Математика

Исследование функции одной переменной

Производная функции

Определение. Производной функции **y =*f(x)*** в точке x называется конечный предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Замечание Производная функции в точке - это **число**. Если рассматривать множество чисел, на котором производная существует, то получают производную, как новую функцию. Производную обозначают: **y'(x); f'(x); y'.** Операция нахождения производной называется **дифференцированием.** Если функция имеет производную, то ее называют **гладкой.**

Простейшие правила дифференцирования

Пусть **u**= ***f(x)*** **,** **v = g(x)** - функции**,** **c**- постоянная.

1) Производная суммы или разности функций равна сумме или разности их производных**:** $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) Постоянный множитель **с** выносят за знак производной: $(c \cdot v)' = cv'$

3) Производная произведения**:** $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

4) Производная частного: $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Производные некоторых функций

1) $y=C$
<u>постоянная</u>

$(C)' = 0$

$(5)' = 0$

2) $y=ax+b$
<u>линейная</u> .

$(ax+b)'=a$

$(2x+4)'=2$

$(1-x)'=-1$

$(x-7)'=1$

3) $y= x^m$
<u>степенная</u>

$(x^m)' = mx^{m-1}$

$(x)' = 1$ $(m=1)$

$(x^2)' = 2x$ $(m=2)$

$(x^3)' = 3x^2$ $(m=3)$

. **Нахождение производных**

Примеры. Найти производные yꞌ.

1) y=5 y0= ꞌ

2) y =3-2x y2-= ꞌ

3) $y=3x^2-4x+7$ y6= ꞌx-4

4) $y=-4x^3+3x^2-4x+7$ y12-= ꞌx^2+6 x-4

Найти производную функции

$$y = \frac{3x-1}{2x+1}$$

$$y' = \left(\frac{3x-1}{2x+1}\right)' = \frac{(3x-1)'(2x+1)-(3x-1)(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2}$$

Исследование функций с помощью производных

Возрастание и убывание дифференцируемых функций.

Теоремы. Необходимое и достаточное условия возрастания функции.

1)Если функция f(x) **возрастает** на отрезке [a, b], то $f'(x) \geq 0$. на этом отрезке.

2) Если $f'(x)>0$, то f(x) **возрастает** на отрезке [a, b].

Теоремы. Необходимое и достаточное условия убывания функции.

1) Если функция f(x) **убывает** на отрезке [a, b], то $f'(x)\leq 0$ на этом отрезке.

2) Если $f'(x)<0$, то f(x) **убывает** на отрезке [a, b].

Возрастающие и убывающие функции называются монотонными.

Исследование на монотонность функции

- Исследовать на монотонность функцию $y=\dfrac{3x-1}{2x+1}$

$$y'=\left(\frac{3x-1}{2x+1}\right)'=\frac{(3x-1)'(2x+1)-(3x-1)(2x+1)'}{(2x+1)^2}=\frac{5}{(2x+1)^2}>0$$

- <u>функция возрастает на всей области определения</u>

Точки максимума и минимума функции.

Определение

Точка x_0 называется точкой максимума функции f(x), если существует такая окрестность точки x_0, что для всех значений x из этой окрестности выполняется неравенство

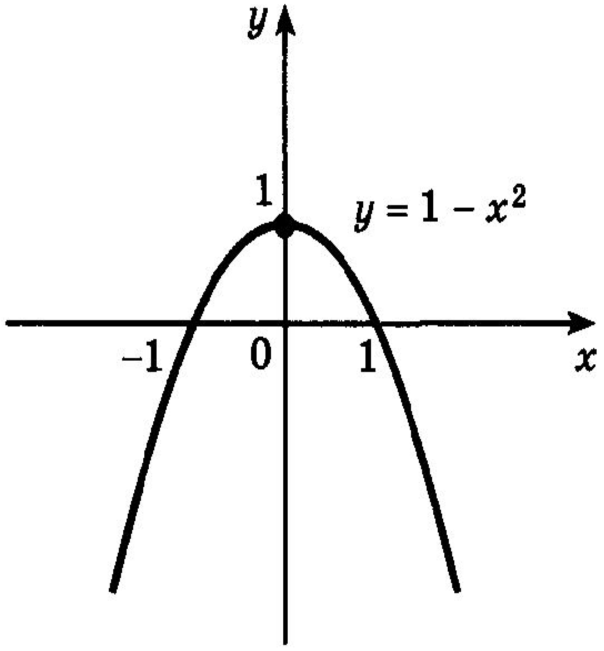
$$f(x) < f(x_0)$$

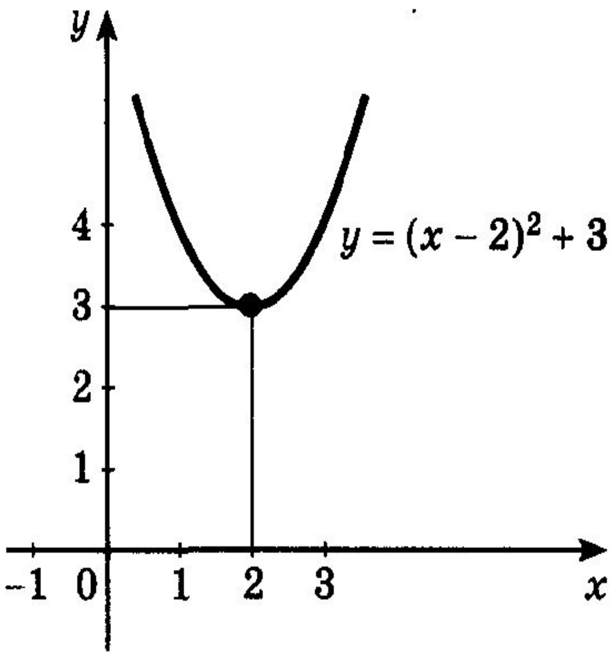
Точка x_0 называется точкой минимума функции f(x), если существует такая окрестность точки x_0, что для всех значений x из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0).$$

Примеры точек максимума и минимума

<u>Определение</u>. Точки максимума и минимума называются **точками экстремума**, а значения функции в этих точках- **экстремумами.**





Экстремумы функции y=f(x)

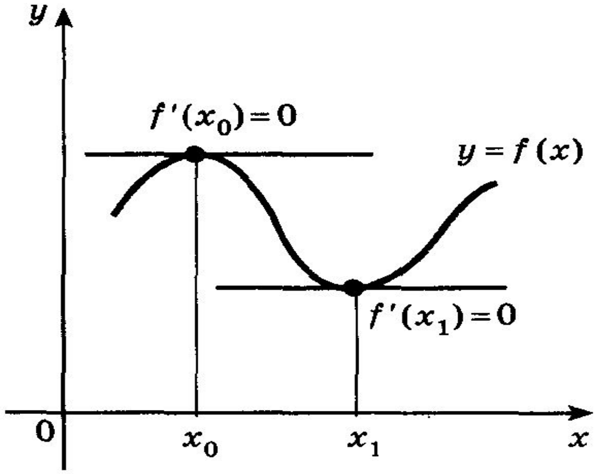
Теорема. (необходимое условие существования гладкого экстремума)

Если точка $\mathbf{x_0}$ является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке, т.е. $\mathbf{f'(x_0)=0}$.

Это утверждение называется теоремой Ферма .

При этом точка x_0 называется точкой гладкого экстремума.

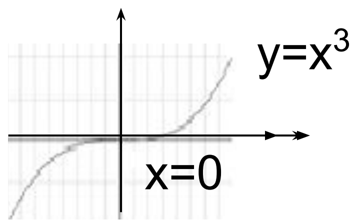
Геометрический смысл теоремы Ферма. Касательная к графику функции y=f(x) в точках гладкого экстремума параллельна оси 0x.



Стационарные точки функции

Определение. Стационарными точками функции называются точки, в которых производная функции равна нулю. Гладкий экстремум может находиться только в стационарных точках функции.

Замечание. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума, например, у функции y=x3 точка x=0 будучи стационарной точкой, не является точкой экстремума.(см. рис.)

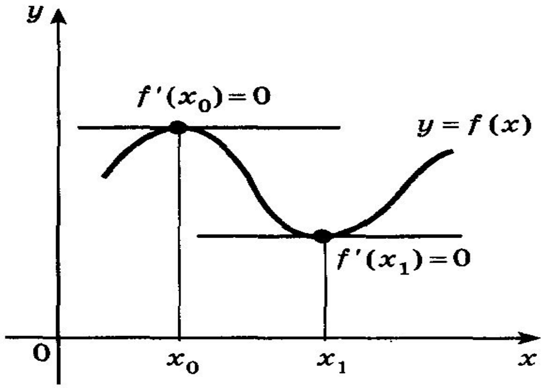


Достаточное условие гладкого экстремума.

<u>Теорема.</u> Пусть x_0 –стационарная точка функции.

1)Если при переходе через эту точку производная меняет знак с “+”на “-”, то x_0 - точка максимума.

2) Если при переходе через эту точку производная меняет знак с “- ” на “+”, то x_0 - точка минимума.



Порядок исследования функции на экстремум

1) Найти производную функции.

2)Приравнять к нулю производную и найти стационарные точки функции.

3)Нанести стационарные точки на числовую ось и разбить числовую ось этими точками на интервалы; на каждом интервале определить знак производной.

4)Найти точки максимума и минимума функции.

5)Вычислить максимумы и минимумы.

Пример 3 контрольной работы.

Исследования функции на экстремум и построить ее график

$y=-x^2-4x+1$

1) Найдем производную $y' = -2x - 4$

2) Приравняем ее к нулю для нахождения стационарной точки:

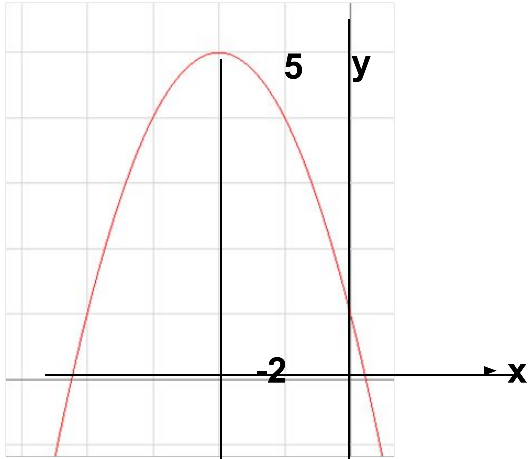
-2x-4=0 x=-2 стационарная точка.

3)Нанесем эту точку на числовую ось и получим два интервала ($-\infty$,-2) и (-2 , ∞).На левом интервале производная положительна (функция возрастает); на правом- отрицательна (функция убывает).

4) x=-2 –точка максимума.

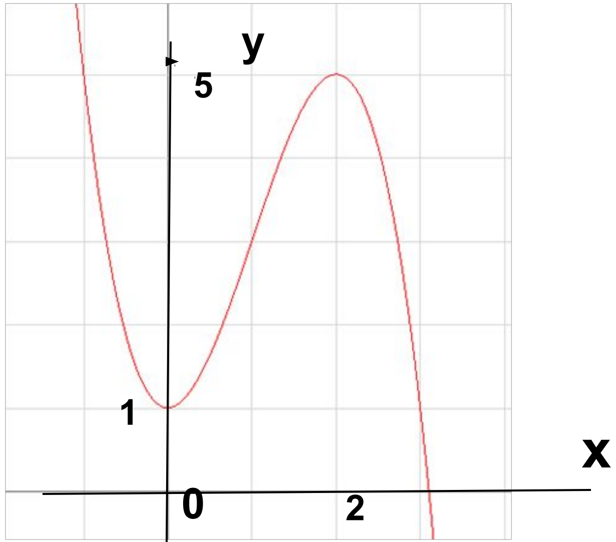
5) $y_{max}=y(-2)= -(-2)^2-4*(-2)+1=-4+8+1=5$

(см. график)



Пример 3 контрольной работы. Исследовать функцию на экстремум и построить ее график

- $y=-x^3 +3x^2 +1$
- 1) Найдем производную **y 3-=′x²+6x**
- 3) Приравняем ее к нулю для нахождения стационарной точки:
- $-3x^2 +6x=0$, откуда $x=0$ и $x=2$ - стационарные точки.
- 3) Нанесем эти точки на числовую ось и получим три интервала
- $(-\infty ,0)$;$(0 , 2)$ и $(2,\infty)$. На первом интервале производная отрицательна , на втором положительна , на третьем отрицательна .
- 4)) $x=0$ – точка минимума; $x=2$–точка максимума.
- 5) $y_{min}=y(0)=1$
- $y_{max}=y(2)= -(2)^3+3*(2)^2+1=-8+12+1=5$



Порядок исследования функции и построения графика

1)Область определения функции D (y).

2) Точки пересечения графика о осями координат:

а) с осью 0у: х=0, у(0); б) с осью 0х: у=0, f (x)=0.

3) Нахождение точек экстремума и экстремумов.

4) Нахождение асимптот графика:

а) вертикальных с уравнением **x = a** из условия

$y \to \infty$ при $x \to a$

б) горизонтальных с уравнением **y = b** из условия

$y \to b$ при $x \to \infty$

Пример 3 контрольной работы. Исследовать функцию и построить ее график

$$y=\frac{3x-1}{2x+1}$$

1) $D(y)=(-\infty;-0{,}5) \cup (-0{,}5;\infty)$

($x\neq -0{,}5$)

2) Точки пересечения с осями :

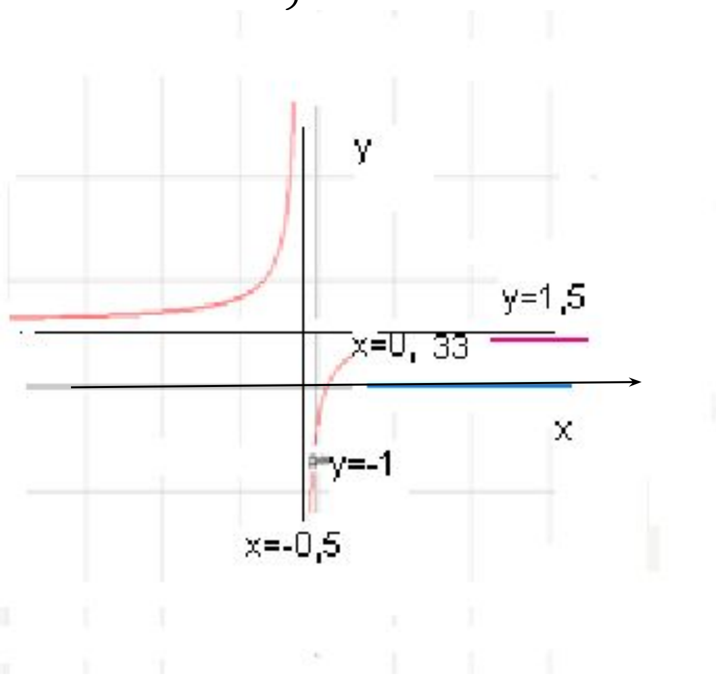
а) с осью 0у: $y(0)=-1$ б) с осью 0х: $3x-1=0$; $x=1/3$.

3) Функция возрастает т.к. ее производная положительна (см. выше)

4) а) Вертикальная асимптота $x= -0{,}5$;

б) горизонтальная асимптота $y=1{,}5$.

5) График имеет вид:



Тест по функции одной переменной

1. Производная функции $y= 3- 2x$ равна

   Δ 1 Δ 2 Δ -2 Δ -1

2 . Производная функции. $y= -x^2- 2x + 3$ в точке $x=0$ равна

   Δ 1 Δ 2 Δ -2 Δ -1

3. Функции $y = - x-3$

   Δ возрастает Δ убывает Δ имеет экстремум Δ постоянна

4. Функция $y=3x^2 +6x +2$ имеет минимум в точке

   Δ $x=0$ Δ $x=1$ Δ $x=-1$ Δ $x=-2$

5. Функция $y = - x^2 +6x +2$ имеет максимум в точке

   Δ $x=0$ Δ $x=3$ Δ $x=-1$ Δ $x=-2$