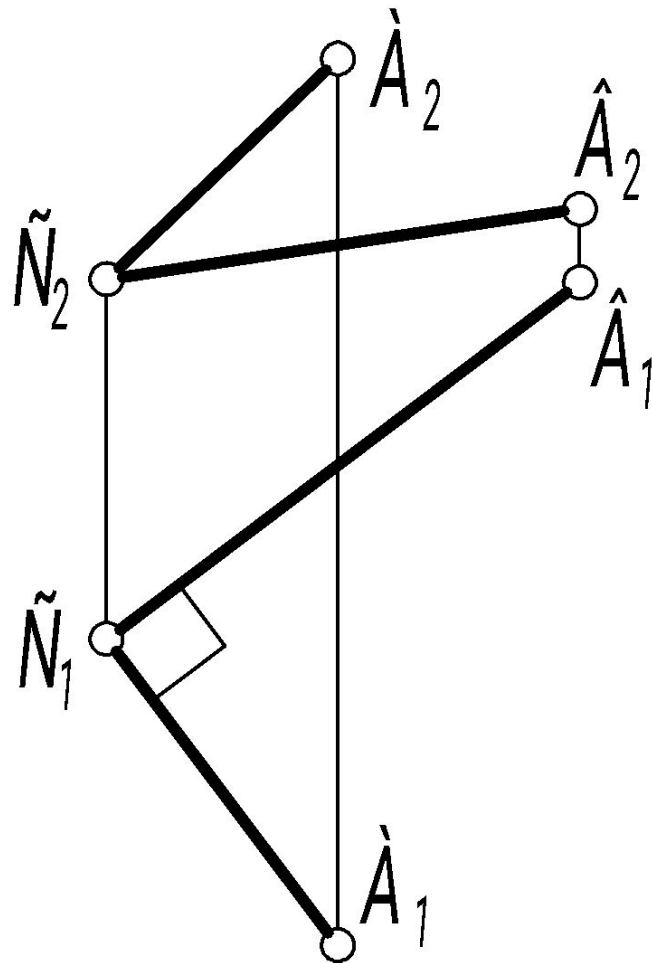
Метрические задачи проще решать, используя способы преобразования комплексного чертежа.

Из всего многообразия метрических задач выделяются две основные:

1. Первая основная метрическая задача - на перпендикулярность прямой и плоскости.
2. Вторая основная метрическая задача - на определение натуральной длины отрезка. Эта задача решается методом прямоугольного треугольника, который рассматривался в первом модуле.

Как Вы думаете?

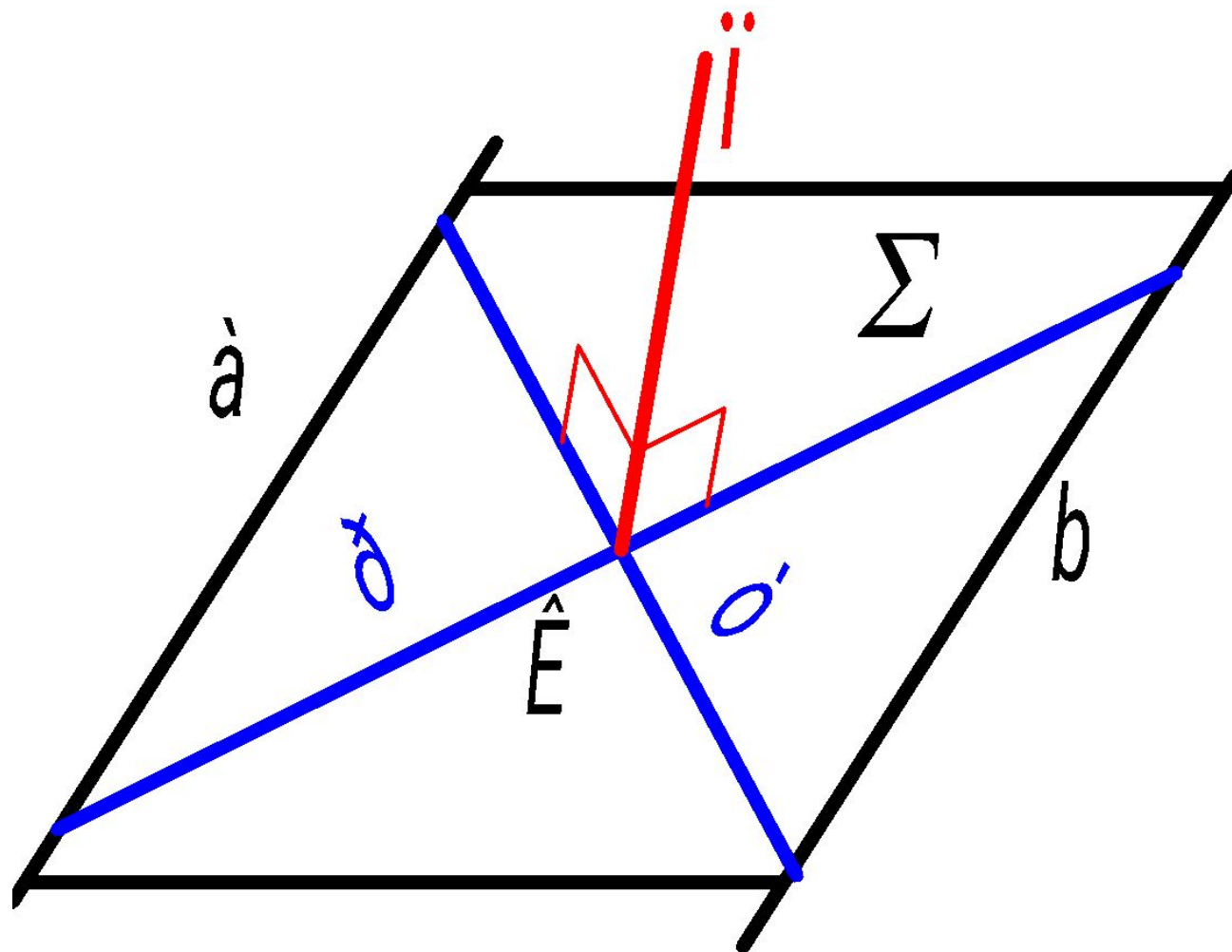
1. Что является кратчайшим расстоянием от точки до прямой, до плоскости?
2. Присутствует ли на какой-нибудь плоскости проекций натуральная величина угла?



Взаимная перпендикулярность прямой и плоскости.

Из элементарной геометрии известно, что прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

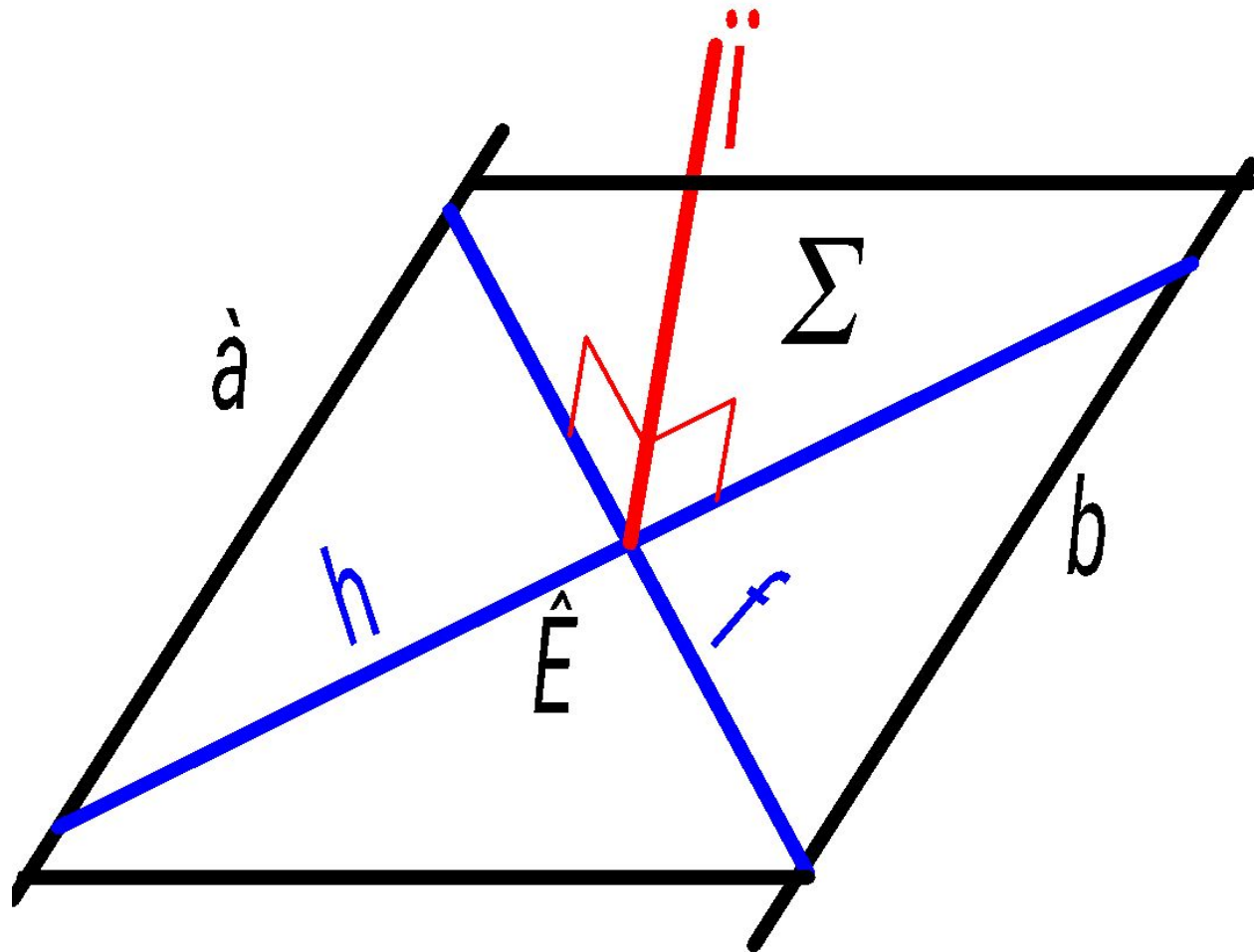
Задача: Через точку $K \in \Sigma$ построить прямую n , перпендикулярную плоскости $\Sigma(a \parallel b)$.



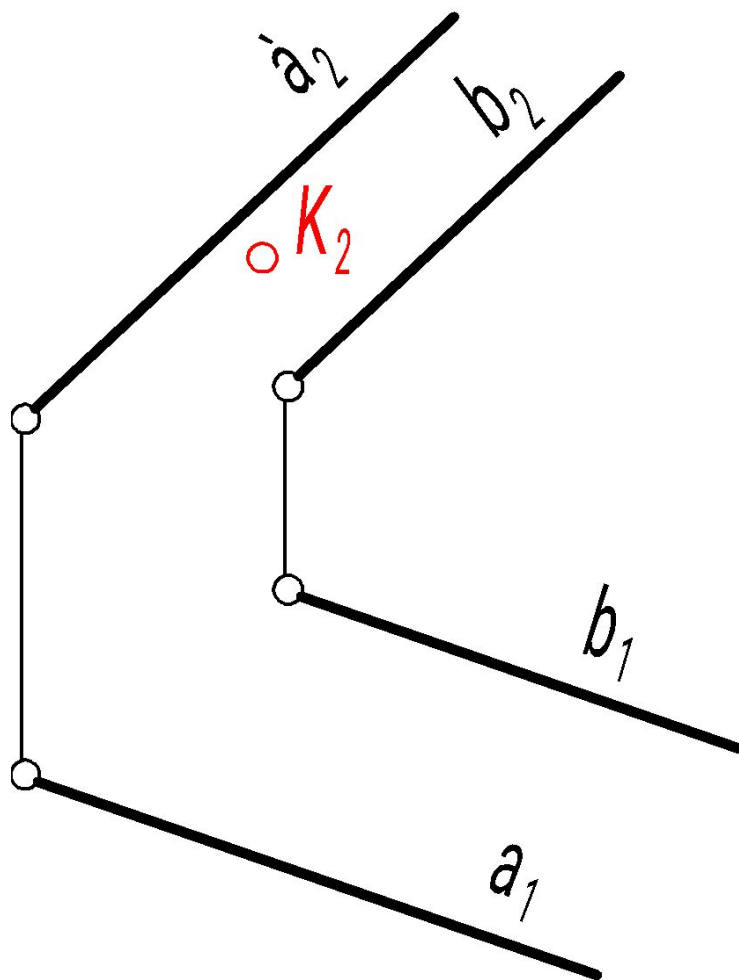
Чтобы провести прямую $n \perp \Sigma$, нужно в этой плоскости взять две пересекающиеся прямые, это $p \cap m = K$. Прямую n нужно строить перпендикулярно одновременно двум этим прямым.

Однако, если прямые p и m будут прямыми общего положения, то прямой угол к ним ни на одной плоскости проекций не спроецируется в натуральную величину. Согласно теореме опроецировании прямого угла, прямой угол спроецируется в натуральную величину на какую-нибудь плоскость проекций, если одна сторона прямого угла будет параллельной этой плоскости проекций.

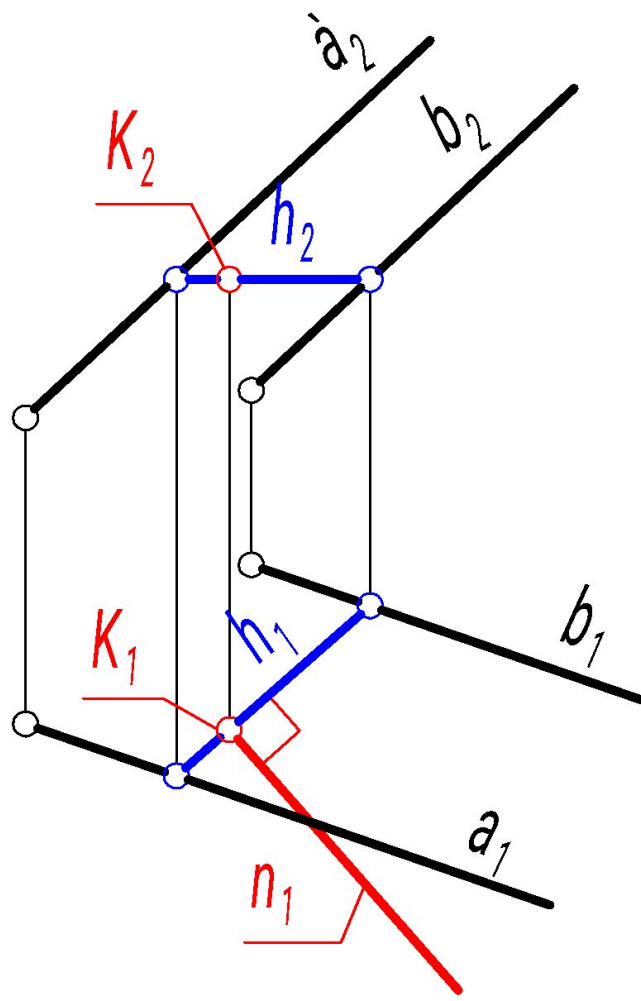
Поэтому, в качестве прямых p и t выгодно взять горизонталь h и фронталь f . Тогда прямой угол между n и h спроецируется в натуральную величину на Π_1 , а прямой угол между n и f - на Π_2 .



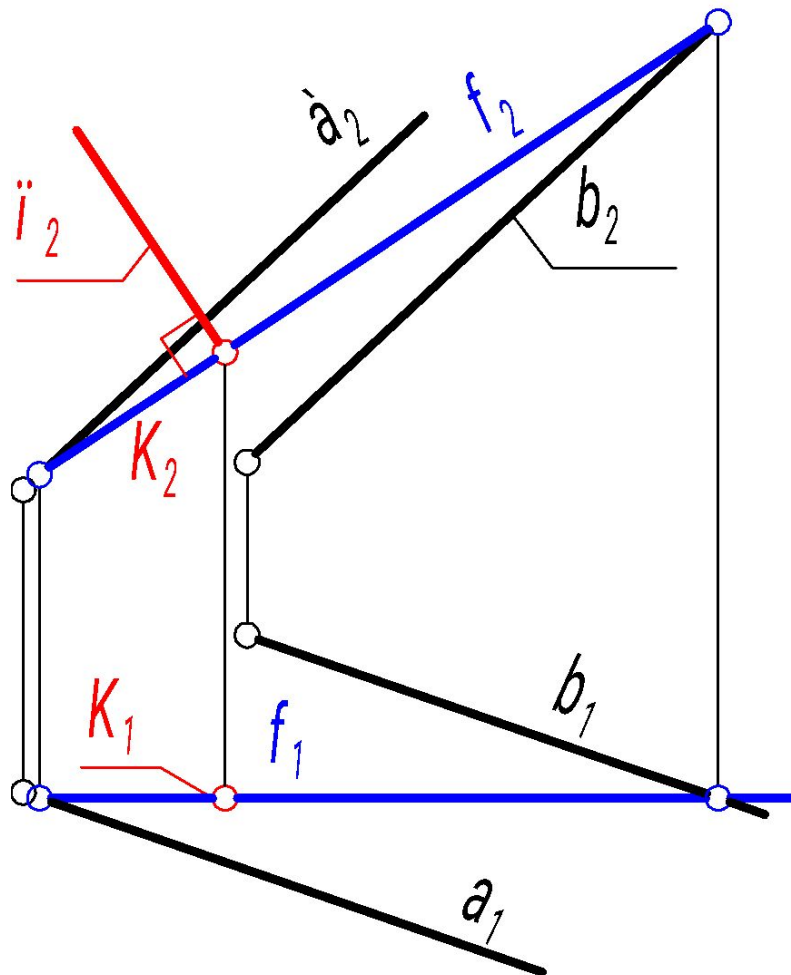
Плоский чертёж: Плоскость Σ задана параллельными прямыми a и b . Точка $K(K_2)$ принадлежит этой плоскости. Нужно построить $n \perp \Sigma, n \in K$.



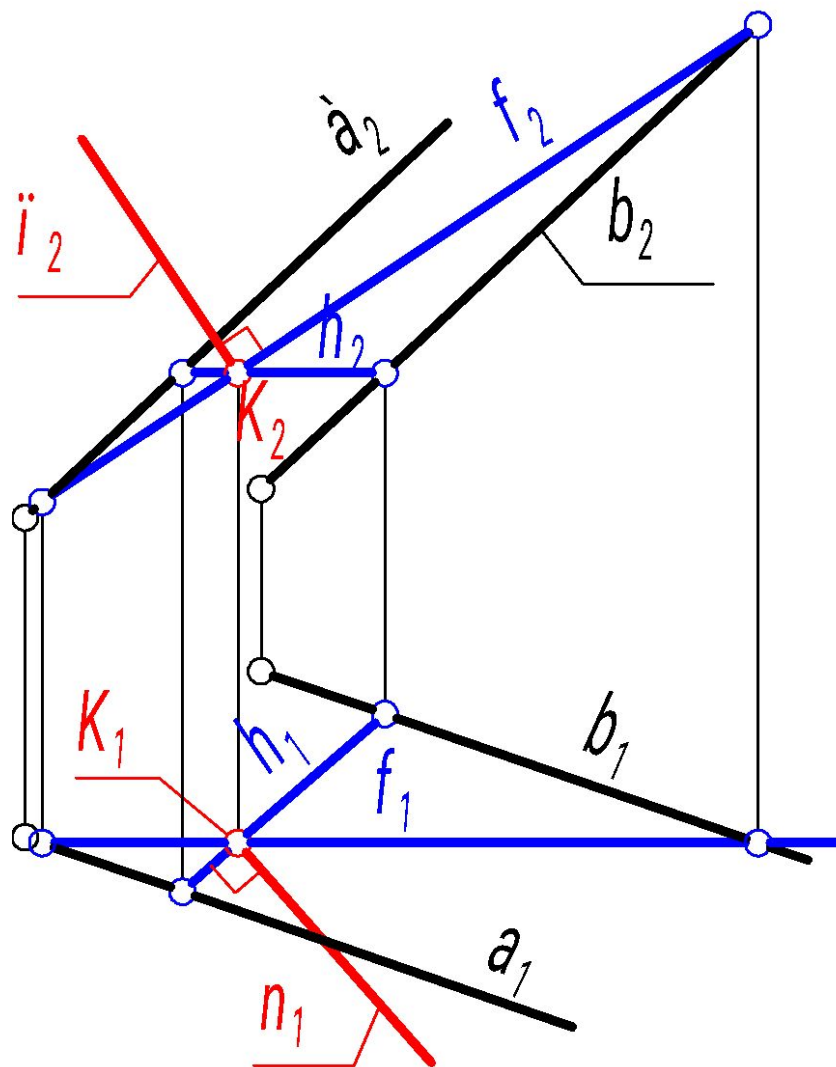
В плоскости необходимо взять горизонталь h и фронталь f . Затем, перпендикулярно каждой из них строить n . Построения начинаем с горизонтали



Аналогично находим n_2 . Через точку K_1 проводим $f_1 \perp$ линиям связи, находим f_2 . Так как $n \perp f$, то $n_2 \perp f_2$, поэтому проводим $n_2 \perp f_2$ через точку K_2 .



Полностью решение задачи представлено .
Видимость прямой n не учитывалась.



Алгоритмическая запись решения:

1. $h \subset \Sigma, f \subset \Sigma, h \cap f = K.$
2. $K \in n \Rightarrow K_1 \in n_1, K_2 \in n_2.$
3. $n \perp h \Rightarrow n_1 \perp h_1;$
4. $n \perp f \Rightarrow n_2 \perp f_2.$

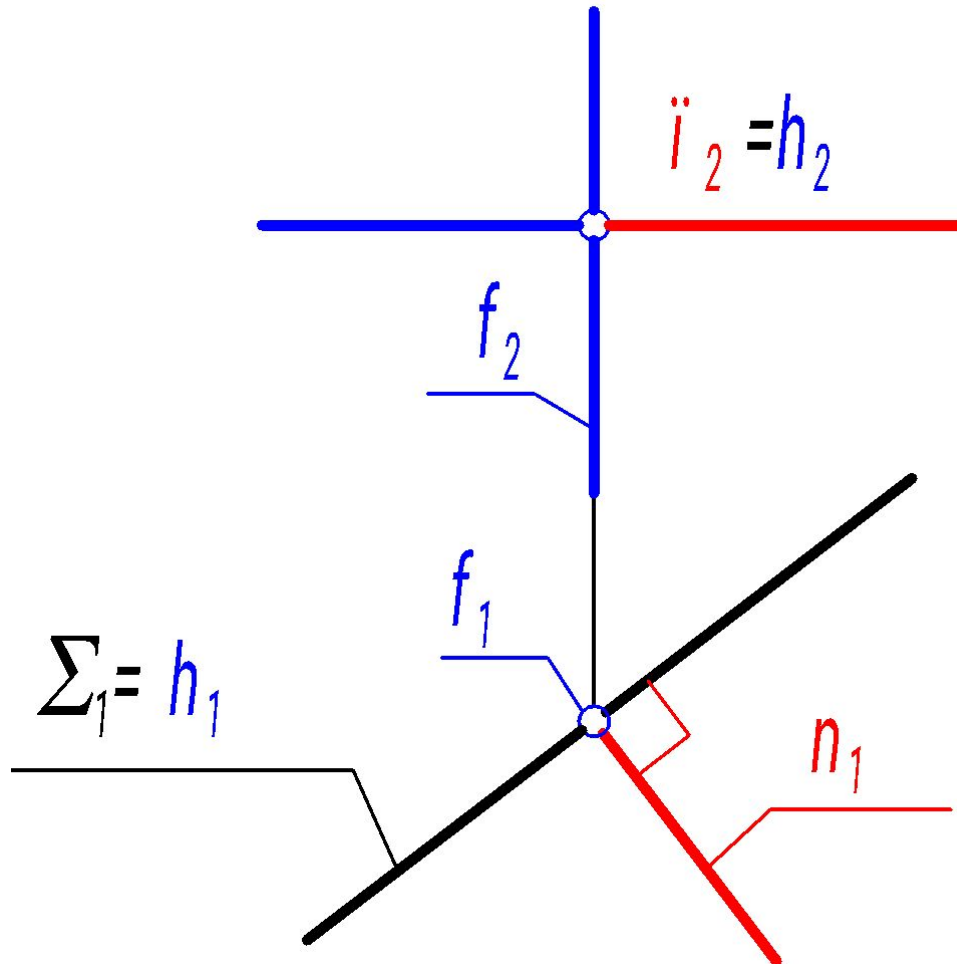
Итак, чтобы задать на комплексном чертеже прямую n , перпендикулярную данной плоскости Σ , достаточно построить n_1 и n_2 , расположив их в любом месте чертежа, чтобы $n_1 \perp h_1, n_2 \perp f_2$, где h и f - горизонталь и фронталь плоскости, при условии, что $h \cap f$.

Если Σ - горизонтально проецирующая:

$$\Sigma \perp \Pi_1 \Rightarrow h_1 = \Sigma_1, f \perp \Pi_1$$

$$n \perp h \Rightarrow n_1 \perp h_1; n \perp f \Rightarrow n_2 \perp f_2; \Rightarrow n -$$

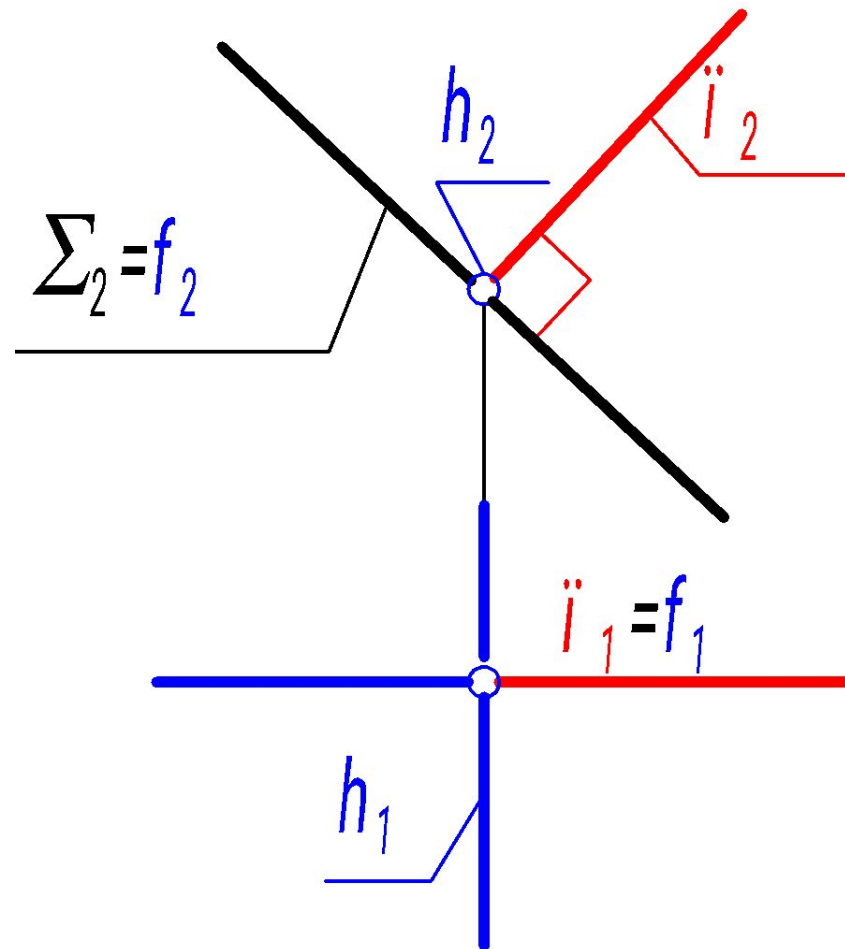
горизонталь



Если Σ - фронтально проецирующая:

$$\Sigma \perp \Pi_2 \Rightarrow f_2 = \Sigma_2, h \perp \Pi_2.$$

$$n \perp h \Rightarrow n_1 \perp h_1; n \perp f \Rightarrow n_2 \perp f_2; \Rightarrow n -$$

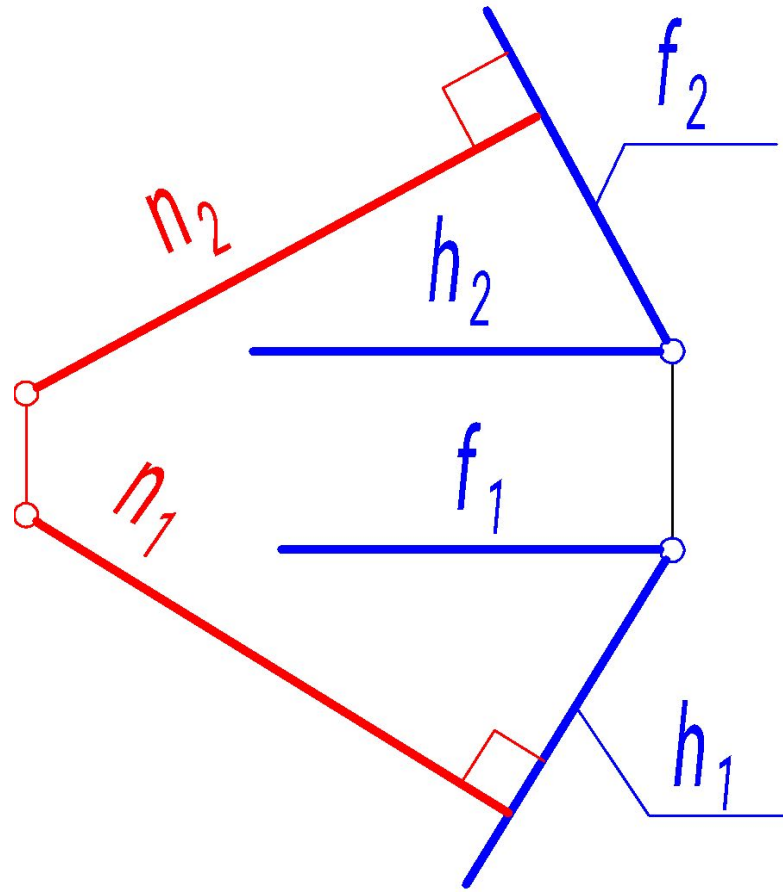


Если плоскость Σ занимает проецирующее положение, то прямая, перпендикулярная ей, является линией уровня (фронталь, горизонталь).

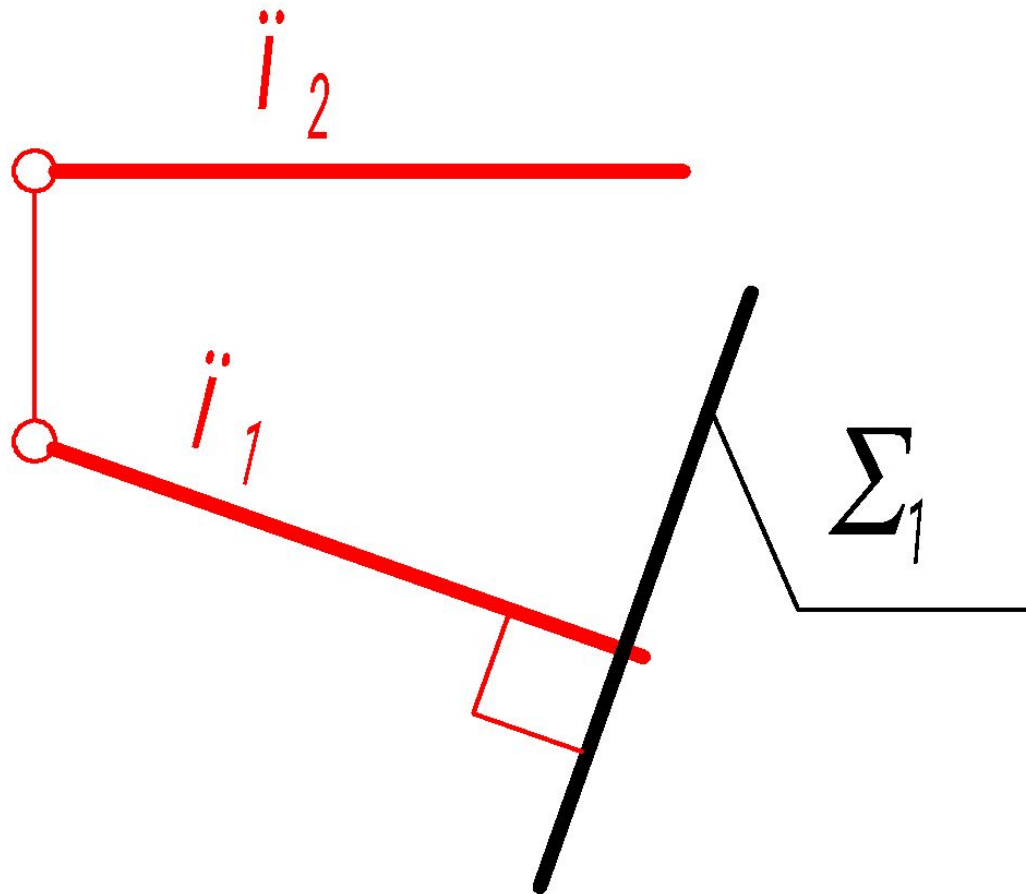
- Чтобы лучше понять данное утверждение, нужно вспомнить, какие прямые являются линиями уровня в проецирующих плоскостях. Для этого посмотрите рис. 2-12 и 2-14 в модуле № 2.

Обратная задача.

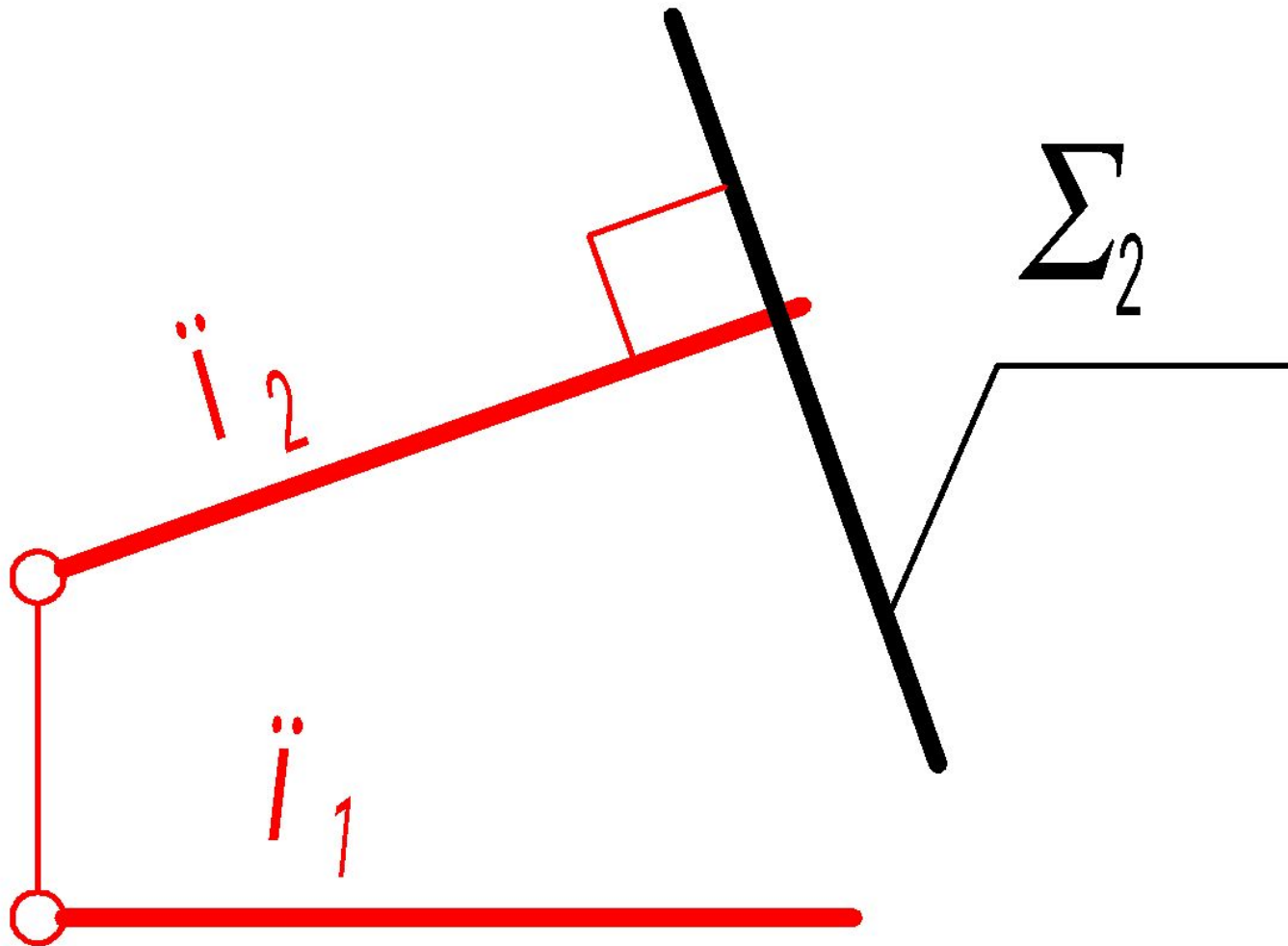
Чтобы задать на чертеже плоскость, перпендикулярную данной прямой n , достаточно задать проекции горизонтали и фронтали этой плоскости так, чтобы $f_2 \perp n_2$, а $h_1 \perp n_1$. При этом, очевидно, должно выполняться условие $h \cap f$.



Если прямая l - горизонталь, то плоскость Σ , перпендикулярная ей, является горизонтально проецирующей (Σ_1).

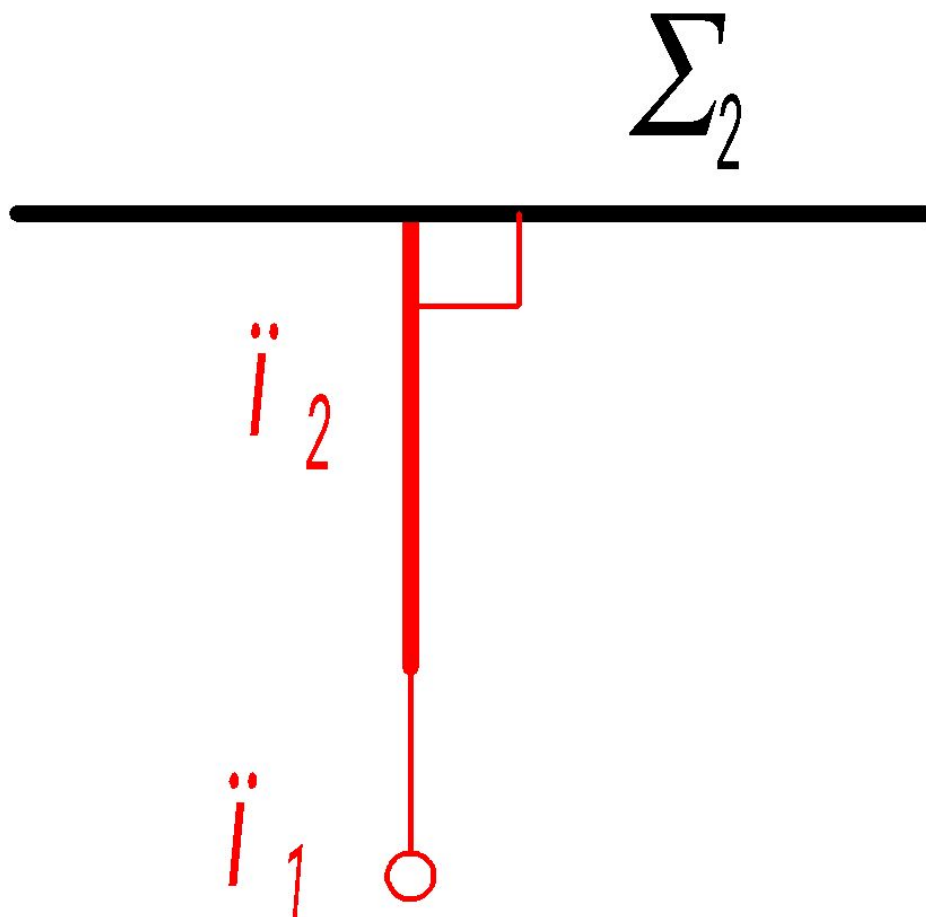


Если прямая l - фронталь, то плоскость Σ , перпендикулярная ей, является фронтально проецирующей (Σ_2).

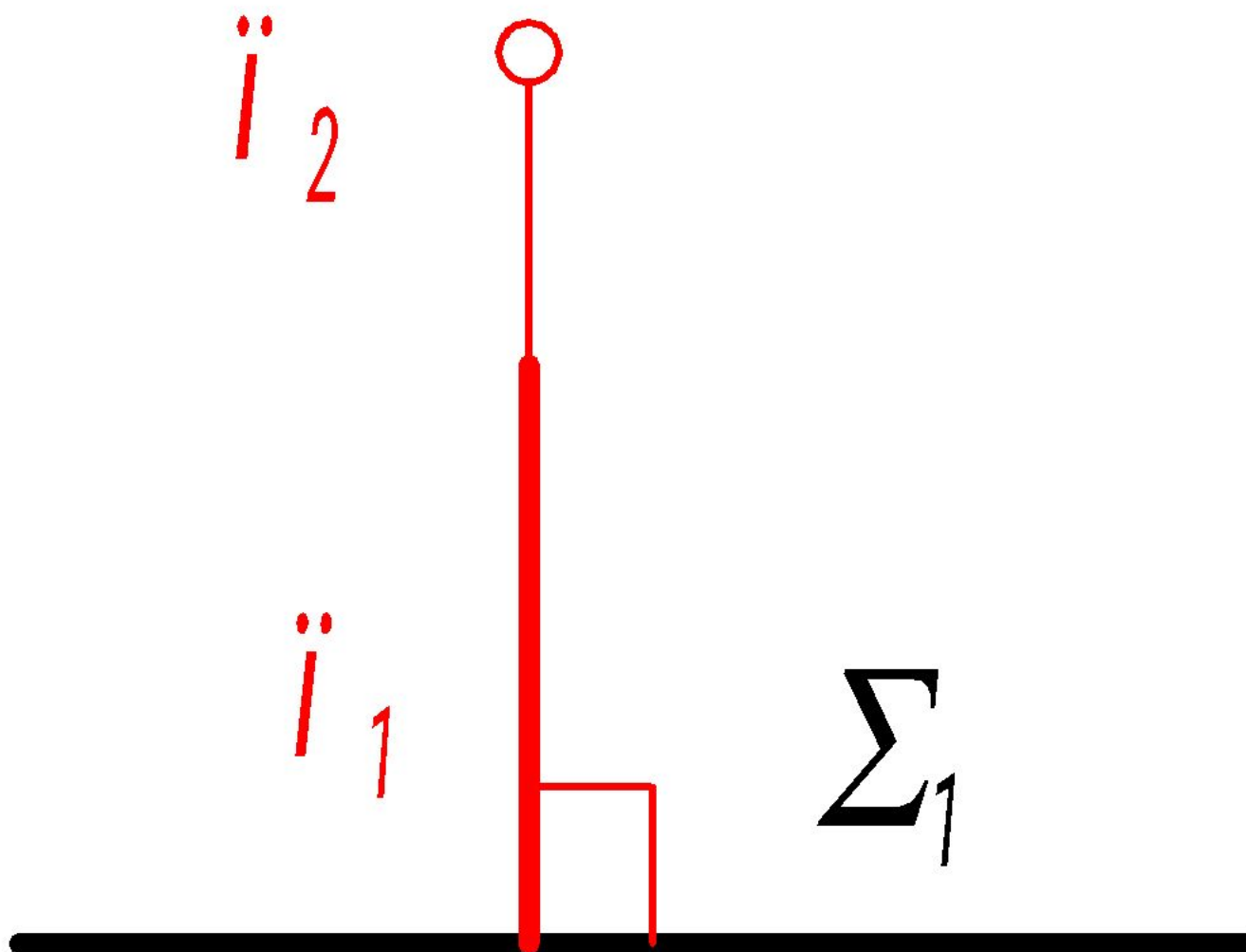


Если прямая n занимает проецирующее положение, то плоскость, перпендикулярная ей, является плоскостью уровня.

Прямая n - горизонтально проецирующая,
 $\Sigma \perp n$ - горизонтальная плоскость уровня (Σ_2).

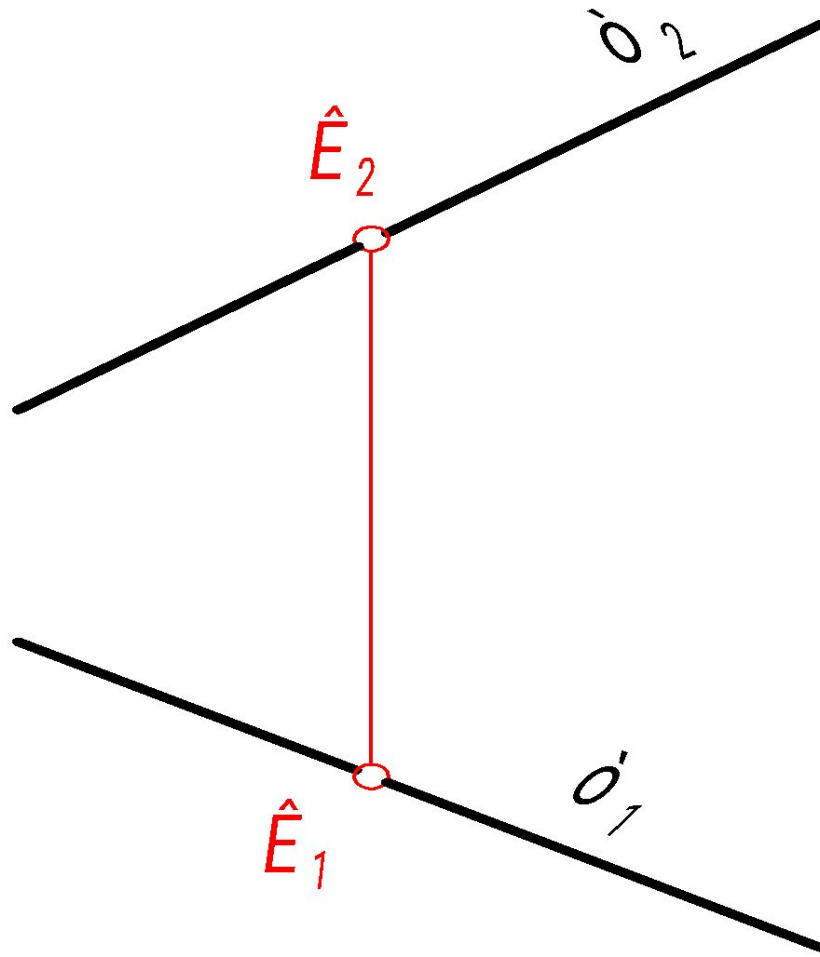


Прямая n - фронтально проецирующая,
 $\Sigma \perp n$ - фронтальная плоскость уровня(Σ_1).



Взаимная перпендикулярность двух прямых общего положения

Задача: Через точку K , взятую на прямой общего положения m , провести прямую n , тоже общего положения, перпендикулярную m .

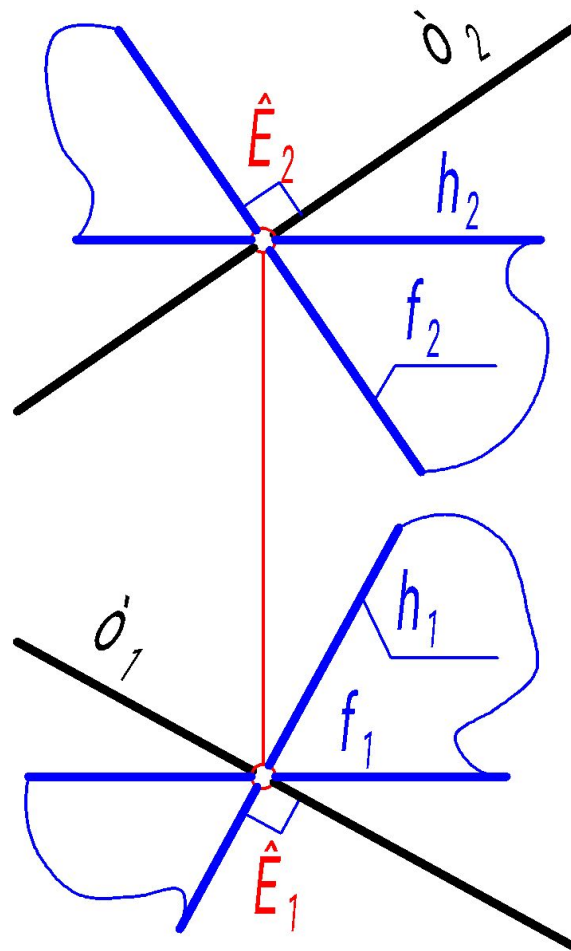


Так как прямой угол между прямыми общего положения искажается на обеих плоскостях проекций, то решение задачи на построение взаимно перпендикулярных прямых приходится сводить к задаче на построение взаимно перпендикулярных прямой и плоскости.

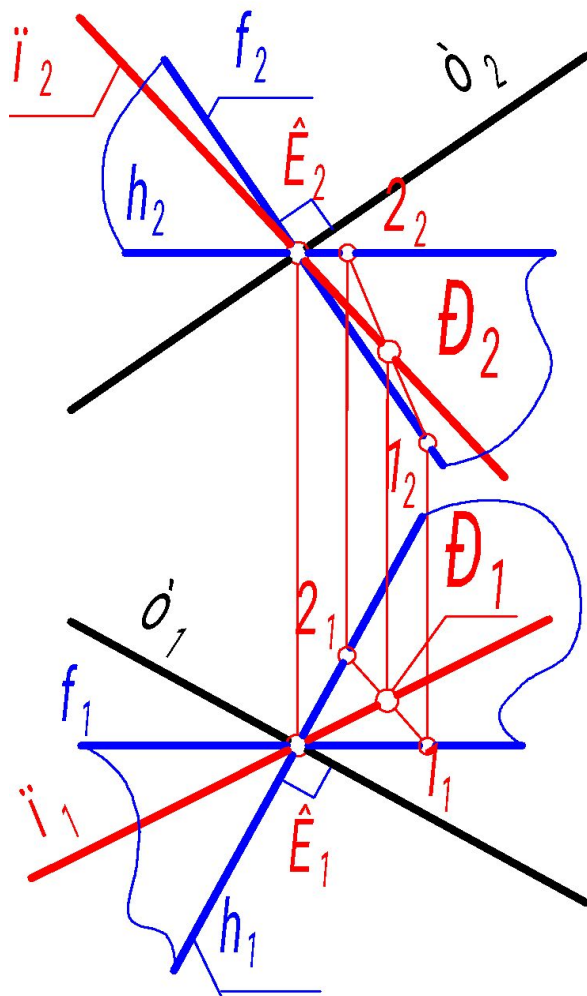
При этом используется известное положение, что две прямые перпендикулярны в том, и только в том случае, если через каждую из них можно провести плоскость, перпендикулярную к другой прямой.

Алгоритм решения:

1. Через точку K проводим плоскость Σ , перпендикулярную прямой m . Плоскость задаём пересекающимися горизонталью и фронталью, причём, $h_1 \perp m_1$, а $f_2 \perp m_2$.



2. Так как плоскость $\Sigma(h \cap f) \perp m$, то в этой плоскости можно взять некоторую прямую общего положения n , проходящую через точку K . Она будет перпендикулярна m . Задаём n_1 .



3. Известно, что прямую определяют две точки. На n_1 , кроме K_1 , возьмём ещё одну точку P_1 .

4. Находим n_2 в плоскости Σ . Для этого проводим в этой плоскости прямую $12(1_1 - 2_1)$. Точка P_1 принадлежит этой прямой, а, следовательно, плоскости Σ . Находим P_2 и проводим прямую n_2

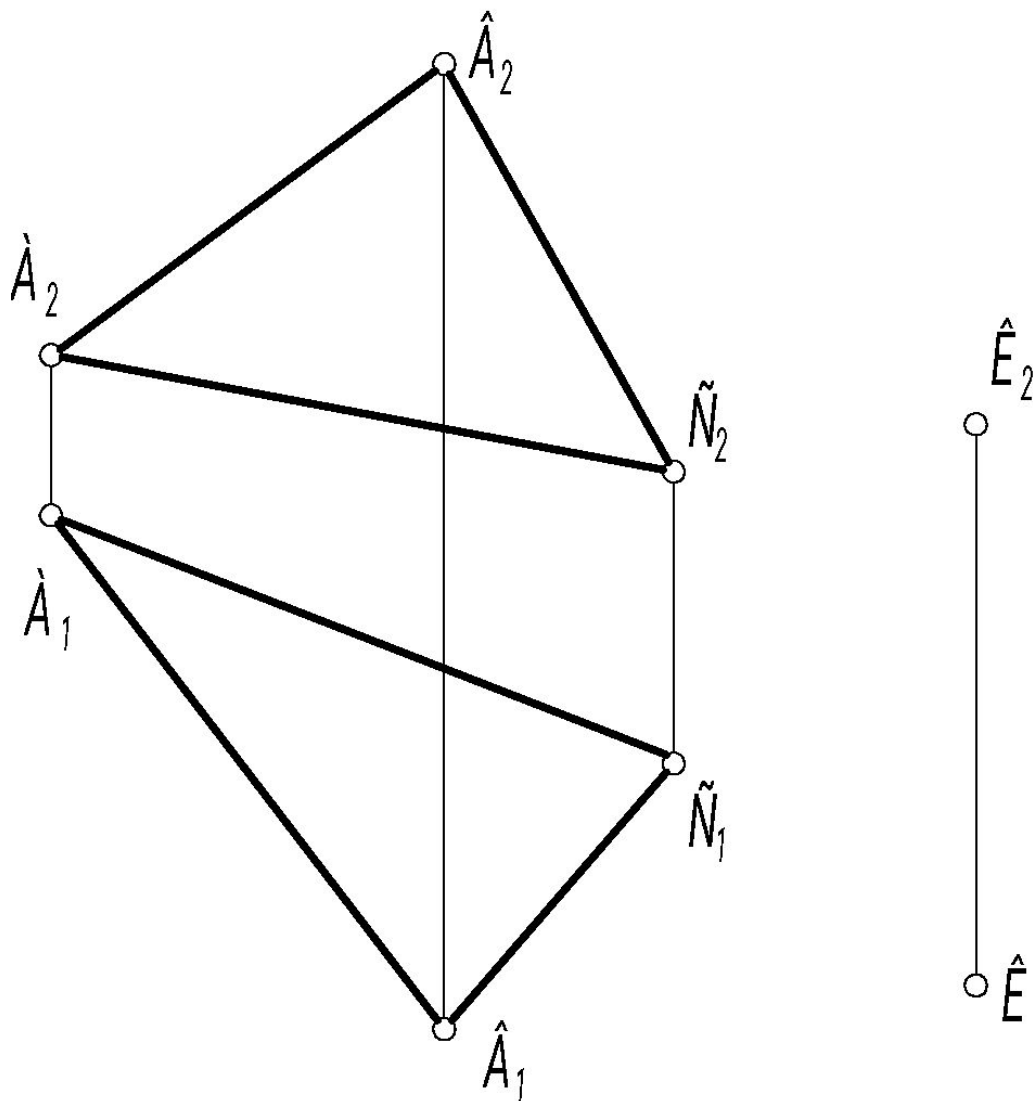
Алгоритмическая запись решения:

1. $\Sigma \perp m, \Sigma = h \cap f = K; h \perp m \Rightarrow h_1 \perp m_1, h_2 \perp K_2K_1; f \perp m \Rightarrow f_2 \perp m_2, f_1 \perp K_2K_1;$
2. $n = PK, n \subset \Sigma, n_1 = P_1K_1; P_1 \in 1_12_1 \Rightarrow P_1 \in \Sigma \Rightarrow P_2 \Rightarrow n_2.$
3. $n \subset \Sigma \Rightarrow n \perp m.$

Взаимная перпендикулярность двух плоскостей общего положения

Известно, что две плоскости взаимно перпендикулярны, если в одной из них лежит прямая, перпендикулярная другой плоскости. Таким образом, построение взаимно перпендикулярных плоскостей общего положения сводится к построению взаимно перпендикулярных прямой и плоскости.

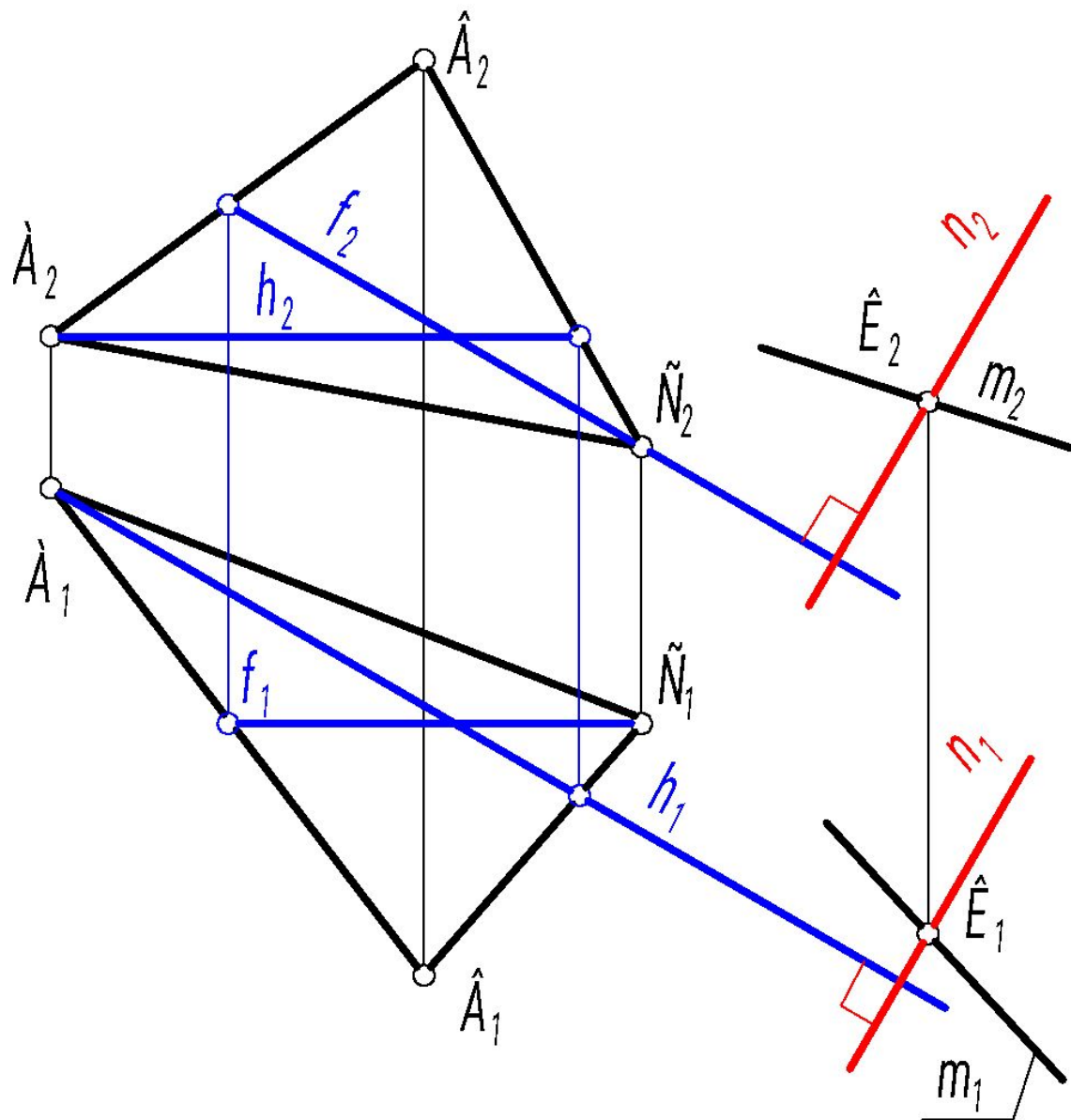
Задача: Через точку K , взятую вне плоскости Γ (ABC) провести плоскость $\Sigma \perp \Gamma$.



Алгоритм:

1. Плоскость Σ задаём пересекающимися прямыми $m \cap n = K$. Согласно вышесказанному, одна из них должна быть перпендикулярна плоскости Γ . Пусть это будет n .
2. В плоскости Γ берём горизонталь и фронталь.
3. Через точку K_1 проводим $n_1 \perp h_1$, а через K_2 проводим $n_2 \perp f_2$, следовательно, $n \perp \Gamma$.
4. Прямую m , проходящую через точку K , задаём произвольно.
 - Таким образом, $\Sigma(n \cap m) \perp \Gamma(ABC)$.

Решение



Алгоритмическая запись решения:

1. $h \subset \Gamma \Rightarrow h_2 \Rightarrow h_1, f \subset \Gamma \Rightarrow f_1 \Rightarrow f_2;$

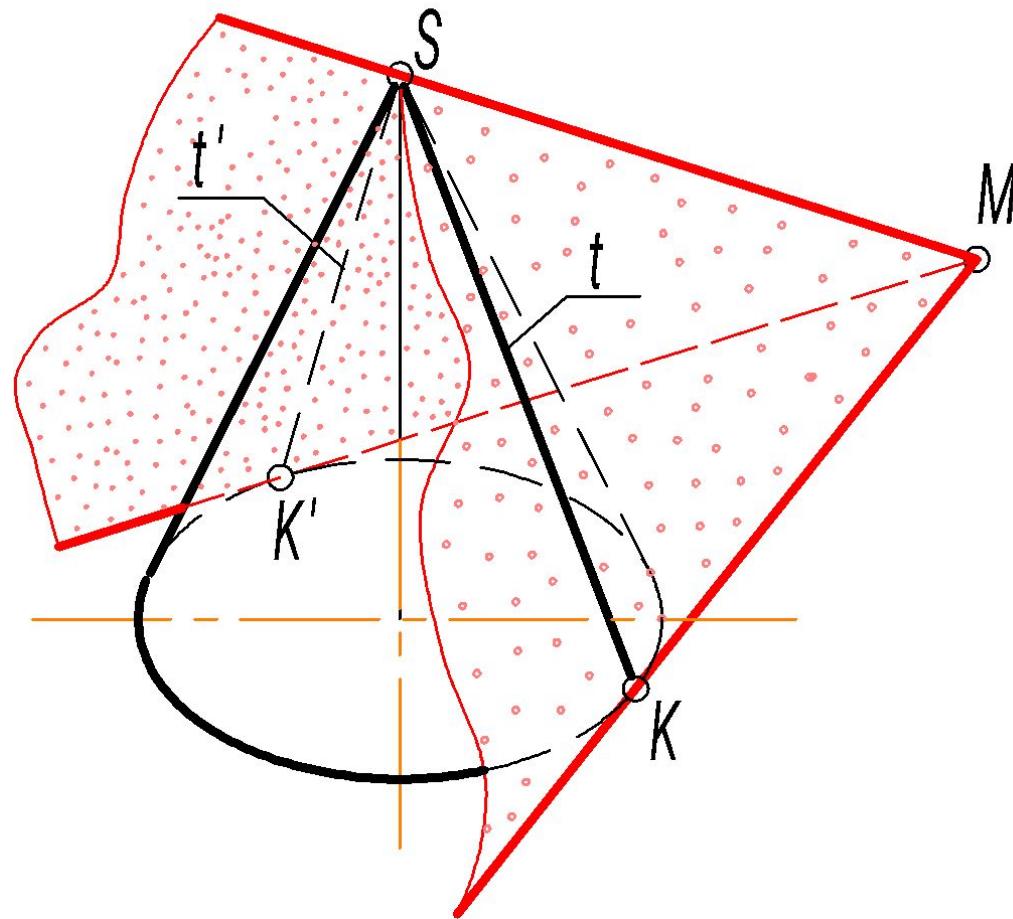
2. $\Sigma = m \cap n = K, n \perp \Gamma \Rightarrow n_1 \perp h_1,$
 $n_2 \perp f_2.$

3. $\Sigma \perp \Gamma.$

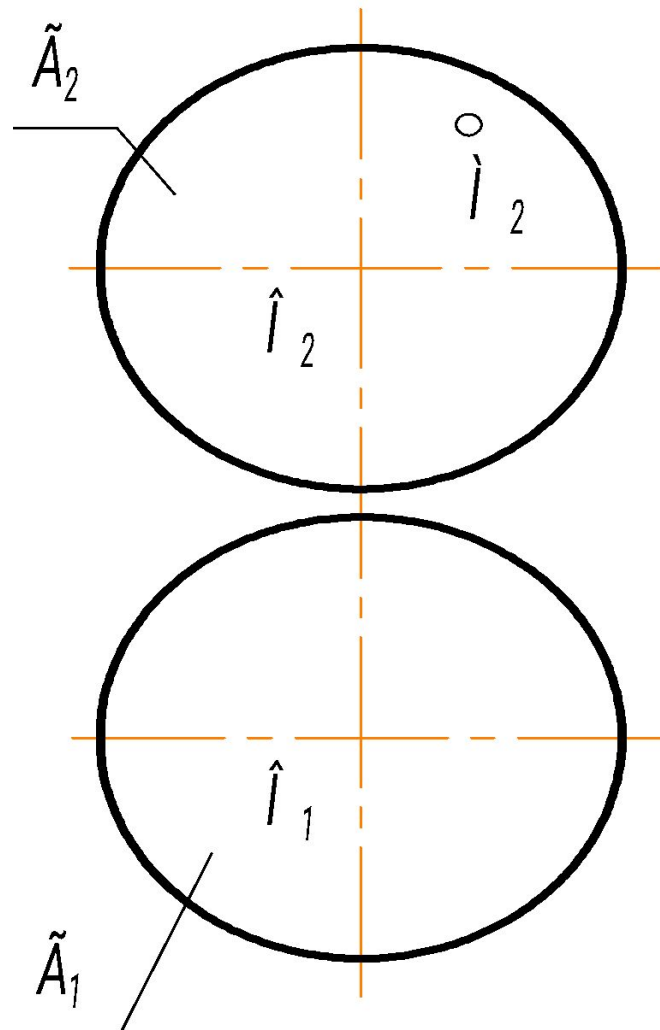
Построение плоскости, касательной к поверхности

- Касательная плоскость - это множество всех касательных прямых, проведённых к данной кривой поверхности и проходящих через одну её точку.
- На чертеже плоскость, касательную к поверхности, можно задавать, например, двумя пересекающимися прямыми, каждая из которых является касательной к поверхности в данной точке. Но можно касательную плоскость задавать различными условиями, характер которых зависит от вида поверхности.

Например, к конусу касательную плоскость можно провести так, чтобы она проходила через точку M , расположенную вне поверхности конуса. Причём, такая задача имеет два решения, так как через данную точку можно провести две плоскости, касающиеся поверхности конуса по образующим SK и SK' , которые в то же время являются касательными, соответственно, t и t' .



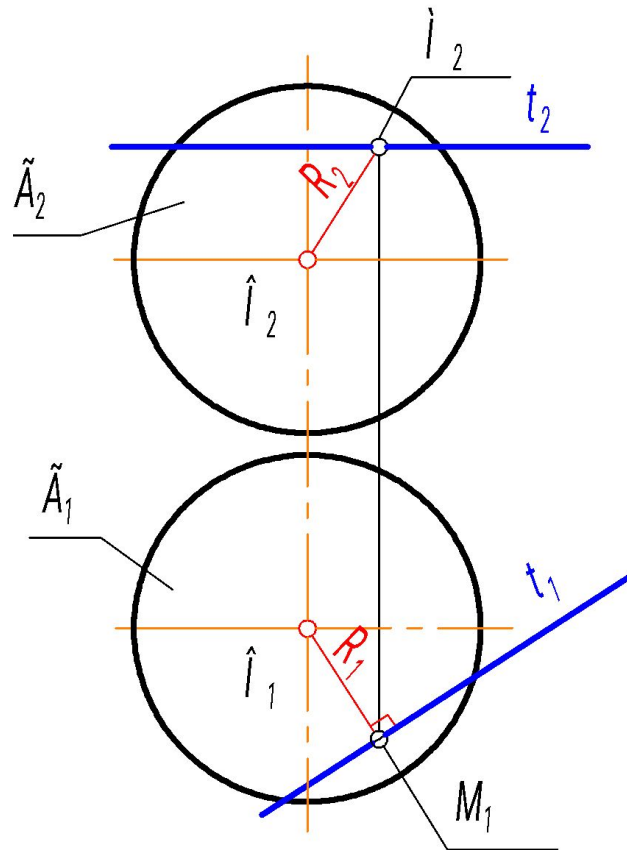
Задача: Через точку $M(M_2)$ на сфере Γ с центром в точке O провести плоскость Σ , касательную к её поверхности



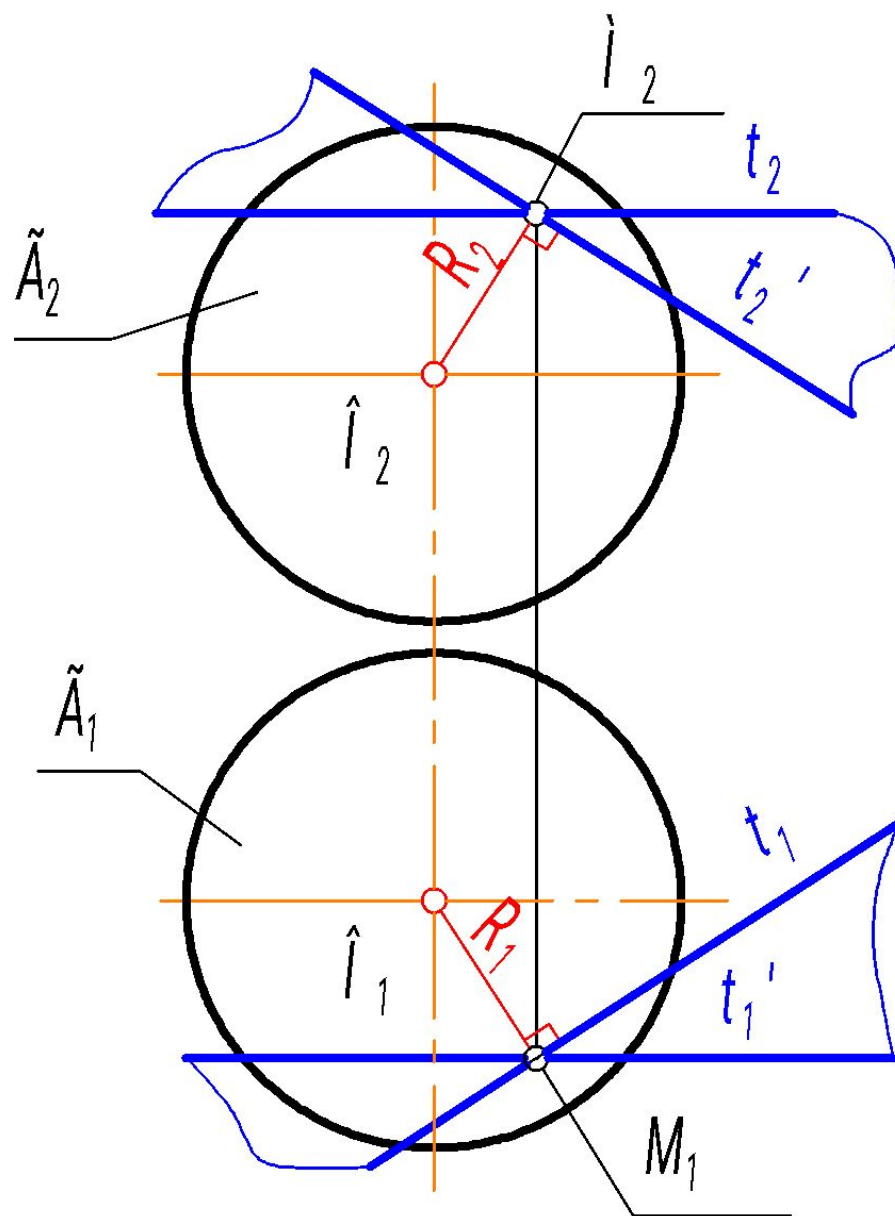
Так как любая прямая, принадлежащая касательной плоскости к сфере, будет перпендикулярна к её радиусу, то задача сводится к построению плоскости, перпендикулярной прямой. Плоскость удобно задать двумя пересекающимися прямыми, каждая из которых будет перпендикулярна радиусу сферы.

Алгоритм:

1. Находим M_1 по принадлежности сфере.
2. Проводим R_1 и R_2 из центра сферы O_1 и O_2 к точкам M_1 и M_2 .
3. Проводим $t_1 \perp R_1$ - это горизонтальная проекция прямой, перпендикулярной радиусу, а, следовательно, касательной к сфере. Поскольку, прямой угол на Π_1 спроецирован в натуральную величину, то прямая t - горизонталь, и её проекция на Π_2 будет перпендикулярна линиям связи $\Rightarrow t_2$.



4. Аналогично проводим построения второй касательной t' , которая перпендикулярна радиусу: $t_2' \perp R_2$, $t_1' \perp$ линиям связи, то есть t' - фронталь.
5. Плоскость $\Sigma(t \cap t') \perp R \Rightarrow \Sigma$ - касательная к сфере.
 - Примечание: В данной задаче видимость поверхности не учитывалась.



Алгоритмическая запись решения:

1. $M \in \Gamma \Rightarrow M_1.$
2. $OM = R \Rightarrow O_1M_1 = R_1, O_2M_2 = R_2.$
3. $\Sigma(t \cap t') = M; t=h, t \perp R \Rightarrow t_1 \perp R_1, t_2 \perp M_2M_1.$
4. $t' = f, t' \perp R \Rightarrow t_2' \perp R_2, t_1' \perp M_2M_1.$
5. $\Sigma \perp R \Rightarrow \Sigma - \underline{\cup} \Gamma.$

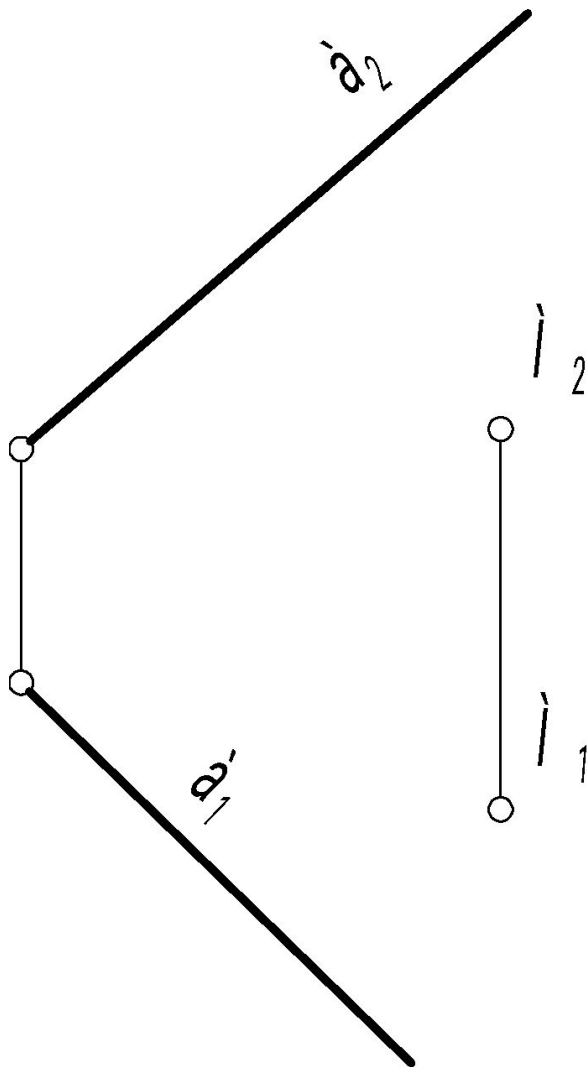
Задачи на определение расстояний между геометрическими фигурами

К таким задачам относятся: задачи на определение расстояний от точки до прямой, до плоскости, до поверхности; между параллельными и скрещивающимися прямыми; между параллельными плоскостями и т. п.

Все эти задачи объединяют три обстоятельства:

- **во-первых**, поскольку кратчайшим расстоянием между такими фигурами является перпендикуляр, то все они сводятся к построению взаимно перпендикулярных прямой и плоскости.
- **во-вторых**, в каждой из этих задач необходимо определять натуральную длину отрезка, то есть решать вторую основную метрическую задачу.
- **в-третьих**, это сложные по составу задачи, они решаются в несколько этапов, и на каждом этапе решается отдельная, небольшая конкретная задача.

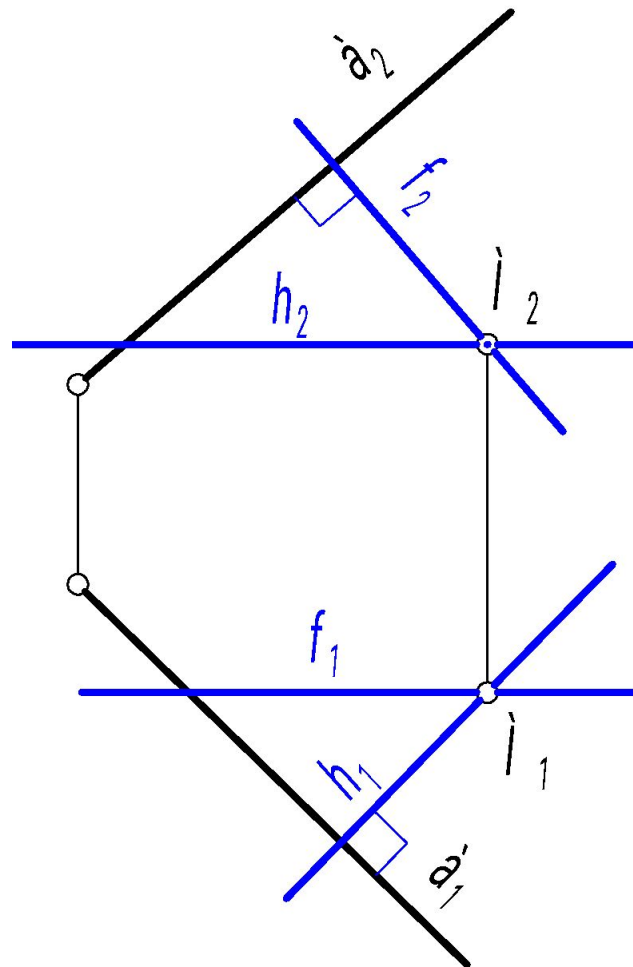
Задача: Определить расстояние от точки M до прямой общего положения a



Алгоритм:

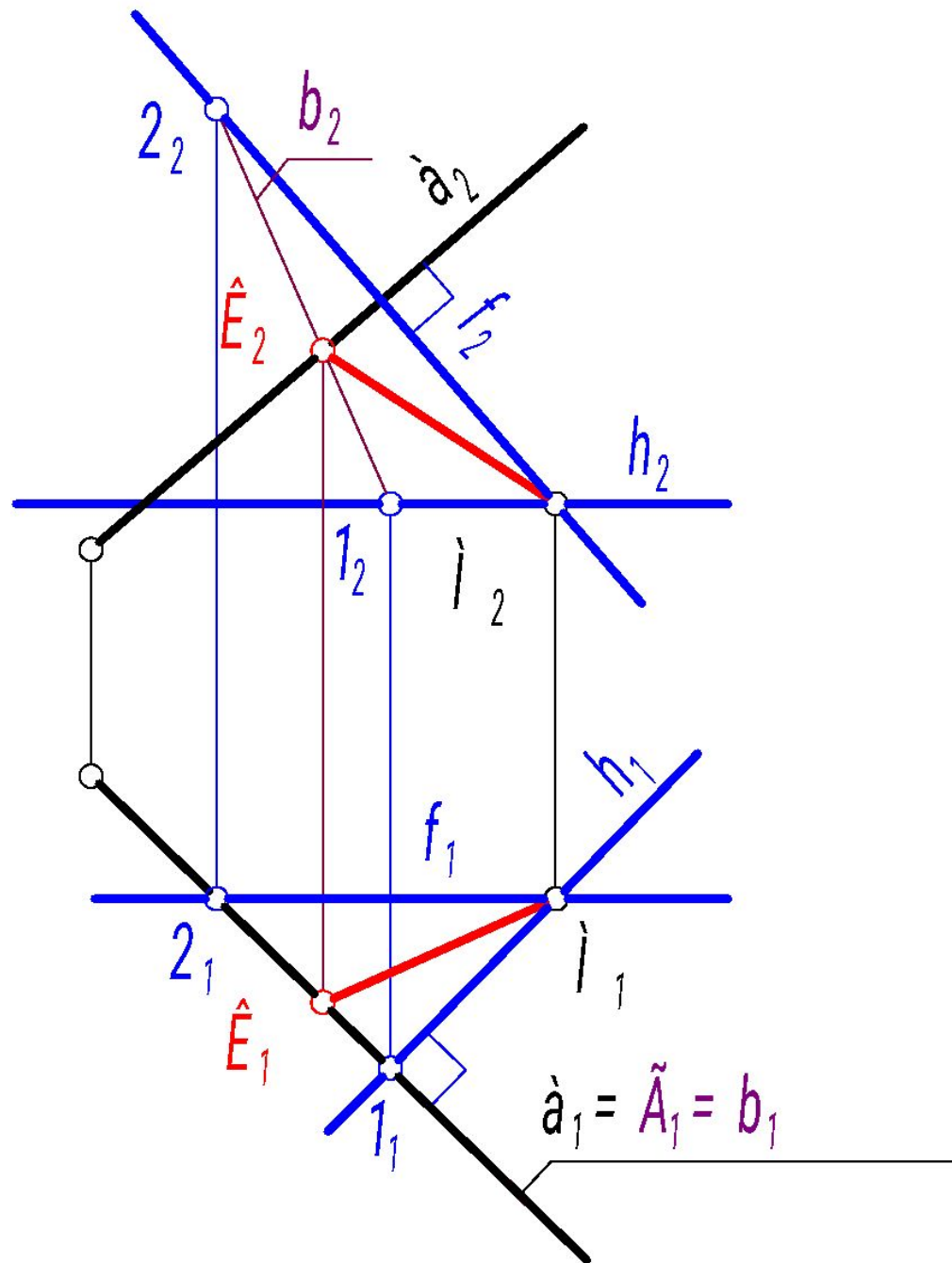
1 этап: Расстояние от точки до прямой есть перпендикуляр.

Поскольку прямая a - общего положения, то для построения перпендикуляра к ней необходимо вначале через точку M провести плоскость Σ , перпендикулярную a . Задаём эту плоскость, как обычно, $h \cap f$, при этом $h_1 \perp a_1$, а $f_2 \perp a_2$

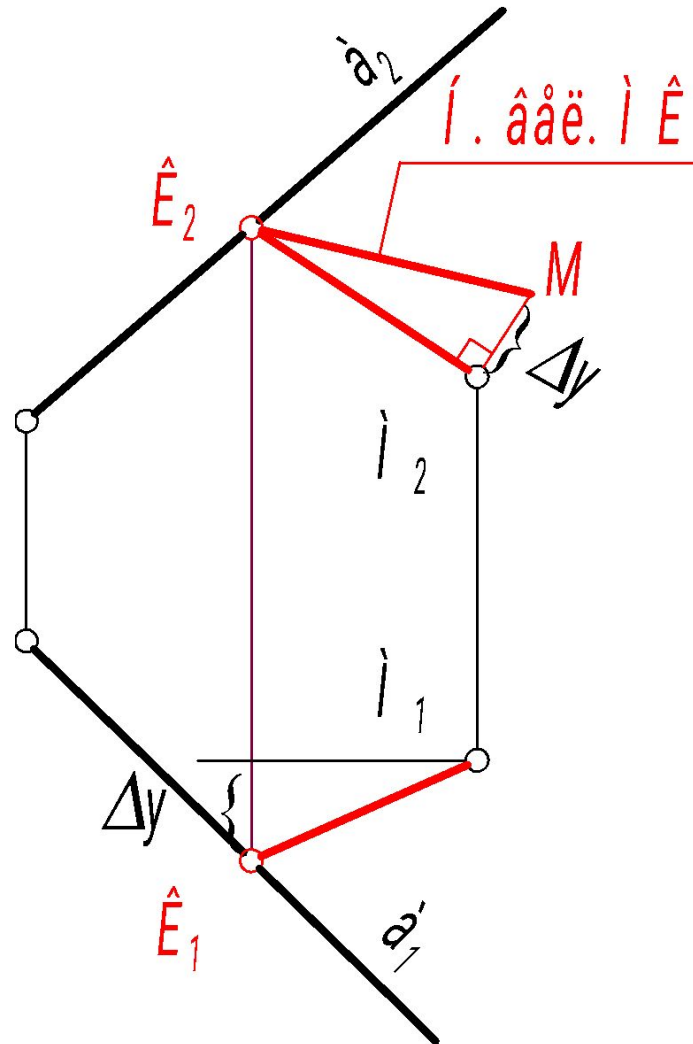


2 этап: Для построения перпендикуляра необходимо найти для него вторую точку. Это будет точка K , принадлежащая прямой a . Для её нахождения нужно решить позиционную задачу, то есть, найти точку пересечения прямой a с плоскостью Σ . Решаем 1ГПЗ по третьему алгоритму:

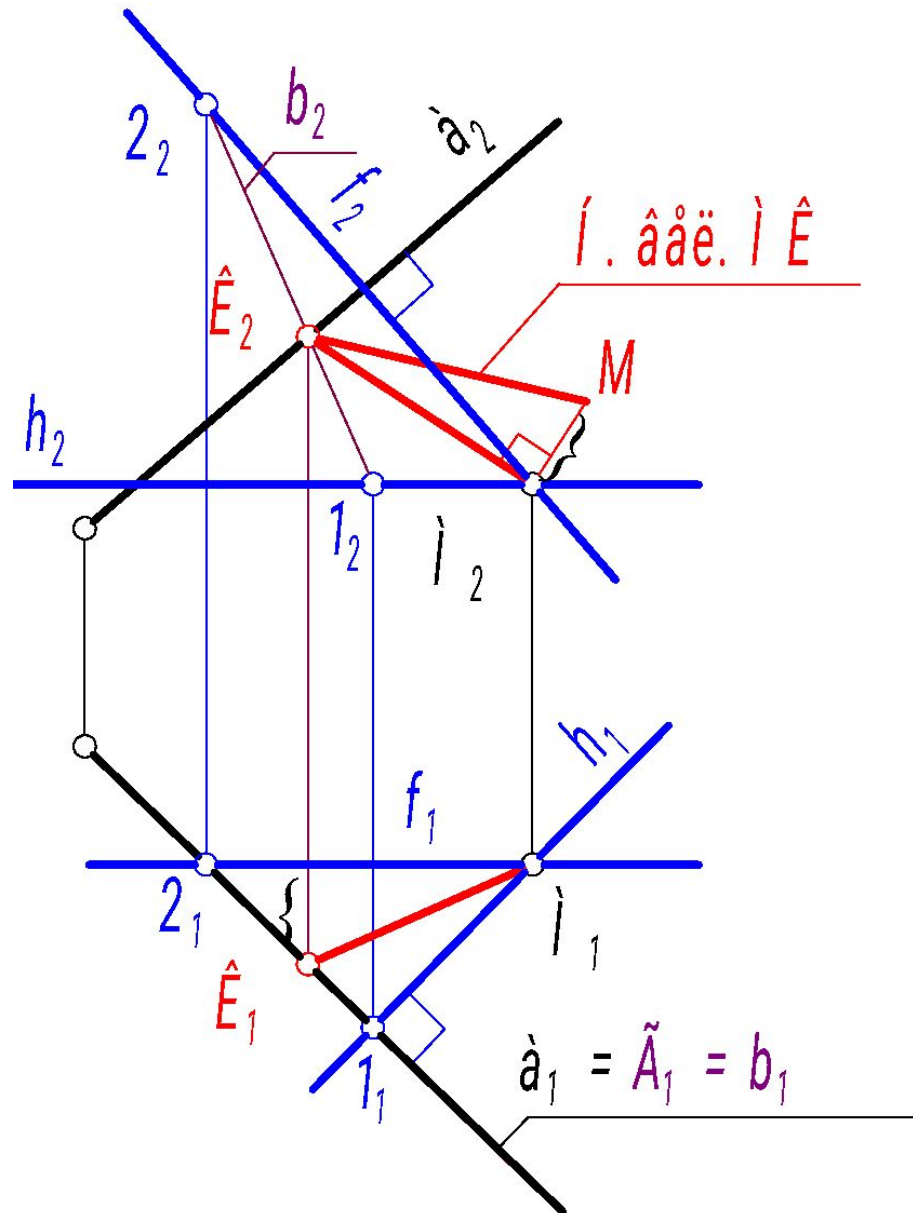
- вводим плоскость - посредник Γ , $\Gamma \perp \Pi_1$, $\Gamma \supset a \Rightarrow \Gamma_1 = a_1$;
- $\Gamma \cap \Sigma = b$, $\Gamma \perp \Pi_1 \Rightarrow b_1(1_1 2_1) = \Gamma_1$, $b \subset \Sigma \Rightarrow b_2(1_2 2_2) \subset \Sigma_2$.
- $b_2 \cap a_2 = K_2 \Rightarrow K_1$.



3 этап: Находим натуральную величину MK методом прямоугольного треугольника



Полное решение задачи



Алгоритмическая запись решения:

1. $\Sigma \perp a, \Sigma = h \cap f = M, h_1 \perp a_1, f_2 \perp a_2.$

2. Вводим плоскость - посредник Γ ,

- $\Gamma \perp \perp \Pi_1, \Gamma \supset a \Rightarrow \Gamma_1 = a_1;$

- $\Gamma \cap \Sigma = b, \Gamma \perp \perp \Pi_1 \Rightarrow b_1(1_1 2_1) = \Gamma_1, b \subset \Sigma$
 $\Rightarrow b_2(1_2 2_2) \subset \Sigma_2.$

- $b_2 \cap a_2 = K_2 \Rightarrow K_1.$

3. Находим натуральную величину $MK.$

Выводы:

1. Решение всех метрических задач сводится к решению первой основной метрической задачи - на взаимную перпендикулярность прямой и плоскости.
2. При определении расстояний между геометрическими фигурами всегда используется вторая основная метрическая задача - на определение натуральной величины отрезка.
3. Плоскость, касательную к поверхности в одной точке, можно задать двумя пересекающимися прямыми, каждая из которых является касательной к данной поверхности.