Численные методы анализа.

ч.*3-4.*

«Всё опыт, опыт! Опыт – это вздор.
Значенья духа опыт не покроет.
Всё, что узнали до сих пор,
искать не стоило. И знать не стоит.»

Монолог Бакалавра. «Фауст», Гёте

3. Численные методы решения систем уравнений

3.1. Основные положения

1. Точные методы – конечные алгоритмы для вычисления корней системы.
2. Итерационные методы – решение системы путем сходящихся итерационных процессов.

Источники погрешностей: округления (даже в точных методах) и погрешности метода.

3.2. Метод Крамера (решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы)

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\left\|\begin{array}{l} a_{11}.a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}.a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}.a_{n2}\ldots a_{nn} \end{array}\right\| \cdot \left\|\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{array}\right\|$$

Неособенная матрица $\mathbf{A}$: $\det \mathbf{A} = \Delta \neq 0$

Обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$: $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{\Delta}\left\|\begin{array}{l} A_{11}.A_{21}\ldots A_{n1} \\ A_{12}.A_{22}\ldots A_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n}.A_{2n}\ldots A_{nn} \end{array}\right\|$

Присоединенная матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ – транспонированная матрица, составленная из миноров A_{ij} со своими знаками.

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

3.3. Метод Гаусса (метод гауссовых исключений)

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}$$

$$\det \mathbf{A} = \Delta \neq 0$$

$$\left\| \begin{array}{l} a_{11}.a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}.a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}.a_{n2}\dots a_{nn} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ \dots. \\ x_n \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \dots. \\ b_n \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} a_{11}.a_{12}\dots a_{1n}.b_1 \\ a_{21}.a_{22}\dots a_{2n}b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}.a_{n2}\dots a_{nn}b_n \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ \dots. \\ x_n \\ 1 \end{array} \right\|$$

$$\left\| \begin{array}{l} a_{11}.a_{12}\dots a_{1n}.b_1 \\ a_{21}.a_{22}\dots a_{2n}.b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}.a_{n2}\dots a_{nn}.b_n \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} 1..\alpha_{12}\dots\alpha_{1n}..\beta_1 \\ 0..1\dots.\alpha_{2n}..\beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0..0\dots\dots1\dots.\beta_n \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} 1..0\dots..0..\eta_1 \\ 0..0\dots..0..\eta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0..0\dots..1..\eta_n \end{array} \right\| \equiv \left\| \begin{array}{l} 1..0\dots..0..x_1 \\ 0..0\dots..0..x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0..0\dots..1..x_n \end{array} \right\|$$

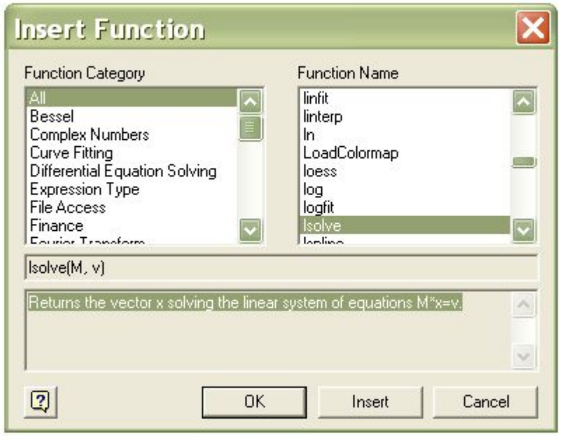
3.4. Встроенная функция *Lsolve* в пакете MathCad

$$M := \begin{pmatrix} 100 & 6 & -2 \\ 6 & 200 & -10 \\ 1 & 2 & 100 \end{pmatrix} \qquad v := \begin{pmatrix} 100 \\ 600 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Встроенная функция *Lsolve*

Returns the vector x solving the linear system of equations M*x=v.

$$\text{lsolve}(M, v) = \begin{pmatrix} 0.905 \\ 3.219 \\ 4.927 \end{pmatrix}$$



3.5. Встроенная функция *Find* в пакете MathCad

Заданы начальные значения переменных

$$x1 := 0 \quad x2 := 0 \quad x3 := 0$$

Given

$$100 \cdot x1 + 6 \cdot x2 - 2 \cdot x3 = 100$$

$$6 \cdot x1 + 200 \cdot x2 - 10 \cdot x3 = 600$$

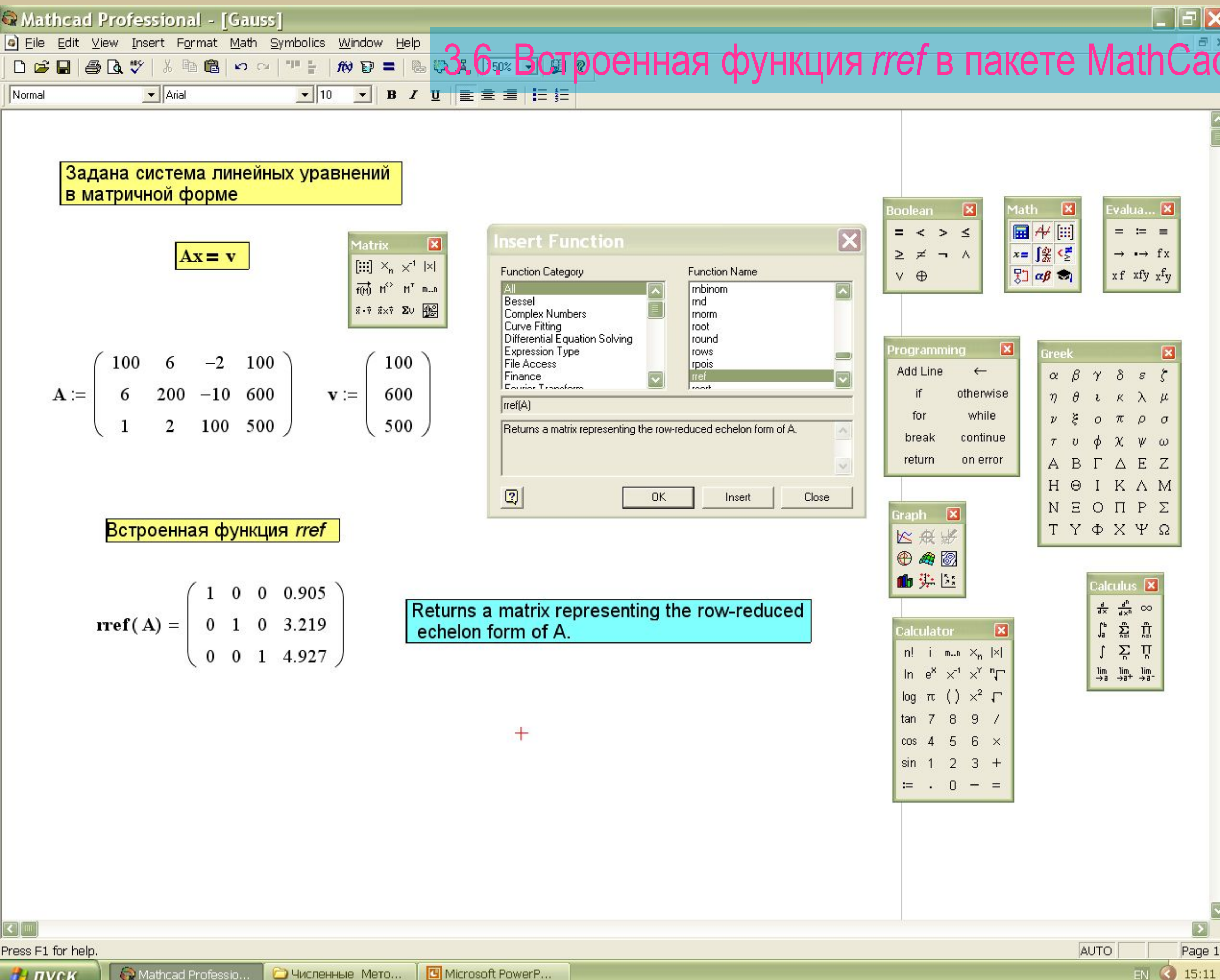
$$1 \cdot x1 + 2 \cdot x2 + 100 \cdot x3 = 500$$

$$\mathrm{Find}(x1, x2, x3) = \begin{pmatrix} 0.905 \\ 3.219 \\ 4.927 \end{pmatrix}$$

Встроенная функция *Find*

Returns the values of var1, var2, ..., that solve a system of equations. Returns a scalar if only one argument, otherwise returns a vector of answers. This function must be preceded by guess values for each argument and the keyword "Given".

3.6. Встроенная функция *rref* в пакете MathCad



3.7. Метод итераций

Дана система n линейных уравнений $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$

Предполагается, что диагональные коэффициенты отличны от нуля $(a_{ii} \neq 0)$

Система приводится к виду

$$\left.\begin{aligned} & x_1 = \beta_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ & x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x \ldots + \alpha_{2n}x_n \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 \ldots + \alpha_{n(n-1)}x_{n-1} \end{aligned}\right\}$$

или в матричном виде $\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}$

Нулевое приближение $\mathbf{x}^{(0)} = \boldsymbol{\beta}$

k-ое приближение $\mathbf{x}^{(k)} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}^{(k-1)}$

Теорема сходимости итерационного ряда

Теорема. Процесс итерации для линейной системы уравнений сходится к

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}$$

единственному ее решению, если какая-нибудь каноническая норма матрицы α меньше единицы, т.е. достаточным условием сходимости является неравенство $\|\alpha\| < 1$.

Следствие 1. Процесс итерации сходится, если:

1. Неопределенная норма или m-норма: $\|\alpha\|_m = \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$

2. $L1$ норма или l-норма: $\|\alpha\|_l = \max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$

3. Евклидова норма или k-норма: $\|\alpha\|_k = \max\limits_{i} \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2} < 1$

Следствие 2. Процесс итерации сходится, если выполнены неравенства :

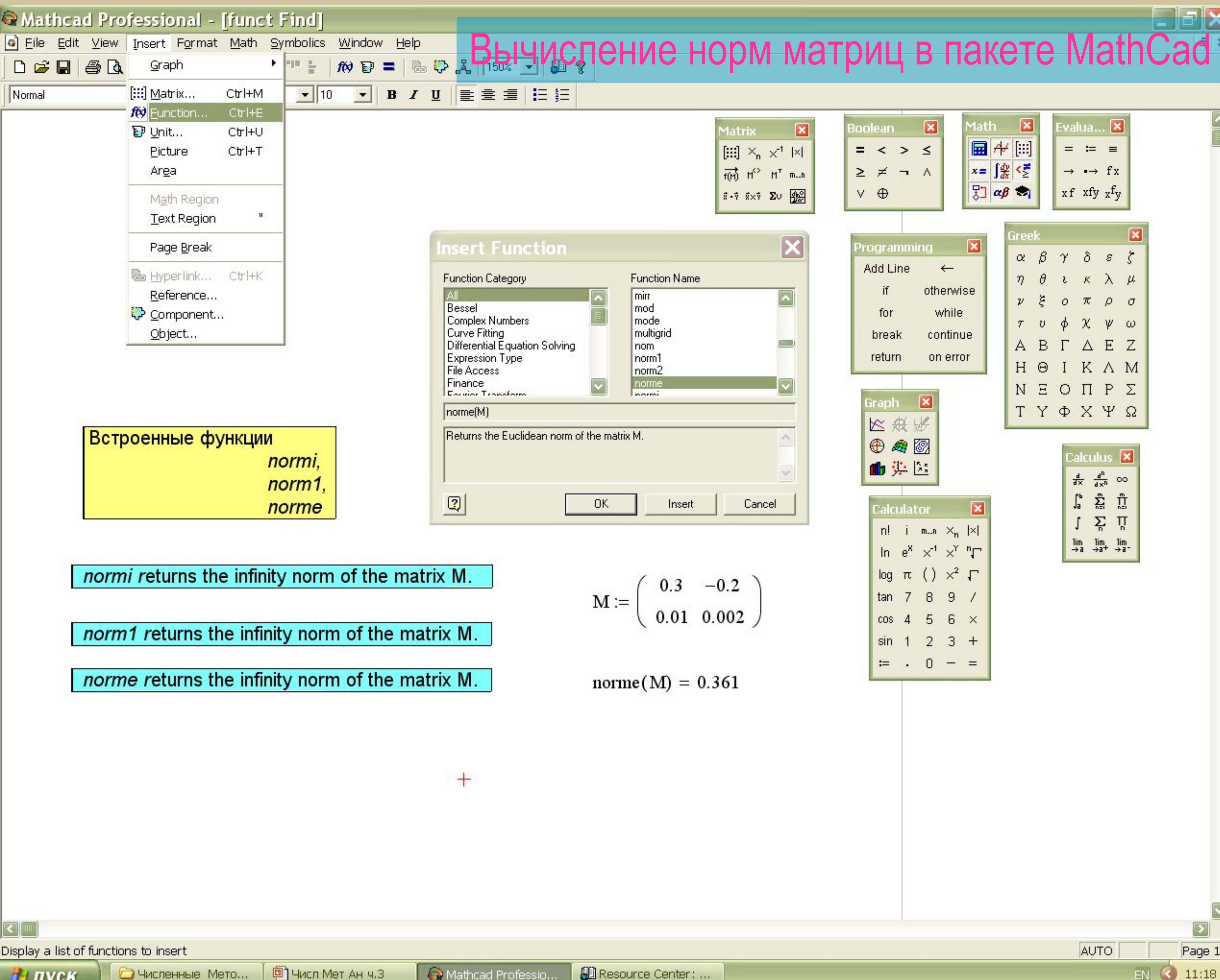
1. $$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n}{}' |a_{ij}|$$

2. $$|a_{jj}| > \sum_{j=1}^{n}{}' |a_{ij}|$$

Условия окончания итерационного процесса:

$$\frac{\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|}{\left\| x^{(k+1)} \right\|} \le \varepsilon$$

Вычисление норм матриц в пакете MathCad



3.8. Метод Зейделя (модификация метода итераций)

При вычислении $(k+1)$ приближения неизвестной x_i учитываются уже вычисленные ранее $(k+1)$ приближения неизвестных $x_1, x_2, \dots x_{i-1}$.

Система приводится к виду

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \beta_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x \ldots + \alpha_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 \ldots + \alpha_{n(n-1)}x_{n-1} \end{array}\right\}$$

В матричном виде $\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}$

Нулевое приближение $\mathbf{x}^{(0)} = \boldsymbol{\beta}$

$(k+1)$-ое приближение

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum\limits_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(k+1)} + \sum\limits_{j=3}^{n} a_{3j}x_j^{(k)} \\ x_m^{(k+1)} = \beta_m + \sum\limits_{j=1}^{m-1} a_{mj}x_j^{(k+1)} + \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{mj}x_j^{(k)} \\ x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k+1)} \end{array}\right\}$$

3.9. Метода итераций для систем нелинейных уравнений

Задана система уравнений и начальные приближения корней $x^{(0)}_0, x^{(0)}_2, \dots x^{(0)}_n$:

$$\left.\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \\ &F_2(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &F_n(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Система приводится к виду

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots x_n) \\ &x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots x_n) \end{aligned}\right\}$$

1-ое приближение

$$\left.\begin{aligned} &x_1^{(1)} = \varphi_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_n^{(0)}) \\ &x_2^{(1)} = \varphi_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_n^{(0)}) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_n^{(1)} = \varphi_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_n^{(0)}) \end{aligned}\right\}$$

$(k+1)$-ое приближение

$$\left.\begin{aligned} &x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots x_n^{(k)}) \\ &x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots x_n^{(k)}) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots x_n^{(k)}) \end{aligned}\right\}$$

4. Интерполирование функций

4.1. Интерполяционная формула Лагранжа

Постановка задачи.

1. На отрезке $[a,b]$ заданы $n+1$ значения аргумента x : $x_0, x_1, \ldots. x_n$ (узлы) и значения функции $y_i=f(x_i)$. Требуется построить полином $L_n(x)$ степени не выше n, имеющий в заданных узлах те же значения, что и функция $f(x)$, т.е. $L_n(x_i) = y_i$ при $(i=0,1,2,\ldots n)$.
2. Шаг интерполяции $h_{i+1}=(x_{i+1}-x_i)$ может быть произвольным (узлы не являются равноотстоящими.)

Представим полином в виде $L_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$

В результате получим систему n+1 уравнений с n+1 неизвестными $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$:

$$\left.\begin{aligned} &a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0 + \ldots a_n x_0 = y_0 \\ &a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1 + \ldots a_n x_1 = y_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n + \ldots a_n x_n = y_n \end{aligned}\right\}$$

Неизвестные a_i можно найти методом Крамера $a_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$

Тогда полином примет вид $L_n(x) = y_0 Q_0(x) + y_1 Q_1(x) + \ldots + y_n Q_n(x)$

Функция $Q_i(x)$ должна удовлетворять условиям $Q_i(x_j) = \delta_{ij}$

Её явный вид

$$Q_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

Интерполяционная формула Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

Интерполяционная формула Лагранжа в пакете MathCad

$$xi := \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad yi := \begin{pmatrix} 9 \\ 42 \\ 35 \\ 4 \\ 95 \end{pmatrix}$$

$$n := \mathrm{length}(xi) - 1 \qquad i := 0..n \qquad j := 0..n$$

$$f(x) := \sum_i yi_i \cdot \prod_j \mathrm{if}\left[i = j, 1, \frac{(x - xi_j)}{(xi_i - xi_j)} \right]$$

$$f(1.5) = 4.039$$

$$f(5) = 35$$

$$f(6) = 40.241$$

Function length(v) Returns the number of elements in vector v. Returns a scalar.

Function if(cond, x, y) returns x if logical condition cond is true (non-zero), y otherwise.

4.2. Интерполяционные формулы Ньютона

Рассматриваемые значения аргумента являются равноотстоящими, т.е. образуют арифметическую прогрессию (шаг интерполяции h = const) .

Определения.

1. Конечные разности первого порядка: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$
2. Конечные разности второго порядка: $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2\, y_{i+1} + y_i$
3. Конечные разности n-ого порядка: $\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$

4.2.1. Первая интерполяционная формула Ньютона

Пусть для функции, заданной таблично с постоянным шагом, составлена таблица конечных разностей. Будем искать интерполяционный полином в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

Коэффициенты $a_0, a_1, \ldots a_n$ найдем из условия совпадения значений функции и интерполяционного полинома в узлах интерполяции.

Полагая $x=x_0$, находим $y_0=P_n(x_0)= a_0$.

Далее подставляя $x=x_1$, находим $y_1=P_n(x_1)= a_0+a_1(x_1-x_0)= a_0+a_1h,$

$x=x_2$, находим $y_2=P_n(x_2)= a_0+a_1(x_1-x_0)+ a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) = a_0+2a_1h +2a_2h^2,$

Найдем коэффициенты $a_1, \ldots.a_{\mathrm{n}}$:

$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{h} \qquad a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} \qquad a_m = \frac{\Delta^m y_0}{m!h^2}$$

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1)... + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^2}(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

Используя понятие обобщенное степени : $x^{[\mathrm{n}]} = x(x\text{-}h)(x\text{-}2h)\ldots[x\text{-}(n\text{-}1)h]$ получим

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)^{[2]} + ... + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^2}(x - x_0)^{[n]}$$

Введем переменную $q=(x=x_0)/h$, (q – число шагов).
Тогда первая интерполяционная формула Ньютона примет вид:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 ... + \frac{q(q-1)...(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

4.2.2. Вторая интерполяционная формула Ньютона

Для интерполирования в конце таблицы применяют вторую интерполяционную формулу Ньютона :

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)\ldots(x - x_1)$$

Введем переменную $q=(x\text{-}x_{\mathrm{n}})/h$, тогда

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}\ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

4.3. Кубическая сплайн-интерполяция

Кубическим интерполяционным сплайном, соответствующим данной функции $f(x)$ и данным узлам x_i, называется функция $S(x)$, удовлетворяющая следующим условиям

1. На каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,2,\ldots n$ функция $S(x)$ является полиномом третьей степени.

2. Функция $S(x)$, а также ее первая и вторая производные непрерывны на отрезке $[a,b]$.

3. $S(x_\mathrm{i})=f(x_i)$, $i=0,1,2,\ldots n$.

На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,2,\ldots n$ будем искать функцию $S(x)= S_i(x)$ в виде полинома третьей степени

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \qquad x_{i-1} \le x \le x_i$$

Коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i подлежат определению (т.е. нахождению) на всех n элементарных отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,\ldots n)$.

Для того, чтобы система алгебраических уравнений имела решение, необходимо составить $4n$ уравнений

Первые $2n$ уравнений получаются из условия , что график пройдет через заданные точки

$$\left.\begin{aligned} S_i(x_{i-1}) &= a_i = y_{i-1} \\ S_i(x_i) &= a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 \end{aligned}\right\} \quad \text{где} \quad \begin{aligned} h_i &= x_i - x_{i-1} \\ (i &= 1,2,\ldots n) \end{aligned}$$

Следующие $(n\text{-}1)$ уравнений вытекают из условия непрерывности первых производных в узлах интерполяции

$$\frac{d}{dx}S_{i+1}(x_i)=\frac{d}{dx}S_i(x_i)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}S_i(x)&=b_i+2c_i(x-x_i)+3d_i(x-x_i)^2\\ \frac{d}{dx}S_{i+1}(x)&=b_{i+1}+2c_{i+1}(x-x_i)+3d_{i+1}(x-x_i)^2\end{aligned}\right\}\qquad (i=1,2,\ldots n-1)$$

Приравнивая правые части в точка $x=x_i$, получаем

$$b_{i+1}=b_i+2c_ih_i+3d_ih_i^2\qquad (i=1,2,\ldots n-1)$$

Следующие $(n\text{-}1)$ уравнений вытекают из условия непрерывности вторых производных в узлах интерполяции

$$\frac{d^2}{dx^2}S_{i+1}(x_i)=\frac{d^2}{dx^2}S_i(x_i)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}S_i(x)&=2c_i+6d_i(x-x_i)\\ \frac{d}{dx}S_{i+1}(x)&=2c_{i+1}+6d_{i+1}(x-x_i)\end{aligned}\right\}\qquad (i=1,2,\ldots n-1)$$

Приравнивая правые части в точка $x=x_\mathrm{i}$, получаем

$$c_{i+1}=c_i+3d_ih_i\qquad (i=1,2,\ldots n-1)$$

На данном этапе у нас имеется $4n$ неизвестных и $(4n\text{-}2)$ уравнений. Оставшиеся 2 уравнения можно получить из условия нулевой кривизны линии в концевых точках (условие свободного закрепления концов). Нулевая кривизна означает равенство нулю вторых производных в этих точках.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2}{dx^2}S_1(x_0)=0\\ &\frac{d^2}{dx^2}S_n(x_n)=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &c_1=0\\ &2c_n+6d_nh_n=0 \end{aligned}\right\}$$

Приравнивая правые части в точка $x=x_i$, получаем

$$c_{i+1}=c_i+3d_ih_i \qquad (i=1,2,\ldots n-1)$$

В результате получим

$$a_i = y_{i-1} \qquad (i = 1,2,\ldots n)$$

$$\left.\begin{aligned} b_i &= \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}\left(c_{i+1} - 2c_i\right) \\ d_i &= -\frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1,2,\ldots n-1)$$

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2\left(h_{i-1} + h_i\right)c_i = 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right) \qquad (i = 2,\ldots n)$$

$$c_1 = 0$$

$$d_n = -\frac{c_n}{3d_n} \qquad b_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{2h_n}{3}c_n$$

The end