

Тема 3. Нарушения предпосылок МНК

1. Мультиколлинеарность
2. Гетероскедастичность
3. Автокорреляция

Мультиколлинеарность (МТК) – это явление высокой взаимной коррелированности НП.

Два вида МТК:

- 1) совершенная (строгая, полная)
- 2) несовершенная (частичная)

Полная МТК при наличии функциональных связей между НП.

Это нарушение требования к рангу матрицы:

- 1) $\text{rank } X < p + 1$
- 2) $\det X'X = 0$

$$B = (X'X)^{-1} X'Y$$

Частичная (реальная) МТК при сильных корреляционных связях между НП (высокие коэффициенты парной корреляции).

Если значения коэффициентов корреляции по абсолютной величине близки к 1, то почти совершенная МТК

Последствия МТК:

- Оценки коэффициентов УМР ненадежны и неустойчивы (увеличиваются стандартные ошибки оценок и уменьшаются t -статистики МНК-оценок)
- МНК-оценки коэффициентов неустойчивы (чувствительны к изменениям данных и размерности выборки)
- Возможность получения неверного знака у коэффициентов регрессии

Последствия МТК:

- Оценки коэффициентов УМР становятся очень чувствительными к ошибкам спец.
- Осложнение процесса определения наиболее существенных факторов
- Затрудняет экономическую интерпретацию коэффициентов УМР (выделение характеристик влияния факторов на ЗП в чистом виде)

ОДНАКО:

- Оценки коэффициентов остаются несмещенными
- Оценки коэффициентов немультим. факторов не ухудшаются

Практические рекомендации по выявлению МТК:

1. Плохая обусловленность матрицы $(X'X)$, т.е. $\det(X'X) \approx 0$
2. Близость к нулю минимального собственного числа λ_{\min} матрицы $(X'X)$.

$$\left| X'X - \lambda I_{p+1} \right| = 0$$

Практические рекомендации по выявлению МТК:

4. Анализ матрицы парных коэффициентов корреляции между НП (матрицы межфакторной корреляции)

Присутствие в матрице парных коэффициентов корреляции значений коэффициентов интеркорреляции, превосходящих по абсолютной величине 0,7 – 0,80

Результаты анализа надежны лишь в случае двух НП

Практические рекомендации по выявлению МТК:

6. Анализ показателей частной корреляции

Коэффициент корреляции между двумя переменными, очищенный от влияния других переменных, наз. частным коэф. корреляции (ЧКК)

Методы устранения мультиколлинеарности

5. Переход к смещенным методам оценивания

«Ридж – регрессия» («гребневая регрессия»)

$$\mathbf{B}_{\tau} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X} + \tau\mathbf{I}_{p+1} \right)^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

$$\tau_0 \approx 0.1 - 0.4$$

2. Гетероскедастичность



Гомоскедастичность

1) $D(\varepsilon_i) = D(\varepsilon_j)$ для любых i и j

Гетероскедастичность

2) $D(\varepsilon_i) \neq D(\varepsilon_j)$ для любых i и j

Методы обнаружения гетероскедастичности:

1. **Графический анализ остатков**
2. **Тест ранговой корреляции Спирмена**
3. **Тест Голдфелда-Квандта**
4. **Тест Глейзера**
5. **Тест Парка**
6. **Тест Бреуша-Пагана**
7. **Тест Уайта**

1. Тест Бреуша-Пагана

$$BP = ESS / [2(RSS / n)^2]$$

2. Тест Уайта

$$\chi^2 = nR^2$$

Обобщенный метод наименьших квадратов

Теорема. Если в схеме Гаусса-Маркова не выполняется предпосылка о гомоскедастичности и некорелированности случайных возмущений, то наилучшей линейной процедурой оценки параметров модели является:

$$\mathbf{b} = \left(\mathbf{X}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}$$

\mathbf{P} - матрица ковариаций случайных возмущений
(положительно определенная матрица)

Взвешенный метод наименьших квадратов

Теорема. Если в схеме Гаусса-Маркова не выполняется предпосылка о гомоскедастичности случайных возмущений, то наилучшей линейной процедурой оценки параметров модели является:

$$\mathbf{b} = \left(\mathbf{X}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}$$

\mathbf{P} - матрица ковариаций случайных возмущений :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \sigma^2(e_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2(e_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2(e_n) \end{pmatrix}$$

3. Автокорреляция



Понятие автокорреляции

Модель называется

автокоррелированной, если не выполняется третья предпосылка теоремы Гаусса-Маркова:

$$\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0 \text{ при } i \neq j.$$

Автокорреляция чаще всего появляется в моделях временных рядов и моделировании циклических процессов.

Причины АК :

- 1) неправильный выбор спецификации модели
- 2) Наличие ошибок измерения ЗП
- 3) Цикличность значений экономических показателей
- 4) Запаздывание изменений значений экономических показателей по отношению к изменениям экономических условий
- 5) Сглаживание данных

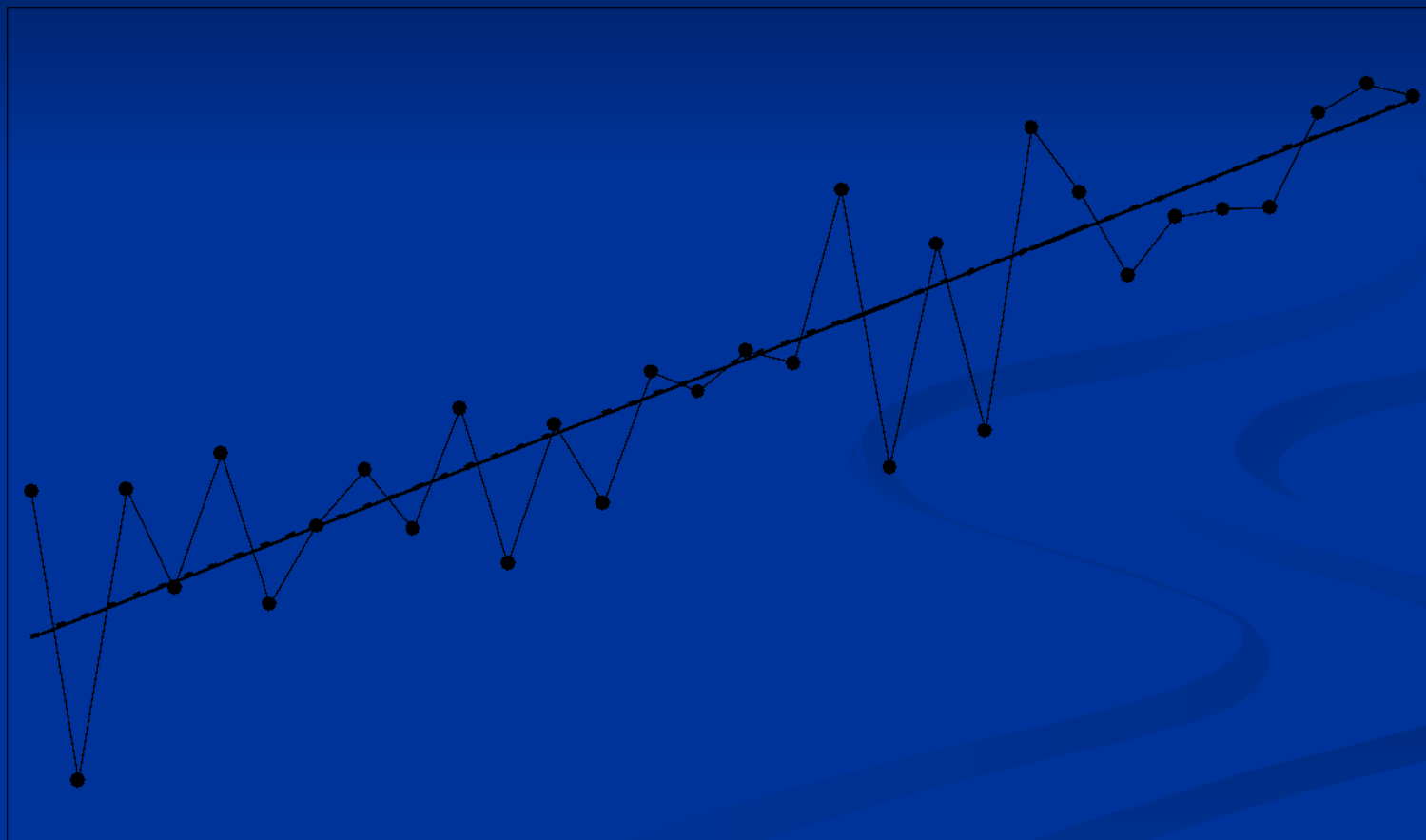
Понятие автокорреляции

Диаграмма рассеяния с положительной автокорреляцией.



Понятие автокорреляции

Пример отрицательной автокорреляции случайных возмущений.



Последствия автокорреляции при применении МНК:

- 1) оценки коэффициентов теряют эффективность
но остаются линейными и несмещенными
- 2) дисперсии оценок являются смещенными (часто занижены)
- 3) оценка остаточной дисперсии регрессии является смещенной (часто заниженной)
- 4) выводы по критериям Стьюдента и Фишера могут оказаться неверными. Это ухудшает прогнозные качества РМ.

Основные методы обнаружение АК:

- 1) Графический метод**
- 2) Тест Дарбина-Уотсона**
- 3) Метод рядов**

Тест Дарбина-Уотсона

1. Предпосылки теста.

Случайные возмущения распределены по нормальному закону.

Имеет место авторегрессия первого порядка:

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t \quad M(u_t)=0; \quad \sigma(u_t)=\text{Const}$$

2. Статистика для проверки гипотезы:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

Тест Дарбина-Уотсона

Для статистики DW не возможно найти критическое значение, т.к. оно зависит не только от $R_{\text{дов}}$ и степеней свободы p и $n-1$, но и от абсолютных значений регрессоров.

Возможно определить границы интервала D_L и D_u внутри которого критическое значение $DW_{\text{кр}}$ находится:

$$D_L \leq DW_{\text{кр}} \leq D_u$$

Значения D_u и D_L находятся по таблицам.

Тест Дарбина-Уотсона



Нет автокорреляции

$$DW \rightarrow 2$$

Положительная автокорреляция

$$DW \rightarrow 0$$

Отрицательная автокорреляция

$$DW \rightarrow 4$$

Интервалы (D_L, D_U) и $(4-D_L, 4-D_U)$ зоны неопределенности.

Обобщенный метод наименьших квадратов

Теорема. Если в схеме Гаусса-Маркова не выполняется предпосылка о гомоскедастичности и некорелированности случайных возмущений, то наилучшей линейной процедурой оценки параметров модели является:

$$\mathbf{b} = \left(\mathbf{X}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}$$

\mathbf{P} - матрица ковариаций случайных возмущений
(положительно определенная матрица)