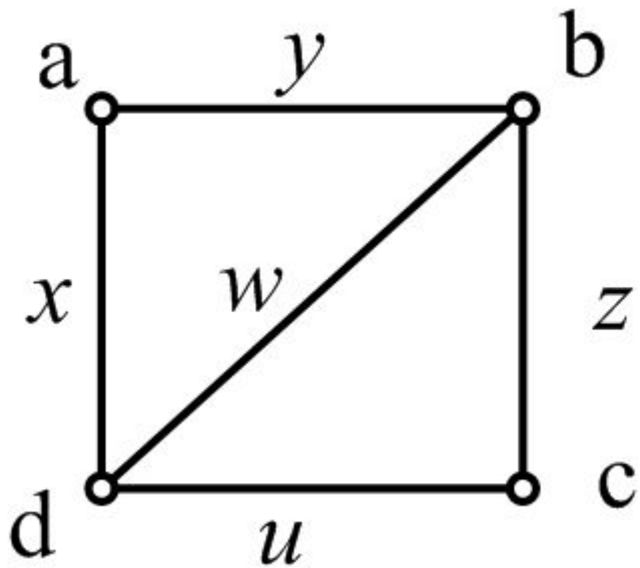
Лекция 8

Подстановки, сохраняющие изоморфизм

Оптимизационные алгоритмы

Автоморфизмы графа. Пример.



α_0 =(a)(b)(c)(d);

α_1=(a c)(b)(d);

α_2=(b d) (a) (c);

α_3=(a c) (b d);

Подгруппа группы

А – группа <М,°>.

Подгруппа группы А - группа **<$\mathbf{M_1}$,° >,** где $\mathbf{M_1}$ замкнуто относительно операции °.

Например, $\mathbf{M_1} = \{\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{0}}, \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{2}}\}$

Стабилизаторы

А – группа подстановок на множестве X.

Стабилизатор A(x) элемента x – **подгруппа** группы А, состоящая из всех подстановок А, оставляющих элемент неподвижным.

$A(a)=\{\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{0}}, \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{2}}\}$

$B(w)=\{\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{0}}, \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{2}}, \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{3}}\}$

Орбиты

A – группа подстановок на множестве X.

Орбита **θ(x)** элемента x – подмножество множества X, состоящее из всех элементов $y \in X$, что **α(x)=y.**

$\boldsymbol{\theta(a) = \{a, c\}}$

$\boldsymbol{\theta(w) = \{w\}, \theta(x) = \{x, y, u, z\}}$

Изоморфизм

Вершинная группа Г(G) индуцирует рёберную $Г_1(G)$.

Для **связных** p,q графов с $p \geq 3$группы Г(G) и $Г_1(G)$ изоморфны.

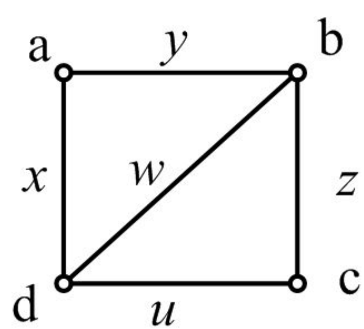
Изоморфизм

$\boldsymbol{\alpha_0 = (a)(b)(c)(d);}$ $\boldsymbol{\beta_0 = (x)(y)(z)(u)(w);}$

$\boldsymbol{\alpha_1 = (a\ c)(b)(d);}$ $\boldsymbol{\beta_1 = (ux)(yz)(w);}$

$\boldsymbol{\alpha_2 = (b\ d)\ (a)\ (c);}$ $\boldsymbol{\beta_2 = (xy)(uz)(w);}$

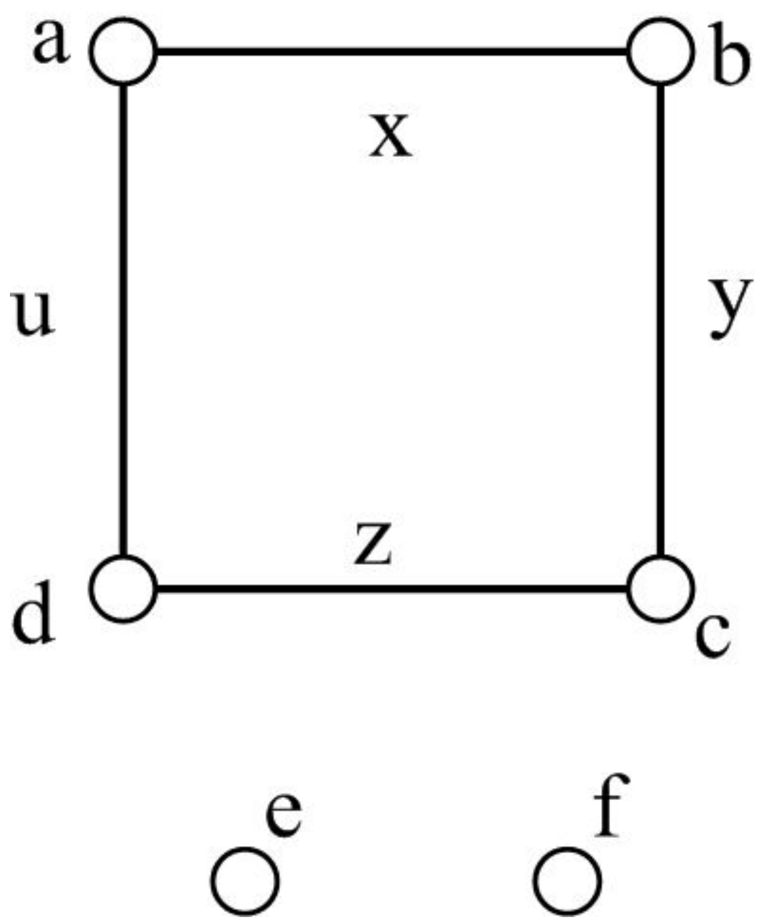
$\boldsymbol{\alpha_3 = (a\ c)\ (b\ d).}$ $\boldsymbol{\beta_3 = (xz)(uy)(w).}$



Изоморфизм

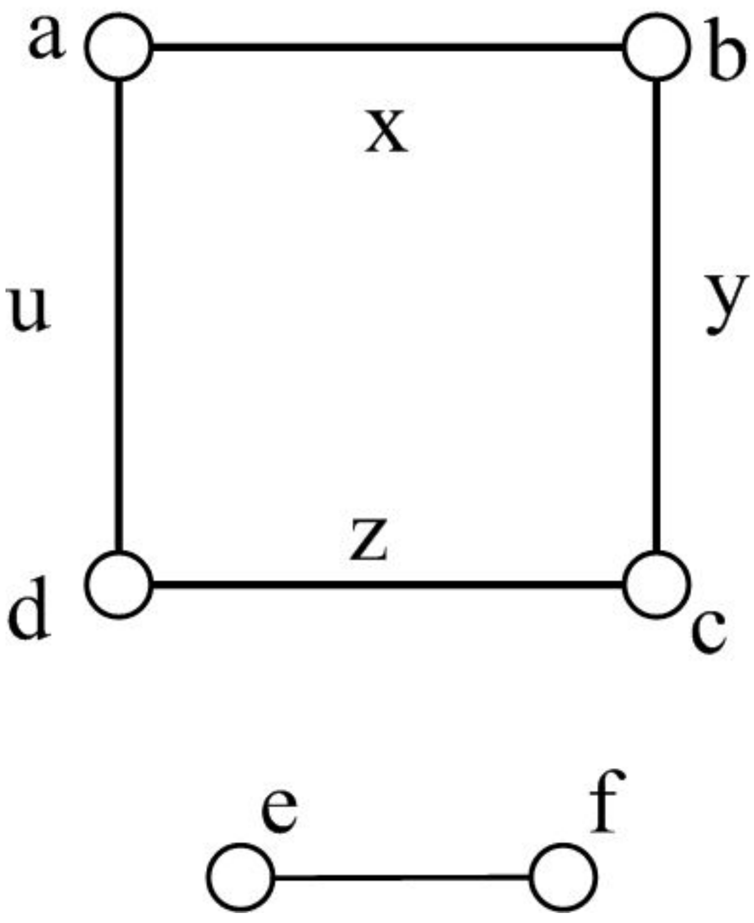
Рёберная и вершинная группы графа G изоморфны $\Leftrightarrow$ G имеет не более одной изолированной вершины, а K_2 не является его компонентой.

Изоморфизм?



$(a)(b)(c)(d)(ef) \neq e$

Изоморфизм?



(a)(b)(c)(d)(ef)≠e

Операции над группами

Пусть даны группы автоморфизмов Г $(G_a) = \langle A, \circ \rangle$ и $\Gamma(G_b) = \langle B, \circ \rangle$. $|A|$ - порядок группы $\Gamma(G_a)$, $|B|$ - порядок группы $\Gamma(G_b)$.

Группа $\Gamma(G_a)$ действует на множестве вершин $V_a = \{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$. Группа $\Gamma(G_b)$ действует на множестве $V_b = \{y_1, y_2, \ldots, y_e\}$.

$V_a \cap V_b = \varnothing$. $|V_a|$ - степень группы $\Gamma(G_a)$. $|V_b|$ - степень группы $\Gamma(G_b)$.

Сложение групп

$\Gamma = \Gamma(G_a) + \Gamma(G_b)$

Группа Г действует на множестве $V_a \cup V_b$.

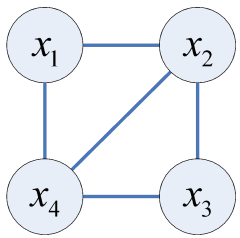
$$(\alpha_i + \beta_j)(z) = \begin{cases} \alpha_i(z) \text{ если } z \in V_a \\ \beta_j(z) \text{ если } z \in V_b \end{cases}$$

Степень группы Г равна $|V_a| + |V_b|$.

Порядок группы Г равен $|A| * |B|$.

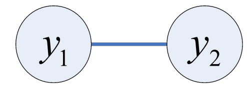
Пример. Сложение групп

Дано: $G_a:$



$$A:\alpha_0=(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)$$
$$\alpha_1=(x_1x_3)(x_2)(x_4)$$
$$\alpha_2=(x_2x_4)(x_1)(x_3)$$
$$\alpha_3=(x_1x_3)(x_2x_4)$$

$G_b:$



$$B:\beta_0=(y_1)(y_2)$$
$$\beta_1=(y_1y_2)$$

$$(\alpha_1+\beta_0)x_1=x_3$$
$$(\alpha_1+\beta_0)x_3=x_1$$
$$(\alpha_1+\beta_0)x_2=x_2$$
$$(\alpha_1+\beta_0)x_4=x_4$$
$$(\alpha_1+\beta_0)y_1=y_1$$
$$(\alpha_1+\beta_0)y_2=y_2$$

$$(\alpha_1+\beta_0)=(x_1x_3)(x_2)(x_4)(y_1)(y_2)$$

$$(\alpha_3+\beta_1)=(x_1x_3)(x_2x_4)(y_1y_2)$$

Перечисление графов

Умножение групп

$\Gamma = \Gamma(G_a) \times \Gamma(G_b)$

Группа Г действует на $V_a \times V_b = \{(x,y) \mid x \in V_a, y \in V_b\}$

$\alpha \in \Gamma \rightarrow \alpha = (\alpha_i, \beta_j)$

$\alpha(x,y) = (\alpha_i, \beta_j)(x,y) = (\alpha_i(x), \beta_j(y))$

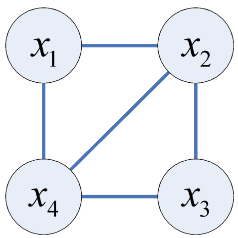
Степень группы Г равна e*d,

Порядок группы Г равен |A|*|B|.

Произведение групп

Дано:

$G_a:$



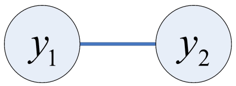
$A:\alpha_0=(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)$

$\alpha_1=(x_1x_3)(x_2)(x_4)$

$\alpha_2=(x_2x_4)(x_1)(x_3)$

$\alpha_3=(x_1x_3)(x_2x_4)$

$G_b:$



$B:\beta_0=(y_1)(y_2)$

$\beta_1=(y_1y_2)$

$$\alpha_2\beta_1(x_1y_1)=(\alpha_2(x_1),\beta_1(y_1))=x_1y_2$$

$$\alpha_2\beta_1(x_1y_2)=x_1y_1$$

$$\alpha_2\beta_1(x_2y_1)=x_4y_2$$

$$\alpha_2\beta_1(x_4y_2)=x_2y_1$$

$$\alpha_2\beta_1(x_2y_2)=x_4y_1$$

$$\alpha_2\beta_1(x_4y_1)=x_2y_2$$

$$\alpha_2\beta_1(x_3y_1)=x_3y_2$$

$$\alpha_2\beta_1(x_3y_2)=x_3y_1$$

$$\alpha_2\beta_1=(x_1y_1,x_1y_2)(x_2y_1,x_4y_2)(x_2y_2,x_4y_1)(x_3y_1,x_3y_2)$$

Перечисление графов

Композиция групп

$$\Gamma = \Gamma_a\left[\Gamma_b\right]$$

$$\left[\alpha; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_d\right]$$

d подстановок из Γ_b, необязательно различных

Действует на $V_a \times V_b = \{(x,y) \mid x \in V_a, y \in V_b\}$

Степень группы Г равна d*e

Порядок Г равен $|A| * |B|^d$

©П.Порешин

Операции на группах подстановок

			Сумма	Произведение	Композиция
Группа	A	B	A+B	A×B	A[B]
Объекты	X	Y	$X \cup Y$	X×Y	X×Y
Порядок	m	n	mn	mn	mn^d
Степень	d	e	d+e	de	de

Классификация групп подстановок степени p

Название	обозначение	порядок	вид
Симметрическая	S_p	p!	Все на {1,2,…,p}
Знакопеременная	A_p	p!/2	Чётные на {1,2,…,p}
Циклическая	C_p	p	Порожденные (12…p)
Диэдральная	D_p	2p	Порождённые (12…p) и (1 p)(2 p-1)…
Тождественная	E_p	1	(1)(2)…(p)

Теоремы

Группа $\Gamma(G)$ - $S_n \Leftrightarrow G=K_n$ или $G = \overline{K_n}$

Если G - простой цикл длины n, то $\Gamma(G)=D_n$.

Теоремы

Граф и его дополнение имеют одну и ту же группу:

$$\Gamma(G) = \Gamma(\overline{G})$$

Если G_1 и G_2 - непересекающиеся связные не изоморфные графы, то

$$\Gamma(G_1 \cup G_2) = \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2)$$

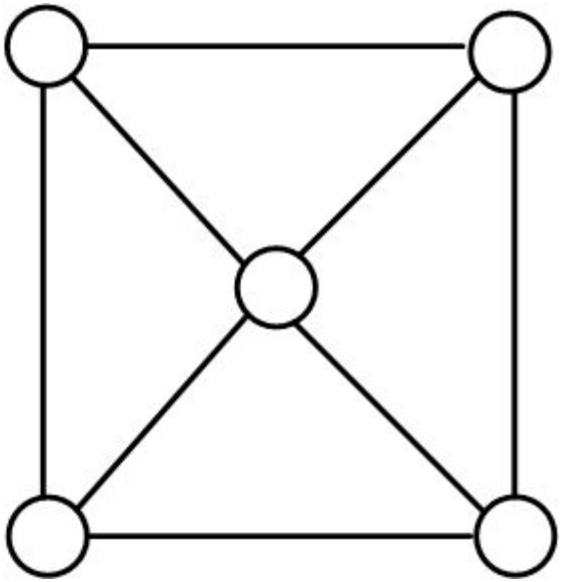
Простой граф

Не тривиальный граф G называется ***простым***, если разложение $G=G_1 \times G_2$ возможно тогда, когда или G_1 , или G_2 - тривиальный граф.

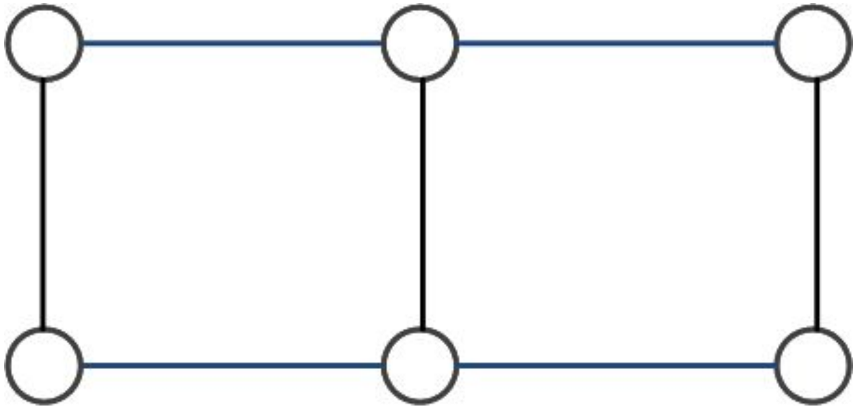
Граф называется ***составным***, если он не является простым.

Примеры

Простой



Не простой



Группа произведения

Группа произведения идентична произведению их групп, т.е.

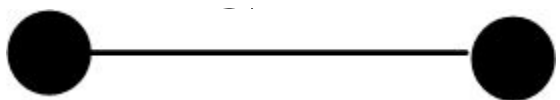
$\Gamma(G_1 \times G_2) = \Gamma(G_1) \times \Gamma(G_2)$

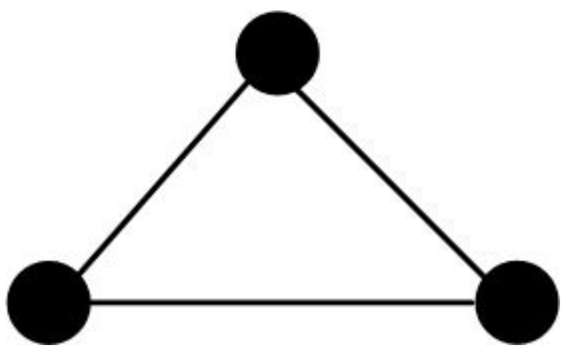
$\Leftrightarrow$

G_1 и G_2 – взаимно простые графы.

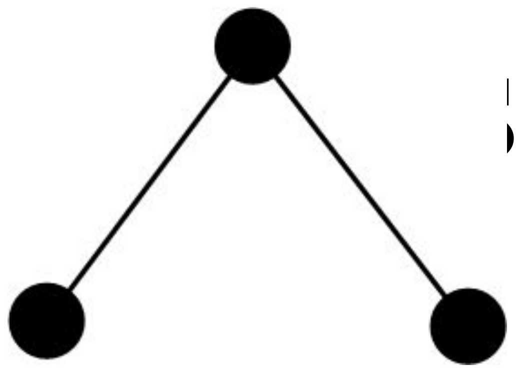
Группа некоторых графов

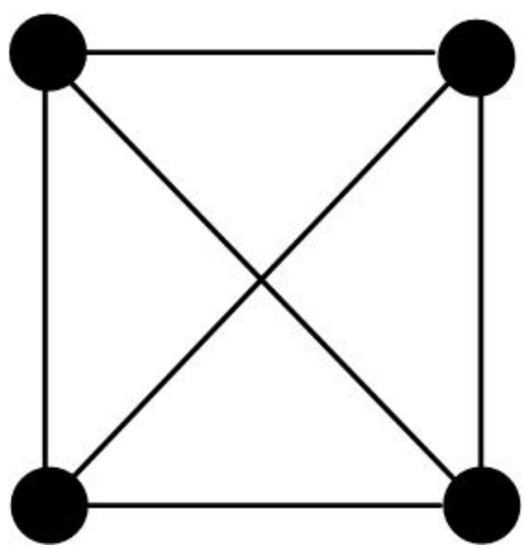
S_1



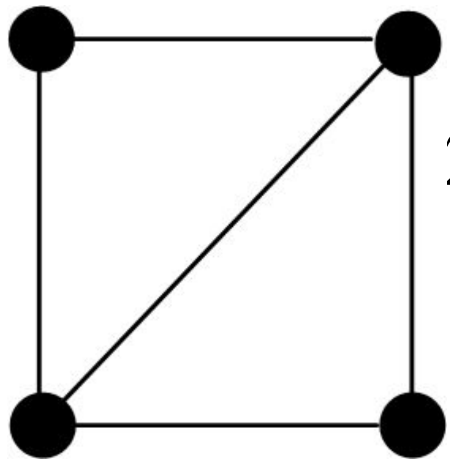


Группа некоторых графов

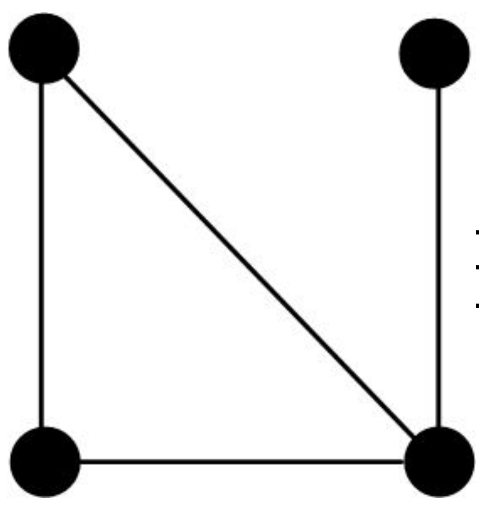




Группа некоторых графов



2



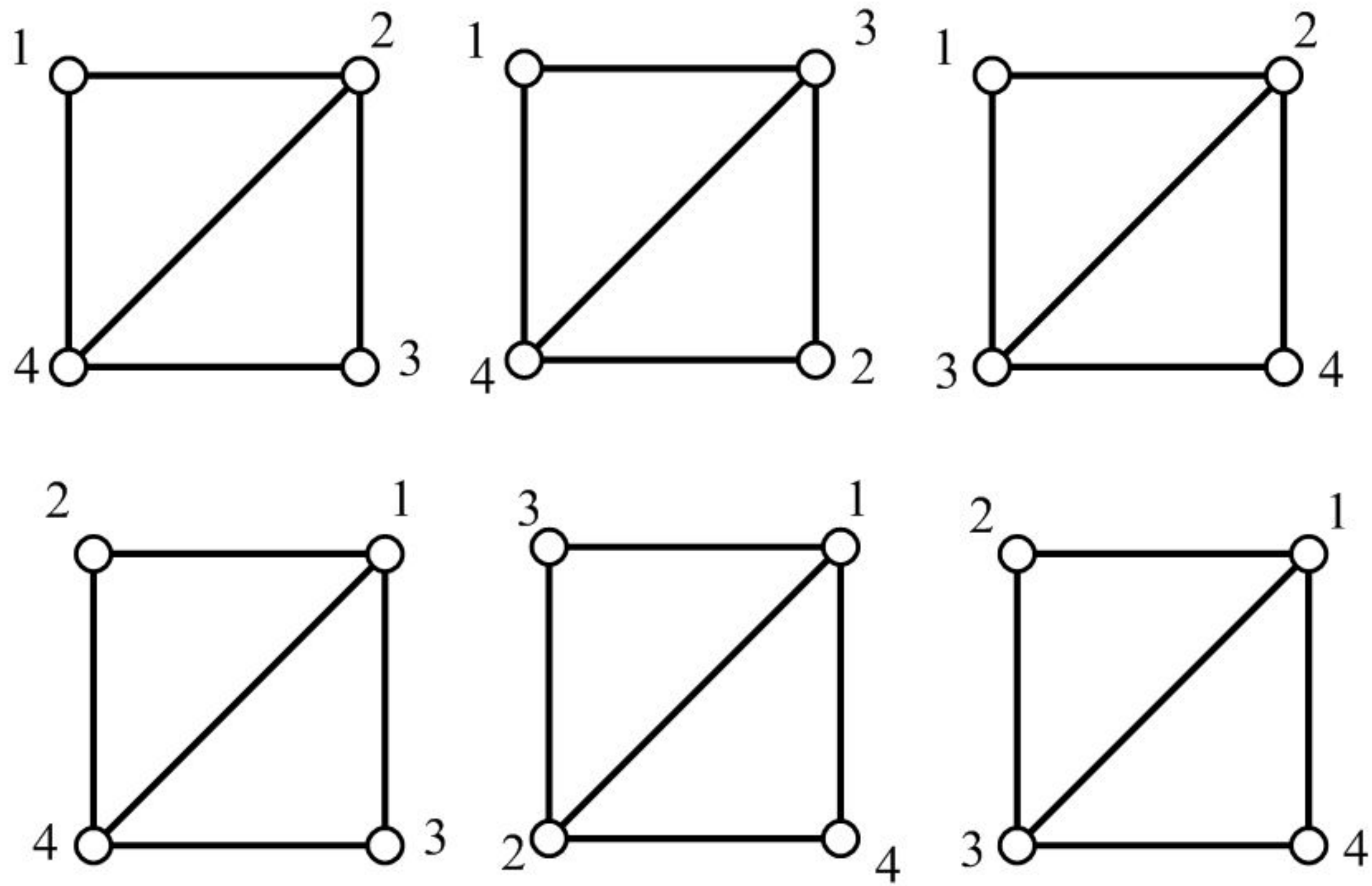
2

Число способов пометить граф

Помечаются вершины p,q графа числами от 1 до p.

Теорема: Данный граф G можно пометить $p!/|\Gamma(G)|$ способами

Пример:4!/4=6



Цикловой индекс группы

A – группа порядка m и степени d

$$Z(A) = \frac{1}{|A|} \sum_{\alpha \in A} \prod_{k=1}^{d} s_k^{j_k(\alpha)}$$

($1j_1+2j_2+\ldots dj_d= d$ для любой $\alpha \in A$)

Цикловой индекс группы. Пример

α_0 =(a)(b)(c)(d); $\quad$ **$s_1{}^4$**

α_1=(a c)(b)(d); $\quad$ **$s_2{}^1 s_1{}^2$**

α_2=(b d) (a) (c); $\quad$ **$s_2{}^1 s_1{}^2$**

α_3=(a c) (b d); $\quad$ **$s_2{}^2$**

$$Z(A) = \frac{1}{|4|}(s_1^4 + 2s_2^1 s_1^2 + s_2^2)$$

Цикловой индекс группы. Пример

$\boldsymbol{\beta_0 = (x)(y)(z)(u)(w);} \qquad \boldsymbol{s_1{}^5}$

$\boldsymbol{\beta_1 = (ux)(yz)(w);} \qquad \boldsymbol{s_2{}^2 s_1{}^1}$

$\boldsymbol{\beta_2 = (xy)(uz)(w);} \qquad \boldsymbol{s_2{}^2 s_1{}^1}$

$\boldsymbol{\beta_3 = (xz)(uy)(w);} \qquad \boldsymbol{s_2{}^2 s_1{}^1}$

$$Z(A) = \frac{1}{|4|}(s_1^5 + 3s_2^2 s_1^1)$$

К теореме Пойа

D -область определения,

R - множество значений,

ω - весовая функция, приписывающая каждому $r \in R$ упорядоченную пару $\omega(r) = (\omega_1(r), \omega_2(r))$.

Например, будем раскрашивать вершины графа в два цвета – синий, красный. Тогда D - множество вершин, R – множество цветов (красный, синий),

ω(красный)=(1,0), ω(синий)=(0,1). R.

К теореме Пойа

Объекты, подлежащие счёту – функции из D в R.

Элементы области определения – места, элементы множества значений – фигуры, функции называются конфигурациями, группа подстановок – группа конфигураций.

К теореме Пойа

Пусть имеется c_{mn} фигур с весом (m,n) и C_{mn} конфигураций с весом $x^m y^n$.

Перечисляющий ряд для фигур $c(x,y)=\Sigma\, c_{mn}\, x^m y^n$ нумерует элементы из R, приписывая им веса, а перечисляющий ряд для конфигураций $C(x,y)=\Sigma\, C_{mn}\, x^m y^n$ – производящая функция для классов эквивалентности функций $f \in R^D$.

Теорема Пойа

Если записать $Z(A)=Z(A;a_1, a_1,\dots a_d)$, то для любой функции $h(x,y)$

$$Z(A,h(x,y))=Z(A;\ h(x,y),\ h(x^2,y^2),\dots\ h(x^d,y^d))$$

Теорема перечисления Пойа:

Перечисляющий ряд для конфигураций получается подстановкой перечисляющего ряда для фигур в цикловой индекс группы конфигураций, т.е.

$C(x,y)= Z(A,c(x,y))$.

Теорема Пойа. Пример.

$Z(A,h(x,y))=Z(A;\ h(x,y),\ h(x^2,y^2),\dots\ h(x^d,y^d))$

$h(x,y)=x+y,\ h(x^2,y^2)=x^2+y^2$

$$Z(A)=\frac{1}{|4|}(s_1^4+2s_2^1s_1^2+s_2^2)$$

Теорема Пойа. Пример.

$$Z(A) = \frac{1}{|4|}(s_1^4 + 2s_2^1 s_1^2 + s_2^2)$$

$$Z(A) = \frac{1}{|4|}((x+y)^4 +$$

$$2(x^2 + y^2)(x+y)^2 +$$

$$(x^2 + y^2)^2)$$

Теорема Пойа. Пример.

$Z(A)=1/4(x^4+4x^3y+6\ x^2y^2+4xy^3\ +y^4$

$+2(x^2+y^2\ )\ (x^2+2xy+y^2\ )\ +\ x^4+\ 2x^2y^2\ +y^4)\ =$

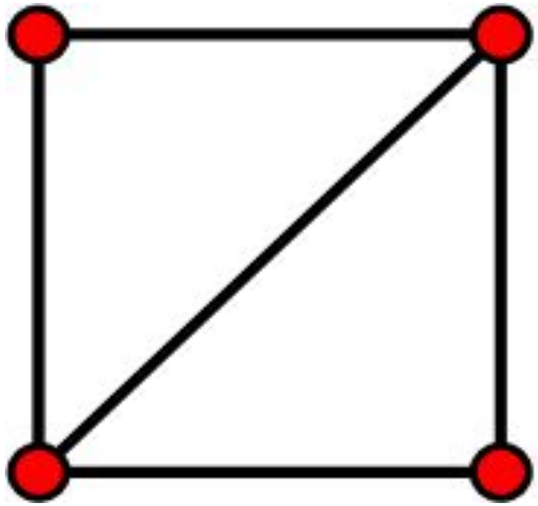
$1/4(2x^4+4x^3y+8x^2y^2+4xy^3$

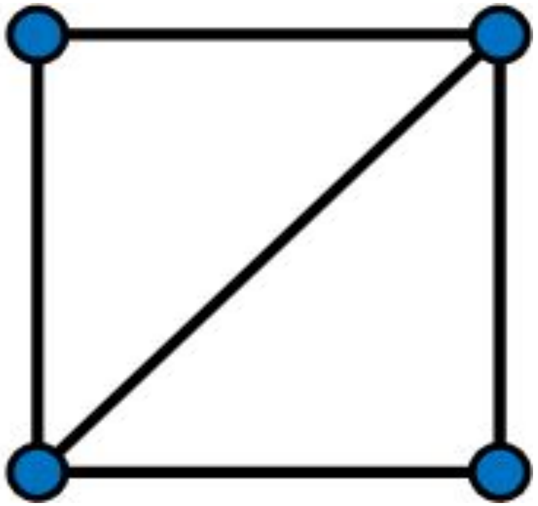
$+2y^4+2x^4+4x^3y+2x^2y^2+2x^2y^2+4xy^3\ +2y^4)=$

$1/4(4x^4+8x^3y+12x^2y^2+8xy^3+4y^4)=$

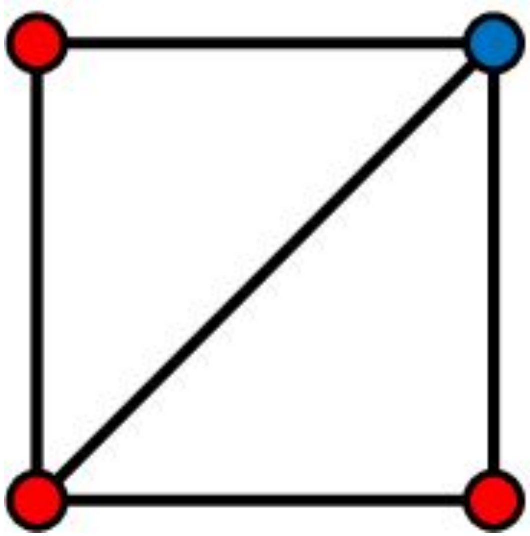
$x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4$

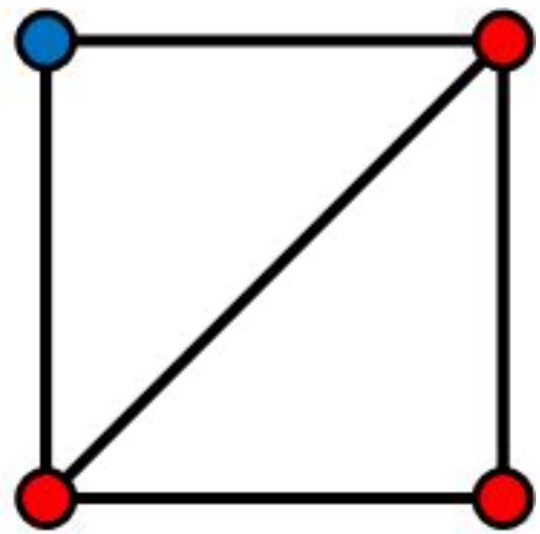
Раскраска в 1 цвет



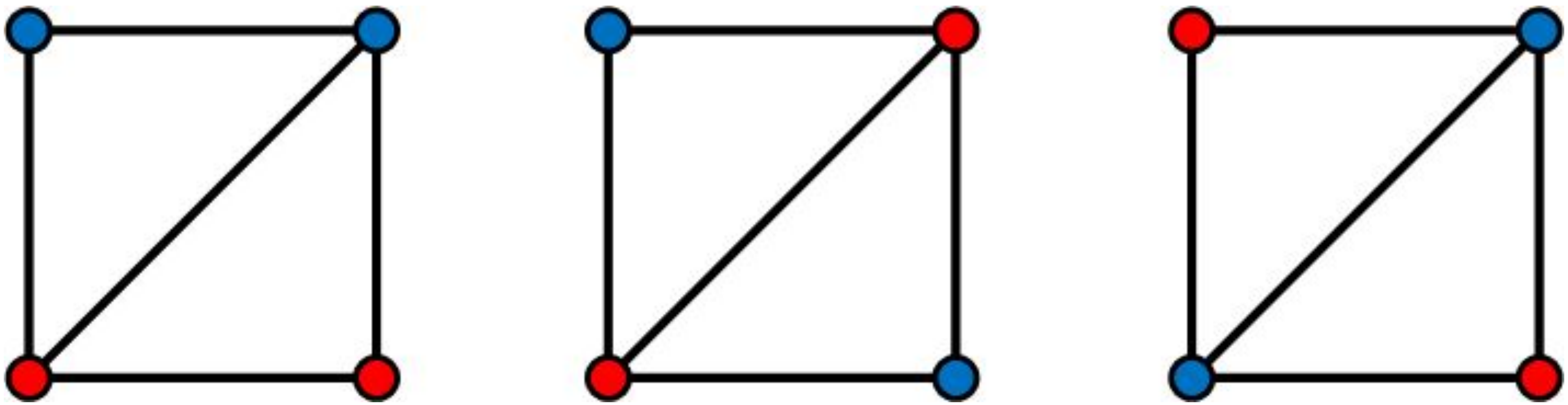


Раскраска 3+1





Раскраска 2+2



Оптимизационные алгоритмы

Нахождение оптимальных решений
для взвешенных графов

Минимальное стягивающее дерево для ориентированного графа

v_0- корень, каждая вершина достижима из v_0. Стягивающее дерево – дерево, указывающее путь из корня до каждой вершины.

Стягивающее дерево минимально, если для каждой вершины $v_i \neq v_0$ путь по рёбрам дерева из корня имеет минимальный вес (сумма весов рёбер).

Пусть построено минимальное стягивающее дерево. Для каждой вершины проставлено $L(v)$ – вес пути от корня до v. Если дерево минимально, то для любой хорды из w в v справедливо: $L(v) \leq L(w)+l(w,v)$.

Минимальное стягивающее дерево для взвешенного ориентированного графа

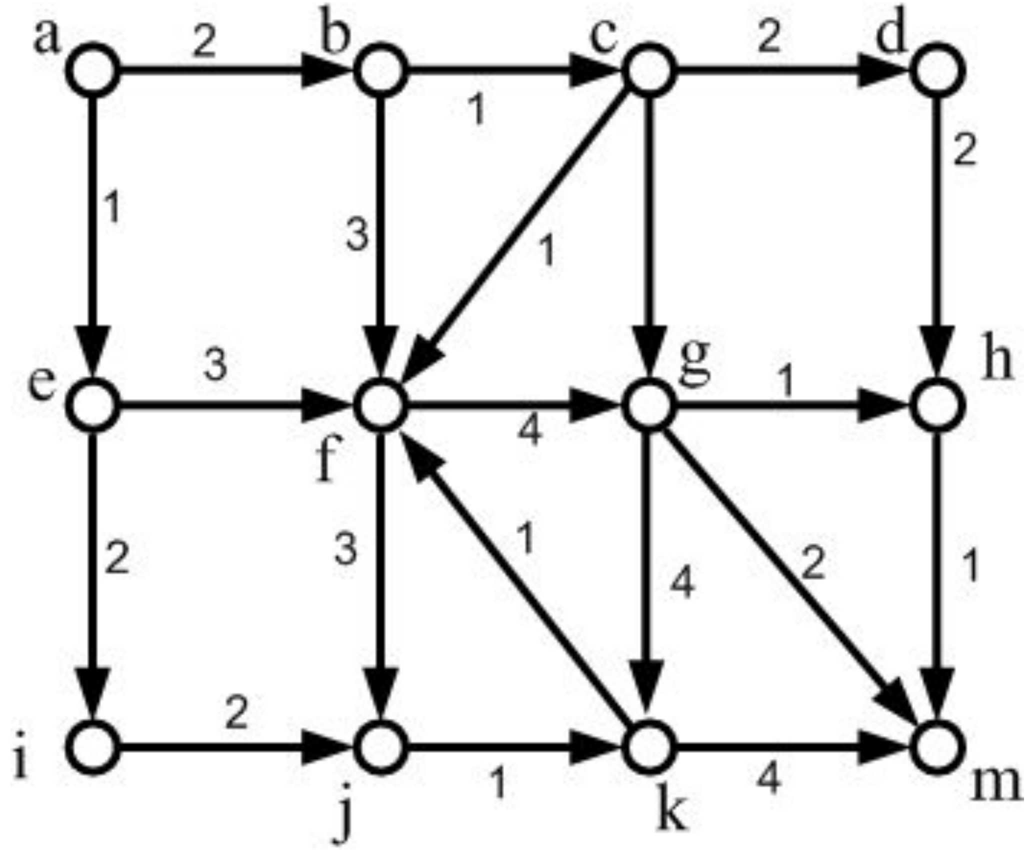
Алгоритм

Строим произвольное стягивающее дерево.

Идём по дереву от корня, проверяя хорды (просматривая последовательно вершины, достижимые за 2, … шагов). Если условие $\boldsymbol{L(v) \le L(w)+l(w,v)}$ не выполнено, то исключаем в дереве дугу, ведущую в ***v***, включая вместо неё дугу ***(w,v)***.

В результате получаем минимальное стягивающее дерево.

Кратчайшее стягивающее дерево. Пример



Критический (самый длинный) путь (Задача сетевого планирования).

Нумеруем вершины (если есть дуга (x_i,x_j), то $i<j$). Возможно в силу ацикличности графа. Корень – вершина, для которой нет входящих дуг. Затем – те, в которые ведут дуги только из корня и т.д.

$L(x_i)$ – пометка i-ой вершины, длина самого длинного пути.

$$L(x_i)=max\{L(x_j)+l(x_j,x_i)\} \text{для всех } x_j \in \Gamma^{-1}(x_i)$$

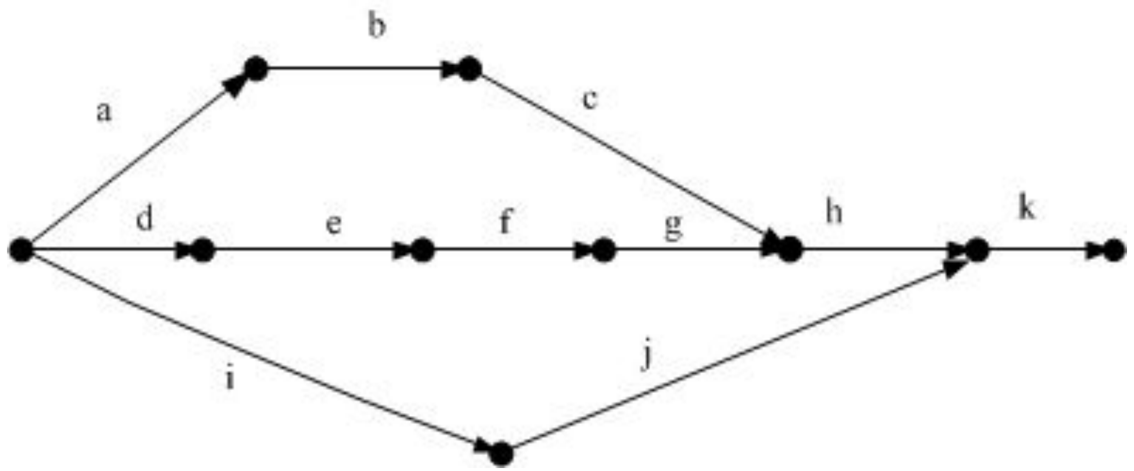
Задача сетевого планирования.

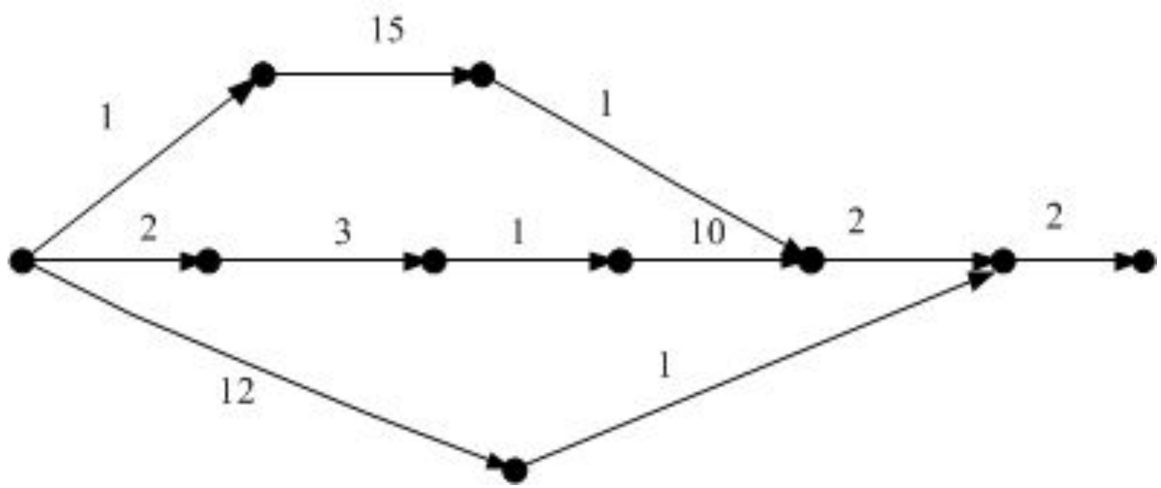
***Пример*. Требуется установить электродвигатель на фундаментной плите.**

В операцию входят следующие работы:

a) оформление заказа на фундаментную плиту;
b) изготовление фундаментной плиты;
c) перевозка плиты;
d) подготовка основания под фундамент
e) устройство опалубки для фундамента;
f) бетонирование фундамента;
g) твердение бетона
h) монтаж фундаментной плиты;
i) заказ и получение со склада двигателя;
j) перевозка двигателя;
k) монтаж двигателя.

Задача сетевого планирования.Пример





Алгоритм нахождения кратчайших путей между **s** и **t**

Взвешенный неориентированный граф

***1.Dist*(s)=0** , считаем пометку постоянной. Для всех $\mathbf{x_i \neq s}$ устанавливаем временные пометки $\boldsymbol{Dist}(\mathbf{x_i})=\infty$. Устанавливаем **p= s**.

2.Обновление пометок. Для всех $\mathbf{x_i \in \Gamma(p)}$, пометки которых временные, изменяем пометки по правилам:

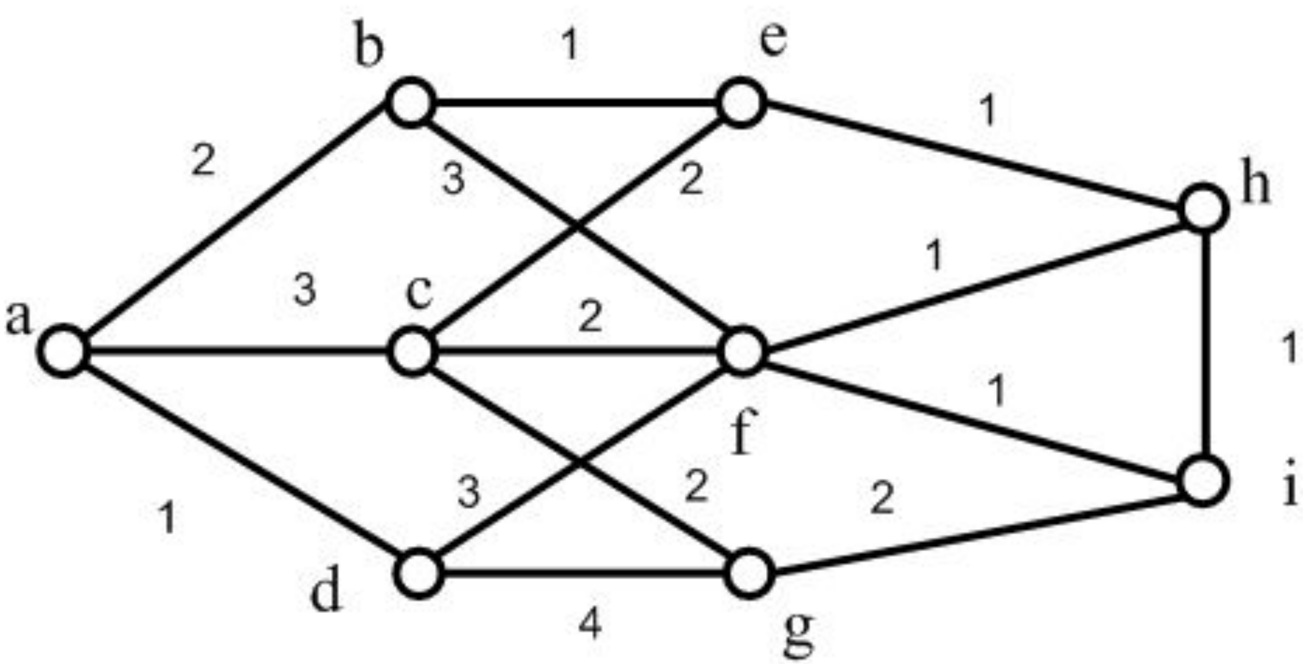
$\boldsymbol{Dist(x_i)=min\{\, Dist(x_i),\ Dist(p)+c(p,\ x_i)\}}$,

где $\boldsymbol{c(p,\ x_i)}$ – расстояние между **p** и $\mathbf{x_i}$.

Алгоритм нахождения кратчайших путей между **s** и **t**

3. Среди всех вершин выбираем $\boldsymbol{x_i}$***** такую, что $\boldsymbol{Dist(x_i^*)=min\{ Dist(x_i) \}}$, где минимум берётся по всем временным пометкам. Считаем пометку $\boldsymbol{Dist(x_i^*)}$ постоянной. Устанавливаем **p**=$\boldsymbol{x_i}$*.
4. Если **p= t** – конец, иначе возвращаемся к шагу 2.

Алгоритм нахождения кратчайших путей между **s** и **t**



Задачи

1. Построить автоморфизмы для заданного графа
2. Найти граф по заданным автоморфизмам.
3. Найти число способов раскраски графа в заданное число цветов.
4. Найти число способов пометить граф.