Основы индуктивного подхода

МЮИ Группа МОС. 2015. 09. Б+.с. З.В / СО-2015

Олой Анастасия

Метод математической индукции.

Одним из самых важных методов математических доказательств является **метод математической индукции**. Подавляющее большинство формул, относящихся ко всем натуральным числам *n*, могут быть доказаны методом математической индукции (к примеру, формула суммы *n* первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Индукцией называют переход от частных утверждений к общим. Напротив, переход от общих утверждений к частным называется **дедукцией.**

Пример частного утверждения: *254* делится на *2* без остатка.
Из этого частного утверждения можно сформулировать общие , причем как истинные, так и ложные.
Более общее утверждение: все целые числа, оканчивающиеся четверкой, делятся на *2* без остатка, является истинным, все трехзначные числа делятся на *2* без остатка, является ложным.
Индукция позволяет получить общие утверждения на основе известных или очевидных фактов, и установить их истинность (ложность)

Рассмотрим числовую последовательность:

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}, \ldots, \frac{1}{n(n+1)}$$

n – произвольное натуральное число. Тогда последовательность сум первых *n* элементов этой последовательности будет следующая

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}, S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4},$$

$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}, \ldots$$

Исходя из этого факта, по индукции можно утверждать, что $S_n = \frac{n}{n+1}$

- В основе метода математической индукции лежит **принцип математической индукции**.
- Он заключается в следующем: некоторое утверждение справедливо для всякого натурального n, если
- оно справедливо для $n = 1$ и
- из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального $n = k$ следует его справедливость для $n = k+1$.
- То есть, доказательство по методу математической индукции проводится в три этапа:
- во-первых, проверятся справедливость утверждения для любого натурального числа n (обычно проверку делают для $n = 1$);
- во-вторых, предполагается справедливость утверждения при любом натуральном $n=k$;
- в-третьих, доказывается справедливость утверждения для числа $n=k+1$, отталкиваясь от предположения второго пункта.

Вернемся к предыдущему примеру и докажем формулу $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Метод математической индукции предполагает доказательство в три пункта
Проверим равенство для *n = 1*. Имеем $S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ Это равенство верное.

Предположим, что $S_k = \frac{k}{k+1}$ есть справедливая формула.

Докажем, что $S_{k+1} = \frac{k+1}{(k+1)+1} = \frac{k+1}{k+2}$ отталкиваясь от справедливого равенства из второго пункта.

Сумма *k+1* первых членов последовательности представляется как сумма первых *k* членов исходной числовой последовательности и *k+1* ого члена: $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

Так как $S_k = \frac{k}{k+1}$ из второго пункта, то $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

Осталось привести дроби к общему знаменателю, привести подобные слагаемые, воспользоваться формулой сокращенного умножения квадрат суммы и произвести сокращение:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Доказано равенство третьего пункта.

Выполнены все три шага метода математической индукции и тем самым доказано наше предположение о формуле $S_n = \frac{n}{n+1}$