Основы математической логики

Функции Алгебры Логики

Функции алгебры логики

Переменные x_i, принимающие значения из множества {0,1} называются двоичными переменными.

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от двоичных переменных, принимающая, как и ее аргументы, значения 0,1, называется функцией алгебры логики (ФАЛ) или переключательной функцией (ПФ). Такие функции называют также двоичными, логическими или булевыми функциями.

ФАЛ характеризуются:

- числом двоичных переменных n;
- областью определения функции – число наборов $k_н=2^n$;
- общим числом различных функций $k_ф= 2^{k_н}$.

Булева функция одного аргумента

Переключательная функция одного аргумента имеет:

$n = 1$, $k_н = 2^n = 2^1 = 2$, $k_ф = 2^{k_н} = 2^2 = 4$

X	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
	Константа 0	Переменная X	Инверсия X	Константа 1

Переключательная функция двух аргументов имеет:

$n = 2$, $k_н = 2^n = 2^2 = 4$, $k_ф = 2^{k_н} = 2^4 = 16$

Булева функция двух аргументов

	Номер набора				Название функции	Формула функции
	0	1	2	3		
x_1	0	0	1	1		
x_2	0	1	0	1		
$f_0(x)$	0	0	0	0	Константа нуль	$f_0 = 0$
$f_1(x)$	0	0	0	1	Конъюнкция (И)	$f_1 = x_1 \& x_2$
$f_2(x)$	0	0	1	0	Запрет по x_2	$f_2 = \neg x_1 \& x_2$
$f_3(x)$	0	0	1	1	Повторитель по x_1	$f_3 = x_1$
$f_4(x)$	0	1	0	0	Запрет по x_1	$f_4 = x_1 \& \neg x_2$
$f_5(x)$	0	1	0	1	Повторитель по x_2	$f_5 = x_2$
$f_6(x)$	0	1	1	0	Сложение по модулю 2	$f_6 = x_1 \oplus x_2$
$f_7(x)$	0	1	1	1	Дизъюнкция (ИЛИ)	$f_7 = x_1 \vee x_2$

Булева функция д в у х аргументов

	Номер набора				Название функции	Формула функции
	0	1	2	3		
x_1	0	0	1	1		
x_2	0	1	0	1		
$f_8(x)$	1	0	0	0	Стрелка Пирса (ИЛИ-НЕ)	$f_8 = \neg(x_1 \vee x_2)$
$f_9(x)$	1	0	0	1	Логическая равнозначность	$f_9 = x_1 \& x_2 \vee$ $= \vee \neg x_1 \& \neg x_2$
$f_{10}(x)$	1	0	1	0	Инверсия x_2	$f_{10} = \neg x_2$
$f_{11}(x)$	1	0	1	1	Импликация от x_2 по x_1	$f_{11} = \neg x_1 \vee x_2$
$f_{12}(x)$	1	1	0	0	Инверсия x_1	$f_{12} = \neg x_1$
$f_{13}(x)$	1	1	0	1	Импликация от x_1 по x_2	$f_{13} = x_1 \vee \neg x_2$
$f_{14}(x)$	1	1	1	0	Штрих Шеффера (И-НЕ)	$f_{14} = \neg(x_1 \& x_2)$
$f_{15}(x)$	1	1	1	1	Константа единица	$f_{15} = 1$

Функционально полный набор

На практике используют не все функции, а только те, которые методом суперпозиции (подстановка вместо элементов одной функции других функций) обеспечивают представление любой другой функции. Набор таких функций называют **функционально полным набором** (**ФПН**).

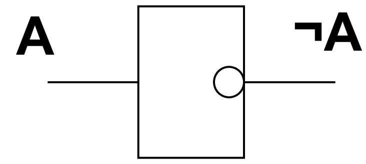
Существует несколько ФПН. Один из них **основной ФПН – конъюнкция, дизъюнкция, инверсия**.

Дискретный преобразователь, который после обработки входных двоичных сигналов выдаёт на выходе сигнал, являющийся значением одной из логических операций, называется **логическим элементом** (**ЛЭ**).

Логические элементы

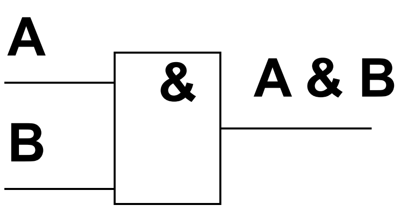
Инверсия, конъюнкция, дизъюнкция, представляют ФПН. Схемы «И», «ИЛИ», «НЕ» образуют функционально полную систему, т.е. с помощью этих схем может быть построено любое устройство.

Инвертор, схема «НЕ»



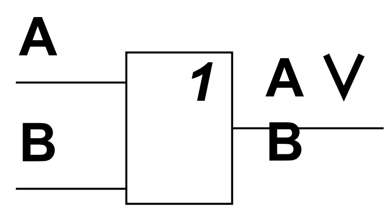
A	¬A
0	1
1	0

Конъюнктор, схема «И»



A	B	A & B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнктор, схема «ИЛИ»



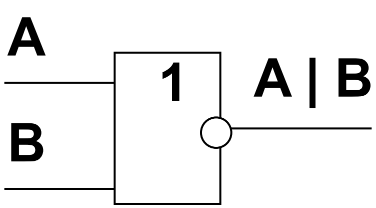
A	B	A ∨ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логические элементы

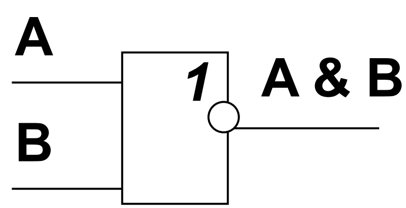
Кроме выше указанных логических схем в качестве базовых могут использоваться комбинированные схемы.

Стрелка Пирса,
схема «ИЛИ-НЕ»
$\neg(A \lor B)$

Штрих Шеффера,
схема «И-НЕ»
$\neg(A \land B)$



A	B	A | B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



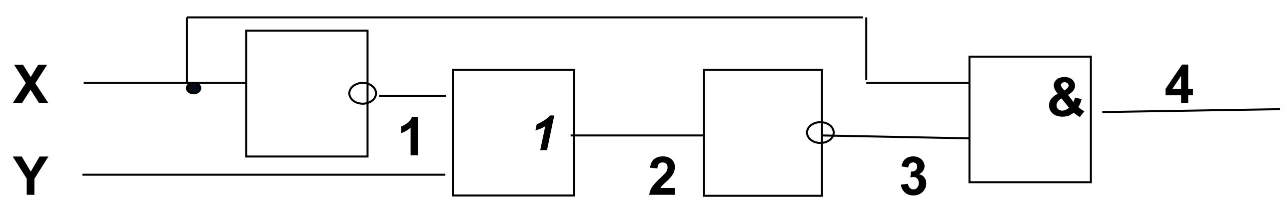
A	B	$\neg(A \land B)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Функциональная схема, структурная формула

Дискретный преобразователь, который после обработки входных двоичных сигналов выдаёт на выходе сигнал, являющийся значением одной из логических операций, называется **логическим элементом (ЛЭ)**.

Цепочка ЛЭ, в которой выходы одних элементов являются входами других, называется **логическим устройством**

Схема соединения ЛЭ, реализующая логическую функцию, называется **функциональной схемой.**



Формой описания функции, реализуемой логическим устройством, является **структурная формула.**

$$F(X,Y)=\overline{\left(\overline{X}\vee Y\right)}\& X$$

Построение функциональных схем логических устройств

Цепочка логических элементов, в которой выходы одних элементов являются входами других, называется **логическим устройством**

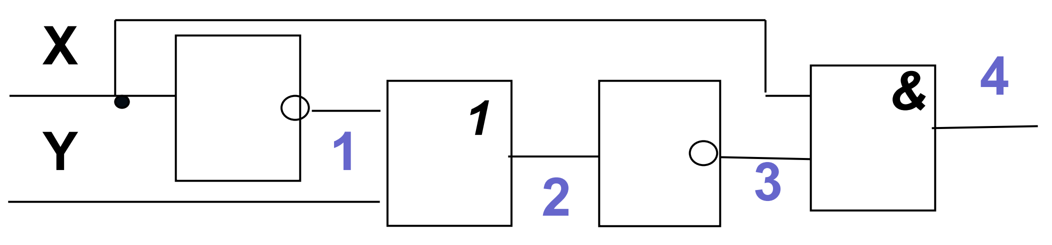
Функциональная схема - схема соединения логических элементов, реализующая логическую функцию,

Формой описания функции, реализуемой логическим устройством, является **структурная формула**.

Пример. Дана структурная формула:

$$F(X,Y)=\overline{\left(\overline{X}\vee Y\right)}\&\,X$$

по которой построена функциональная схема:



Построение функциональных схем логических устройств

Цепочка логических элементов, в которой выходы одних элементов являются входами других, называется логическим устройством

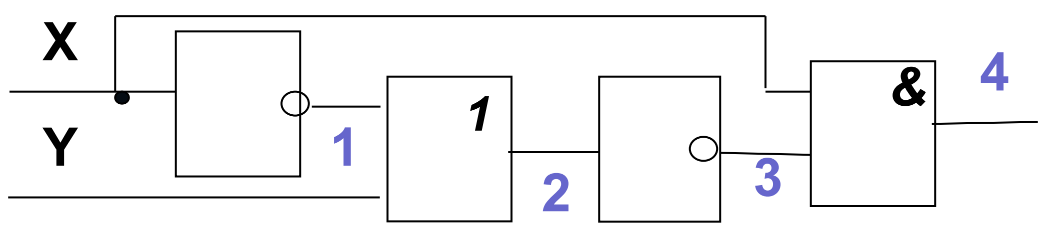
Схема соединения элементов, реализующая логическую функцию, называется функциональной схемой.

Формой описания функции, реализуемой логическим устройством, является структурная формула.

Пример. **Дана структурная формула:**

$$F(X,Y) = \overline{\left(\overline{X} \vee Y\right)} \& X$$

по которой построена функциональная схема:



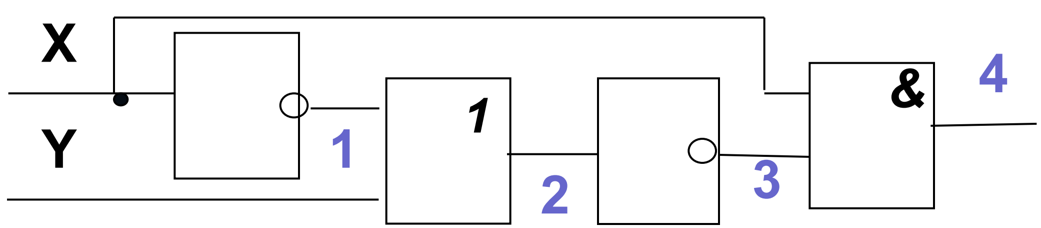
Сравнение таблиц истинности

Для проверки соответствия функциональной схемы и структурной формулы сравним их таблицы истинности:

$$F(X,Y) = \overline{\left(\overline{X} \vee Y\right)} \& X$$

X	Y	¬X	¬X∨Y	¬(¬X∨Y)	F(X.Y)
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0

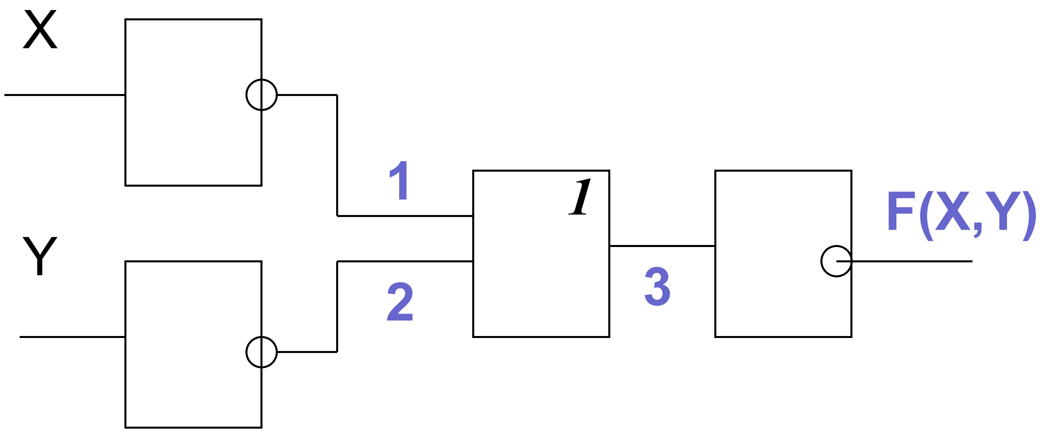
Для функциональной схемы:



X	Y	1	2	3	4
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0

Определение структурной формулы по функциональной схеме

Имеется функциональная схема. Требуется определить по схеме соответствующую структурную формулу:



Выход 1 – ¬X, Выход 2 – ¬Y, Выход 3 -- ¬ X ∨ ¬ Y,

Выход F(X,Y) – ¬(¬ X ∨ ¬ Y)

Для проверки соответствия схемы и формулы нужно также построить таблицы истинности.

Дизъюнктивная нормальная форма и конъюнктивная нормальная форма

Элементарная конъюнкция – логическое произведение (конъюнкция) аргументов или их отрицаний, среди аргументов могут быть одинаковые.

Пример. A & ¬B & C – элементарная конъюнкция

¬(A & ¬B) – НЕ элементарная конъюнкция, есть отрицание выражения.

Элементарная дизъюнкция – логическая сумма (дизъюнкция) аргументов или их отрицаний, среди аргументов возможны одинаковые. Примеры. ¬ A V B или X V ¬ Y V ¬ Z, но

X V Y & Z НЕ элементарная дизъюнкция, имеется конъюнкция

Всякую дизъюнкцию элементарных конъюнкций назовем **дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)**

Пример. X & ¬X V X & Y & ¬Z ; X & Y V ¬Y V X & Z

Всякую конъюнкцию элементарных дизъюнкций назовем **конъюнктивной нормальной формой (КНФ).**

(X V Y V X) & (X V Z) ; X & (X V Y) & (X V Z) ;

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма и совершенная конъюнктивная нормальная форма

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) называется ДНФ, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций и все конъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в который каждая переменная входит только один раз (возможно, с отрицанием).

Пример. X & Y & ¬Z V X & Y & Z , но X & Y V ¬ Y V X & ¬ Z НЕ СДНФ

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называется КНФ, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций и все дизъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в который каждая переменная входит только один раз (возможно, с отрицанием).

Пример. (¬X V Y V Z) & (X V ¬ Y V Z),

но (¬X V Y V X) & (¬ X V Z) НЕ СКНФ

Алгоритм получения СДНФ по таблице истинности

Имеется таблица истинности, требуется получить СДНФ

X	У	F(X,Y)
0	0	0
0	1	1*
1	0	1*
1	1	0

1. Отметить те строки таблицы истинности, в последнем столбце которых стоит 1.
2. Выписать для каждой отмеченной строки конъюнкцию всех переменных так: если значение некоторой переменной в данной строке равно 1, то в конъюнкцию включать саму эту переменную, если равно 0, то ее отрицание: ¬X & Y – для 2-й строки, X & ¬ Y - для 3-й строки,
3. Все полученные конъюнкции связать в дизъюнкцию:

(¬ X & Y) V (X & ¬ Y)

Алгоритм получения СКНФ по таблице истинности

Имеется таблица истинности, требуется получить СКНФ

X	У	F(X,Y)
0	0	0*
0	1	1
1	0	1
1	1	0*

1. **Отметить те строки таблицы истинности, в последнем столбце которых стоит 0.**
2. **Выписать для каждой отмеченной строки дизъюнкцию всех переменных так: если значение некоторой переменной в данной строке равно 0, то в конъюнкцию включать саму эту переменную, если равно 1, то ее отрицание: X ∨ Y – для 1-й строки, ¬ X ∨ ¬ Y - для 4-й строки,**
3. **Все полученные дизъюнкции связать в конъюнкции:**

$$(X \lor Y) \& (\neg X \lor \neg Y)$$