



МЧС РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПРОТИВОПОЖАРНОЙ СЛУЖБЫ



Кафедра прикладной математики и информационных технологий

Математическое моделирование
специальность 230401.65 – «Прикладная математика»

Тема 1.

Методологические основы моделирования

Лекция 1.4.

Свойства математических моделей и принципы их оценки.

Учебные вопросы:

1. **Свойства математических моделей.**
2. **Оценка качества математических моделей.**
3. **Обеспечение адекватности моделей.**

Литература

- 1. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике: Учеб. для вузов/ В.С. Зарубин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.**
- 2. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: Учебник. – М.: Высшая школа, 2001.**
- 3. Шикин Е.В. Математические методы и модели управлений: Учеб. пособие/ Е.В. Шикин, А.Г. Чхартишвили. – М.:, Дело, 2002.**

1. Свойства математических моделей

Основные области применения моделей:

- **управление объектами, проектировании новых объектов.** Используются для поиска оптимальных или рациональных решений, оценки эффективности решений, определении свойств объектов (например, чувствительности к изменениям параметров объектов и внешней среды);
- **научные исследования.** Выявление закономерностей функционирования объекта или его взаимодействия с внешней средой, перенос информации во времени;
- **обучение.** Позволяют повысить наглядность обучения, изучить влияние изменений параметров объектов на результаты функционирования, снизить затраты ресурсов на обучение, научиться управлять объектом, прогнозировать последствия принимаемых решений.

Реализация указанных функций требует определенного качества модели. Требования к качеству зависят от назначения модели.

Качество математической модели – это совокупность свойств, отличающие конкретную модель от других моделей и характеризующих её соответствие назначению. **Качество математической модели** характеризует ее пригодность для решения практических задач, оно в полной мере проявляется лишь в процессе её использования по назначению.

Две группы свойств математических моделей:

- ***основные свойства***. Без определенного уровня этих свойств модель нельзя использовать по назначению;
- ***эксплуатационные свойства***. Эти свойства характеризуют удобство применения модели пользователем и потребности в ресурсах для её исследования.

Основные свойства

- 1. Адекватность**
- 2. Управляемость**
- 3. Целостность**
- 4. Чувствительность**
- 5. Робастность**
- 6. Неопределённость**
- 7. Точность**

Адекватность характеризует, насколько правильно и полно модель описывает исследуемые свойства объекта-оригинала (структуру, процессы функционирования и др.), насколько правильно она позволяет прогнозировать изменение свойств объекта.

В основе моделирования лежит *теория подобия*, которая утверждает, что абсолютное подобие имеет место лишь при замене одного объекта другим точно таким же. При математическом моделировании абсолютное подобие модели объекту-оригиналу невозможно, да и не имеет смысла.

Адекватность означает и *непротиворечивость* результатов моделирования, т.е. при вариации значений параметров модель не должна давать результаты, противоречащие логике, особенно в тех случаях, когда значения параметров близки к экстремальным.

Управляемость означает возможность управления математической моделью со стороны исследователя для изучения протекания процессов в различных условиях, присущих объекту-оригиналу. Управляемость модели связана с автоматизацией моделирования на основе применения ЭВМ, что позволяет, наряду с программными средствами управления машинным моделированием, использовать диалоговые процедуры общения исследователя с моделью.

Целостность - математическая модель является системой, включающей в себя необходимое количество компонент (подсистем, элементов), находящихся во взаимосвязи друг с другом.

Чувствительность модели характеризует возможность оценки влияния изменения входных параметров модели на ее выходные характеристики. Это свойство позволяет устанавливать степень зависимости выходных характеристик от входных параметров. Степень зависимости можно проранжировать и выявить наиболее значимые входные параметры, а наименее значимые вывести из состава.

Робастность (от англ. *robust* - устойчивый) определяет способность модели быть устойчивой, т.е. восстанавливаться в ходе моделирования при возникновении ошибочных ситуаций как внешнего, так и внутреннего происхождения.

В робастной модели могут допускаться ошибки во входных параметрах (погрешности исходных данных) или «неисправности» составных частей самой модели.

Различие между свойствами *работоспособности* и *робастности*. Модель, которая не восстанавливается при возникновении ошибочной ситуации, может быть работоспособной, не будучи робастной.

Неопределенность модели определяется тем, что модель только *приблизженно* отображает реальность. При этом неизбежно существование упрощений, допущений и идеализация сложных процессов и явлений, происходящих в объекте-оригинале. В соответствующих моделях выделяют несколько источников неопределённости:

- неполнота модели;
- конечная точность математических методов и их реализации на ЭВМ;
- ошибки в реализации моделей;
- неопределенность параметров (констант, входных параметров).

Точность (погрешность результатов моделирования).

Требуемая точность зависит от назначения модели:

- для качественного сравнения результатов требуется лишь соблюдение характера изменения показателей (увеличение или уменьшение, наличие оптимумов, положительное или отрицательное значение и т.п.);**
- для проведения оценочных расчетов или обучения удовлетворительной считается погрешность 10 – 15 % от значения показателя;**
- для решения задач управления или оптимизации погрешность не должна превышать 1 – 2 % или быть даже существенно меньше.**

Эксплуатационные свойства

- 1. Простота (сложность)**
- 2. Адаптивность**
- 3. Возможность развития**
- 4. Надежность**
- 5. Наглядность**
- 6. Ресурсоемкость разработки, эксплуатации и модернизации**

Простота (сложность) модели. Модель является совокупностью отдельных компонентов и связей между ними. Сложность определяется общим числом компонент (подсистем, элементов) модели и связей между ними. Понятие сложности можно идентифицировать по ряду признаков:

- количеству уровней иерархии,
- количеству отдельных функциональных подсистем модели,
- количеству входов и выходов и т.д.

Адаптивность характеризует способность модели приспособливаться к разным условиям применения.

Возможность развития модели характеризует ее приспособленность к совершенствованию:

- по горизонтали, в смысле расширения спектра изучаемых сторон объекта-оригинала;
- по вертикали в смысле того, что модель должна позволять применять новые современные методы и средства моделирования.

Материализация математической модели в виде программы предопределяет наличие свойства надежности, присущего всем объектам искусственного происхождения.

Надежность модели характеризует способность модели к обнаружению, предупреждению и устранению последствий различного рода ошибок в программе, в исходных данных, сбоев и отказов ЭВМ.

Наглядность обеспечивает снижение затрат ресурсов в ходе:

- построения концептуальной модели и её формализации;
- алгоритмизации модели и её машинной реализации;
- получения и интерпретации результатов моделирования.

Ресурсоемкость разработки, эксплуатации и модернизации

Математическое моделирование проводится обычно с использованием ЭВМ, поэтому необходимо оценивать затраты на основные виды обеспечения: кадровое, техническое, программное, информационное, потребности в ресурсах ЭВМ.

2. Принципы оценки качества математических моделей

Цель оценивания качества математической модели состоит в выработке суждения об исследуемой модели (о её пригодности, превосходстве над другими моделями).

Оценивание возможно только в «замкнутой» схеме, т.е. когда к качеству модели предъявлены требования, которые и «замыкают» схему оценивания.

Термин «Оценка качества» применяют в смысле:

- числовой характеристики показателя, получаемой опытным путём или с помощью расчётов;
- процесса «Оценивание качества», - как совокупности процедур принятия решения о качестве модели.

Принцип 1. Иерархический подход к оцениванию

При оценке математической модели используют:

- частные оценки степени проявления конкретных единичных свойств;**
- интегральные оценки групповых свойств модели.**

Оценку качества математических моделей формулируют с учетом:

- 1) *выработки частных оценок* степени проявления каждого из существенных перечисленных основных и эксплуатационных свойств;**
- 2) *возможности выработки одной (нескольких) интегральных оценок* качества модели.**

Принцип 2. Необходимость выбора критериев и показателей качества математической модели

При оценке качества математической модели необходимо сформировать критерий (критерии) оценивания качества модели и определить номенклатуру показателей её качества.

***Критерий оценивания качества модели* – это руководящие правило (условие или совокупность условий), вытекающее из принятых принципов оценивания. Правило реализуют при принятии решения о качестве исследуемой модели.**

***Показатель качества модели* – это числовая характеристика или функция, определяющая меру проявления качества модели (или отдельного её свойства).**

Принцип 3. Наличие критериев векторного показателя

При оценивании качества любой математической модели, описываемого векторным показателем, должна применяться совокупность критериев, принадлежащих к одному из трёх классов:

- 1) критерий пригодности;**
- 2) критерий оптимальности;**
- 3) критерий превосходства.**

Критерий пригодности - означает, что векторный показатель качества модели принадлежит области допустимых значений показателя качества пригодной модели.

Критерий оптимальности – означает, что векторный показатель модели принадлежит области допустимых значений показателя качества пригодной модели и равен оптимальному показателю качества пригодной модели по одному или нескольким свойствам.

Критерий превосходства – означает, что векторный показатель качества модели принадлежит области допустимых значений показателей качества пригодных моделей, и модель превосходит по качеству все остальные пригодные модели.

Из определений критериев следует:

- критерий оптимальности является частным случаем критерия пригодности;**
- критерий превосходства представляет собой частный случай критерия оптимальности.**

На основе изложенного формулируется следующий принцип оценки качества математических моделей.

Принцип 4. Оценивание модели возможно только при наличии требований к качеству модели (наличие «замкнутой» схемы)

При оценке качества математической модели должна использоваться «закрытая схема», в состав которой входит совокупность требований к модели, и должна соблюдаться последовательность этапов:

- вычисление показателя качества;**
- оценивание качества модели по соответствующему критерию.**

Принцип 5. Применение вероятностной меры оценки качества математической модели

При оценке качества математической модели сложного объекта-оригинала, на который воздействуют случайные факторы, необходимо в качестве показателя эффективности функционирования модели использовать вероятностную меру, характеризующую *вероятность выполнения* задачи моделирования.

Эта величина характеризует вероятность выполнения задачи моделирования, т.е. является мерой степени выполнения моделью задачи моделирования.

Показатели *эффективности функционирования* математической модели

Эффективность функционирования модели нельзя охарактеризовать ни одним из перечисленных частных (единичных) свойств в отдельности. Она определяется их совокупностью (эффективность – это комплексное свойство модели). Можно ввести понятие групп показателей:

- 1) вектор целевых эффектов при использовании модели;**
- 2) вектор эксплуатационных эффектов при использовании модели.**

При оценке эффективности вероятностных моделей следует учитывать, что случайными будут и зависящие от них показатели (показатели целевого эффекта, затрат ресурсов).

В условиях моделирования критерий пригодности процесса функционирования модели к достижению цели моделирования означает, что случайный вектор показателей качества достижимых результатов процесса функционирования модели должен принадлежать области значений вектора требуемых результатов.

Характеристикой эффективности функционирования модели служит вероятность принадлежности случайного вектора показателя достижимых результатов области требуемых (допустимых) значений этого показателя.

3. Проверка адекватности модели

Под адекватностью модели следует понимать соответствие результатов моделирования реальным результатам функционирования объекта во всем допустимом диапазоне изменений исходных данных.

Однако, если результаты функционирования известны, то моделирование теряет смысл. Поэтому полная проверка адекватности невозможна. Практические способы проверки адекватности не гарантируют доказательства правильности модели.

Причины неадекватности результатов моделирования:

- несоответствие принятых гипотез о функционировании объекта, принятых допущений и ограничений реальным условиям;
- несоответствие заданных исходных данных допустимой области значений;
- ошибки и неточности в задании констант и постоянных параметров модели;
- несоответствие выбранного численного метода или его параметров заданным требованиям точности моделирования.

Две основные задачи проверки адекватности:

- проверке справедливости основных допущений и ограничений, принятых при построении модели;
- оценке соответствия точности полученных результатов заданным требованиям.

Окончательную проверку адекватности следует проводить после комплексной отладки программной реализации модели и устранения всех ошибок в программе.

Наиболее сложно решить первую задачу проверки. Для ее решения следует создавать иерархическую систему моделей, в которой постепенно исключаются из рассмотрения те или иные свойства системы и внешней среды. По результатам сравнительного анализа результатов моделирования принимается решение о значимости соответствующих факторов, о границах допустимости применения моделей.

Простейшей мерой адекватности может служить отклонение некоторой характеристики Y-оригинала от Y-модели:

$$\Delta y = \left| y_{orig} - y_{mod} \right|$$

Считают что модель адекватна с системой, если вероятность того что отклонение Δy не превышает предельной величины дельта, больше допустимой вероятности.

Однако, фактическое использование данного критерия не всегда возможно, т.к.:

- 1) для проектируемых или модернизируемых систем отсутствует информация по выходным характеристикам объекта. А исследуются, как правило, именно такие системы.**
- 2) Система зачастую оценивается не по одной, а по множеству характеристик, у которых может быть разная величина отклонения.**
- 3) Характеристики могут быть случайными величинами и функциями, а часто и нестационарными функциями.**
- 4) Может отсутствовать возможность априорного точного задания предельных отклонений и допустимых вероятностей**

На практике оценка погрешности моделирования (*аттестация модели*) состоит в выявлении степени отклонения результатов от эталона. Выбор эталона и определение значений его параметров необходимый компонент аттестации модели.

Использование объекта-оригинала в качестве эталона снимает проблему выбора (*прямой метод аттестации*). Проверка адекватности в такой ситуации получает высокую степень достоверности, поскольку позволяет определить полную погрешность модели в некоторой области изменения параметров.

Проблемы:

- натурный эксперимент возможен для существующих объектов;**
- обеспечение корректности его проведения (например, непрерывности поддержания заданного характера внешних воздействий, режимов функционирования);**
- наличие неконтролируемых случайных помех, искажающих результаты функционирования объекта.**

***Косвенные методы* аттестации используют неформальные подходы:**

- анализ результатов на непротиворечивость. Включает проверку взаимной непротиворечивости результатов, непротиворечивости результатов при изменении параметров модели, соответствия основным законам математики и физики. Результативным подходом является проверка на граничных значениях параметров;**
- проверка сходимости результатов к известным значениям. Исходным данным присваиваются значения, принадлежащие области, для которой результаты известны;**
- проверка согласованности результатов моделирования с результатами, полученными другими исследователями при изучении аналогичных объектов. Модификаций подхода является разработка системы моделей с различными допущениями и ограничениями, что позволяет оценить значимость принятых предположений.**

Анализ адекватности требует проведения исследования модели, т.е. проведения экспериментов.

Косвенные методы не гарантируют полную проверку адекватности модели и объекта-оригинала. Они способны выявить неадекватность, но доказать адекватность нельзя.

Модель считают адекватной, если не обнаружены факты ее неадекватности.

Проблема адекватности в полном объеме неразрешима:

- формализация объекта не является формальной процедурой;
- невозможно проверить адекватность во всем диапазоне изменения исходных данных;
- в программной реализации сложной модели нельзя гарантировать полное отсутствие ошибок.

Проверку адекватности следует осуществлять на всех этапах разработки модели.