СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Выполнили ученики 9Б класса:
Гасанов Александр , Уланов Данила,
Ельков Артём, Шильненков Николай

Что такое квадратные уравнения?

- $ax^2 + bx + c = 0$
- **a**, **b**, **c** — некоторые числа (**a ≠ 0**)
- **x** — неизвестное.

Кто первый "изобрёл" квадратные уравнения?

Квадратные уравнения у Аль-Хорезми

1) «Квадраты равны корням», т. е. $ax^2 = bx$.

2) «Квадраты равны числу», т. е. $ax^2 = c$.

3) «Корни равны числу», т. е. $ax = c$.

4) «Квадраты и числа равны корням», т. е. $ax^2 + c = bx$.

5) «Квадраты и корни равны числу», т. е. $ax^2 + bx = c$.

6) «Корни и числа равны квадратам», т. е. $bx + c == ax^2$.

Квадратные уравнения в Европе





Общеизвестные способы

- **1. СПОСОБ:** Разложение левой части уравнения на множители.
- **2. СПОСОБ:** Метод выделения полного квадрата.
- **3. СПОСОБ:** Решение квадратных уравнений по формуле.
- **4. СПОСОБ:** Графическое решение квадратного уравнения.
- **5. СПОСОБ:** Решение уравнений с использованием теоремы Виета.

5 способ решения по теореме Виета

Приведённые квадратные уравнения легко решать по теореме Виета. Достаточно найти два числа такие, произведение которых равно свободному члену, а сумма - второму коэффициенту с противоположным знаком.

Например, для уравнения $x^2-7x+12=0$ Нужно найти числа, произведение которых равно 12, а сумма 7. Такими числами будут 3 и 4. Значит x1=3, x2=4

Но можно использовать этот метод и для уравнений с первым коэффициентом не равным единице. Поясним на примере.

Допустим, нужно решить уравнение $3x^2+2x-5=0$

Берём первый коэффициент и умножаем его на свободный член: $x^2+2x-15=0$

Корнями этого уравнения будут числа, произведение которых равно - 15, а сумма равна - 2. Эти числа - 5 и 3. Чтобы найти корни исходного уравнения, полученные корни делим на первый коэффициент. Таким образом x1=-5/3, x2=1

6. **СПОСОБ:** Решение уравнений способом "переброски".

Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где a ? 0.

Умножая обе его части на a, получаем уравнение $a^2x^2 + abx + ac = 0$.

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению $y^2 + by + ac = 0$,равносильно данному. Его корни y1 и y2 найдем с помощью теоремы Виета.

Окончательно получаем $x1 = y1/a$ и $x1 = y2/a$.

При этом способе коэффициент a умножается на свободный член, как бы "перебрасывается" к нему, поэтому его называют способом "переброски". Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

Решим уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0$.

Решение. "Перебросим" коэффициент 2 к свободному члену и сделав замену получим уравнение $y^2 - 11y + 30 = 0$.

Согласно обратной теореме Виета

$y1 = 5$ $x1 = 5/2$ $x1 = 2,5$

$y2 = 6$ $x2 = 6/2$ $x2 = 3$.

Ответ: $x1=2,5$; $x2= 3$.

7. СПОСОБ: Свойства коэффициентов квадратного уравнения.

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, а ? 0.

1. Если а+ b + с = 0 (т.е. сумма коэффициентов уравнения равна нулю), то х1 = 1, х2 = .

2. Если а - b + с = 0, или b = а + с, то х1 = - 1, х2 = - .

1. Решим уравнение $345x^2 - 137x - 208 = 0$.

Решение. Так как а + b + с = 0 (345 - 137 - 208 = 0), то х1 = 1, х2 = = . Ответ: х1=1; х2 = - .

. Решим уравнение $132x^2 + 247x + 115 = 0$

Решение. Т.к. a-b+с = 0 (132 - 247 +115=0), то

х1= - 1, х2= - Ответ: х1= - 1; х2= -

8. **СПОСОБ:** Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.

Номограмма для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$. Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.

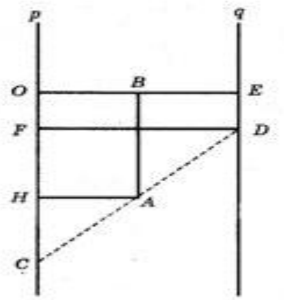


Рис. 11

Криволинейная шкала номограммы построена по формулам:

$$OB = \frac{a}{1+z},\ AB = \frac{-z^2}{1+z}.$$

Полагая OC = p, ED = q, OE = a , из подобия треугольников CAH и CDF получим пропорцию

$$\frac{p-q}{p-AB} = \frac{a}{OB},$$

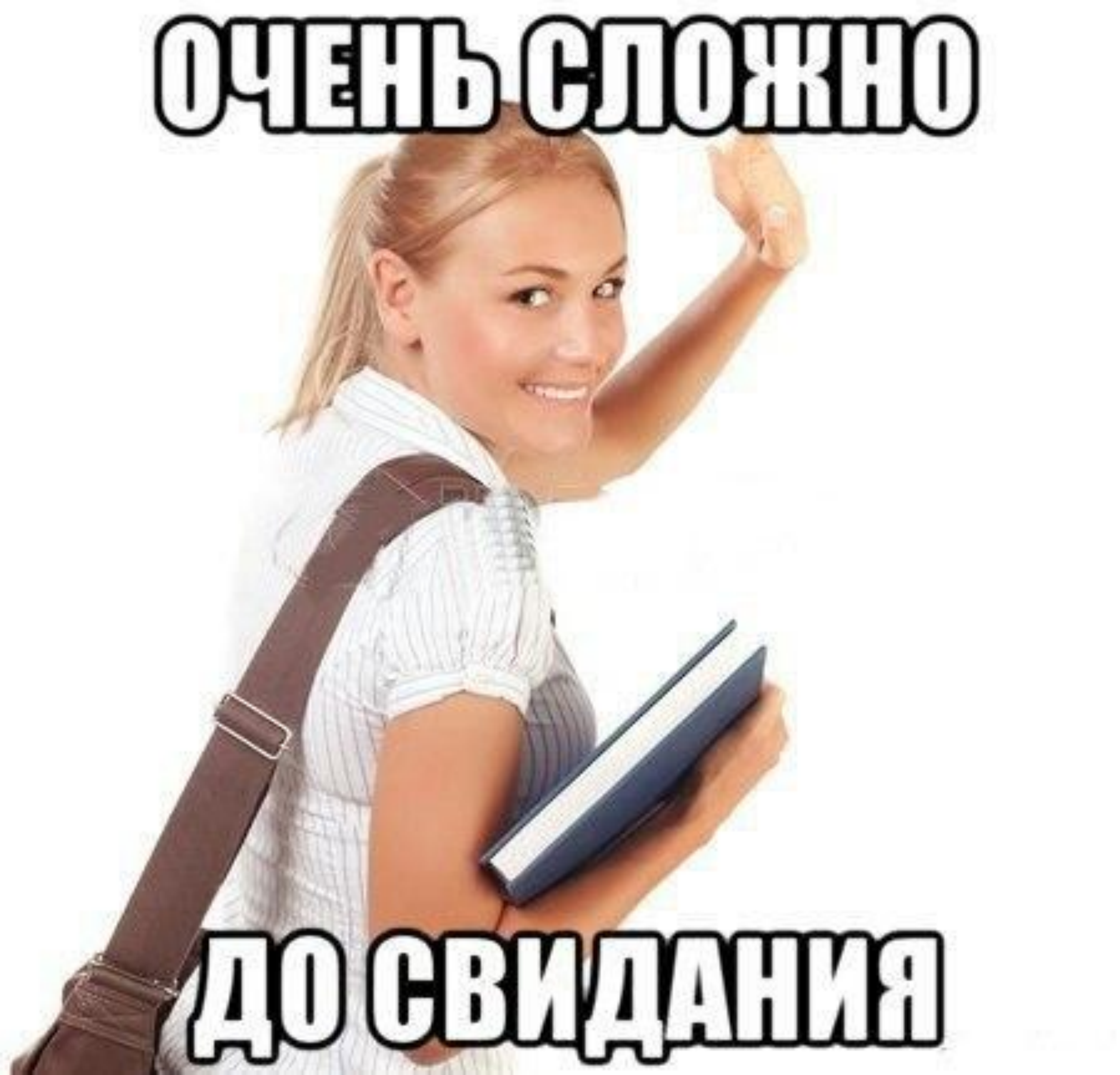
откуда после подстановок и упрощений вытекает уравнение $z^2 + pz + q = 0$, причем буква z означает метку любой точки криволинейной шкалы.

1. Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$. Номограмма дает корни z1 = 8 и z2 = 1.

2. Решим с помощью номограммы уравнение 2z2 - 9 z + 2 = 0.

Разделим коэффициенты этого уравнения на 2, получим уравнение z^2 - 4,5 +1=0.

Номограмма дает корни z1 = 4 и z2 = 0,5.

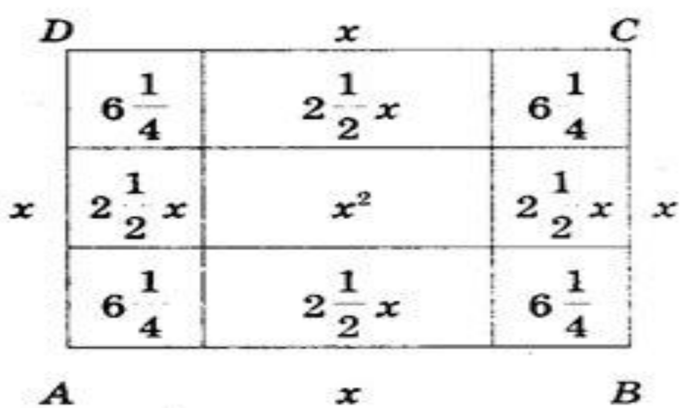

ОЧЕНЬ СЛОЖНО
ДО СВИДАНИЯ

9. СПОСОБ: Геометрический способ решения квадратных уравнений.

Решим уравнение x2 + 10x = 39.

В оригинале эта задача формулируется следующим образом: "Квадрат и десять корней равны 39".

Решение. Рассмотрим квадрат со стороной x, на его сторонах строятся прямоугольники так, что другая сторона каждого из них равна 2,5, следовательно, площадь каждого равна 2.5x. Полученную фигуру дополняют затем до нового квадрата ABCD, достраивая в углах четыре равных квадрата, сторона каждого из них 2.5, а площадь 6.25



Площадь S квадрата ABCD можно представить как сумму площадей: первоначального квадрата x2, четырех прямоугольников (4 * 2.5x = 10x) и четырех пристроенных квадратов (6,25• 4 = 25) , т.е. S = x2 + 10x = 25. Заменяя x2 + 10x числом 39, получим что S = 39+ 25 = 64, откуда следует, что сторона квадрата ABCD, т.е. отрезок AB = 8. Для искомой стороны x первоначального квадрата получим $x = 8 - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3$.

10. **СПОСОБ:** Решение уравнений с использованием теоремы Безу.

При делении P(x) на x - α в остатке может получиться лишь некоторое число r (если r = 0, то деление выполняется без остатка):P(x) = (x - α) Q (x) + r. (1)

Чтобы найти значение r, положим в тождестве (1) x = α . При этом двучлен x - α обращается в нуль, получаем, что P (α) = r.

Итак, доказано утверждение, называемое теоремой Безу.

Теорема 1 (Безу). Остаток от деления многочлена P(x) на двучлен x - α равен P(α) (т.е. значению P(x) при x = α).

Если число α является корнем многочлена P(x), то этот многочлен делится на x - α без остатка.

$x^2-4x+3=0$

$P_2(x)= x^2-4x+3$

α; ±1,±3.

α =1, 1-4+3=0

Разделим p(x) на (x-1)

$(x^2-4x+3)/(x-1)=x-3$

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

$(x-1)(x-3)=0$

x-1=0; x=1, или x-3=0, x=3; Ответ: $x_1=2$, $x_2=3$.


коне
ц