МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Теорема 9. (Вейерштрасса)

Всякая возрастающая числовая последовательность $\{x_n\}$ имеет предел: конечный, если она ограниченна сверху, и бесконечный, если она неограниченна сверху, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}.$$

Аналогично, если $\{x_n\}$ – убывающая последовательность, то существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\},$$

и, следовательно, этот предел конечен, если последовательность ограниченна снизу, и бесконечный, если она неограниченна снизу.

КРИТЕРИЙ КОШИ

Теорема 10 (Критерий Коши).

Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась к конечному пределу, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\, \varepsilon \;\; \exists\, N \;\; \forall\, m, n > N \;\; \left| x_m - x_n \right| < \varepsilon$$

Последовательность, удовлетворяющая этому условию называется **«фундаментальной последовательностью»** или последовательностью, «сходящейся в себе».

Функции

Определение. Если каждому элементу x из множества X по определённому правилу или закону f ставится в соответствие один элемент y из множества Y, то говорят, что **на множестве X задана функция f.** *Обозначение:* $f : X \to Y$ или $y = f(x)$.

Способы задания функции:

- **словесный,**
- **аналитический,**
- **табличный,**
- **графический.**

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X, а функция $z = \phi(y)$ определена на множестве Y, причём область значений функции f содержится в области определения функции ϕ. Функция $z = \phi(f(x))$ называется **сложной функцией**, или **функцией от функции**, или **суперпозицией функций** $y = f(x)$ *и* $z = \phi(y)$.

Обозначение: $\phi \circ f$, или $\phi(f) = \phi(f(x))$, ϕ - внешняя, f – внутренняя функция.

Основные элементарные функции

- Постоянная $y = c$, c – const (константа);
- степенная функция $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$;
- показательная функция $y = a^{x}$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- тригонометрические функции

$$y = \sin x,\ \ y = \cos x,\ \ y = \operatorname{tg} x,\ \ y = \operatorname{ctg} x;$$

- обратные тригонометрические функции

$$y = \arcsin x,\ \ y = \arccos x,\ \ y = \operatorname{arctg} x,\ \ y = \operatorname{arcctg} x.$$

Основные элементарные функции

1) степенные функции:

1. $y = x^0$:

1) $D(f) = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$;
   имеет разрыв в точке $x = 0$;
2) $E(f) = \{1\}$;
3) четная: $(-x)^0 = x^0$;
4) постоянна на $(-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$;
5) ограниченная;
6) непериодическая;
7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

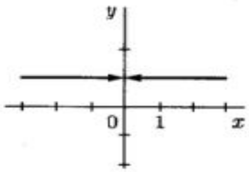

Рис. 2.1

2. $y = x$:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
3) нечетная: $(-x)^1 = -x^1$;
4) возрастает на $(-\infty,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая;
7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

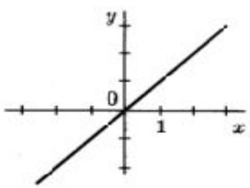

Рис. 2.2

3. $y = x^n$,
n — нечетное натуральное число $\geqslant 3$:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
3) нечетная: $(-x)^n = -x^n$;
4) возрастает на $(-\infty,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая;
7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

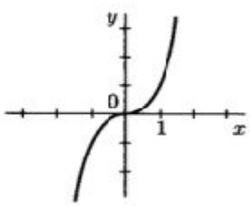

Рис. 2.3

4. $y = x^n$,
n — четное натуральное число:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = [0,\ +\infty)$;
3) четная: $(-x)^n = x^n$;
4) убывает на $(-\infty,\ 0)$,
   возрастает на $[0,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая;
7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

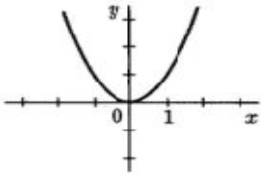

Рис. 2.4

5. $y = x^{-n}$,
n — нечетное натуральное число:

1) $D(f) = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$;
   имеет разрыв в точке $x = 0$;
2) $E(f) = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$;
3) нечетная: $(-x)^{-n} = -x^{-n}$;
4) убывает на $(-\infty,\ 0)$ и на $(0,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая;
7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

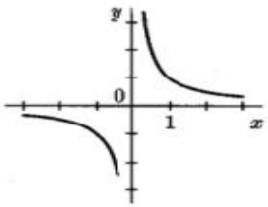

Рис. 2.5

6. $y = x^{-n}$,
n — четное натуральное число:

1) $D(f) = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$;
   имеет разрыв в точке $x = 0$;
2) $E(f) = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$;
3) четная: $(-x)^{-n} = x^{-n}$;
4) возрастает на $(-\infty,\ 0)$,
   убывает на $(0,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая;
7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

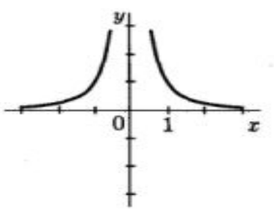

Рис. 2.6

Основные элементарные функции

7. $y = \sqrt[n]{x}$,
n — нечетное натуральное число:

1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty, +\infty)$;
3) нечетная: $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$;
4) возрастает на $(-\infty, +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая;
7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

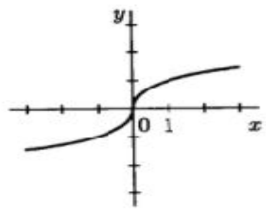

Рис. 2.7

8. $y = \sqrt[n]{x}$,
n — четное натуральное число:

1) $D(f) = [0, +\infty)$;
2) $E(f) = [0, +\infty)$;
3) общего вида;
4) возрастает на $[0, +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая;
7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$. 7) непрерыв-
на.

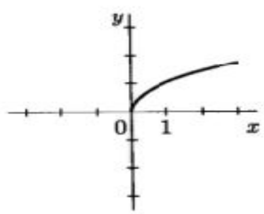

Рис. 2.8

2) показательные функции:

1. $y = a^x$, $0 < a < 1$:

1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
2) $E(f) = (0, +\infty)$;
3) общего вида;
4) убывает на $(-\infty, +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая;
7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

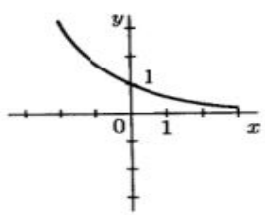

Рис. 2.9

2. $y = a^x$, $a > 1$:

1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
2) $E(f) = (0, +\infty)$;
3) общего вида;
4) возрастает на $(-\infty, +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая;
7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

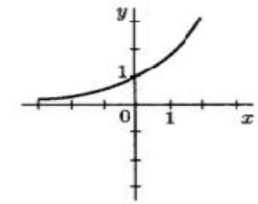

Рис. 2.10

3) логарифмические функции:

1. $y = \ln_a x$, $0 < a < 1$:

1) $D(f) = (0, +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty, +\infty)$;
3) общего вида;
4) убывает на $(-\infty, +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая;
7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

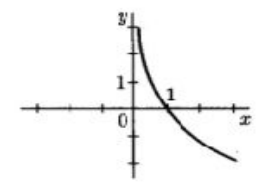

Рис. 2.11

2. $y = \log_a x$, $a > 1$:

1) $D(f) = (0, +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty, +\infty)$;
3) общего вида;
4) возрастает на $(-\infty, +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая;
7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

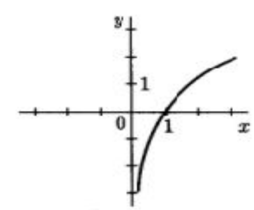

Рис. 2.12

Основные элементарные функции

4) тригонометрические функции:

1. $y = \sin x$:

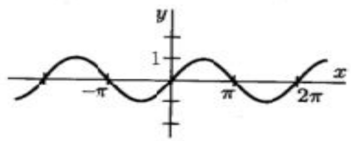

Рис. 2.13

1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
2) $E(f) = [-1, 1]$;
3) нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$;
4) возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$,
убывает на $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$;
5) ограниченная: $|\sin x| \leqslant 1$;
6) периодическая: $\sin(x+T) = \sin x$, $T = 2\pi$;
7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

2. $y = \cos x$:

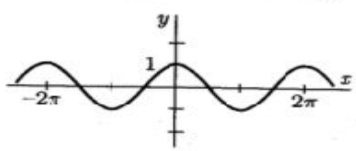

Рис. 2.14

1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
2) $E(f) = [-1, 1]$;
3) четная: $\cos(-x) = \cos x$;
4) возрастает на $[-\pi + 2\pi n, 2\pi n]$,
убывает на $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$;
5) ограниченная: $|\cos x| \leqslant 1$;
6) периодическая: $\cos(x+T) = \cos x$, $T = 2\pi$;
7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

3. $y = \operatorname{tg} x$:

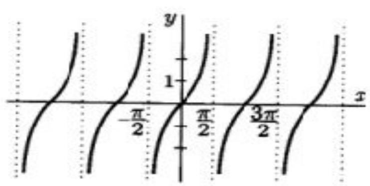

Рис. 2.15

1) $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, неопределена в точках $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$;
2) $E(f) = (-\infty, +\infty)$;
3) нечетная: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$;
4) возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;
5) неограниченная;
6) периодическая $\operatorname{tg}(x+T) = \operatorname{tg} x$, $T = \pi$;
7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

4. $y = \operatorname{ctg} x$:

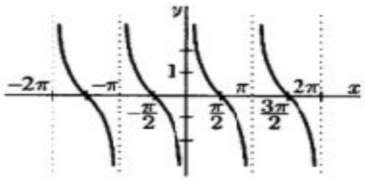

Рис. 2.16

1) $D(f) = (\pi n, \pi + \pi n)$, неопределена в точках $x = \pi + \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$;
2) $E(f) = (-\infty, +\infty)$;
3) нечетная: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$;
4) убывает на $(\pi n, \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$;
5) неограниченная;
6) периодическая $\operatorname{ctg}(x+T) = \operatorname{ctg} x$, $T = \pi$;
7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

5) обратные тригонометрические функции:

1. $y = \arcsin x$:

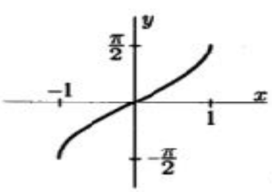

Рис. 2.17

1) $D(f) = [-1, 1]$;
2) $E(f) = [-\pi/2, +\pi/2]$;
3) нечетная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;
4) возрастает на $[-1, 1]$;
5) ограниченная: $|\arcsin x| \leqslant \pi/2$;
6) непериодическая;
7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

2. $y = \arccos x$:

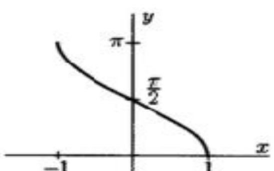

Рис. 2.18

1) $D(f) = [-1, 1]$;
2) $E(f) = [0, \pi]$;
3) общего вида:
$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;
4) убывает на $[-1, 1]$;
5) ограниченная: $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$;
6) непериодическая;
7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

Основные элементарные функции

3. $y = \operatorname{arctg} x$:

1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
2) $E(f) = (-\pi/2, \pi/2)$;
3) нечетная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$;
4) возрастает на $(-\infty, +\infty)$;
5) ограниченная: $|\operatorname{arctg} x| < \pi/2$;
6) непериодическая;
7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

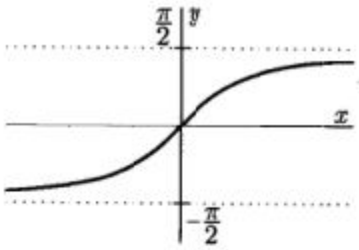

Рис. 2.19

4. $y = \operatorname{arcctg} x$:

1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
2) $E(f) = (0, \pi)$;
3) общего вида:
$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$$
4) убывает на $(-\infty, +\infty)$;
5) ограниченная: $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$;
6) непериодическая;
7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

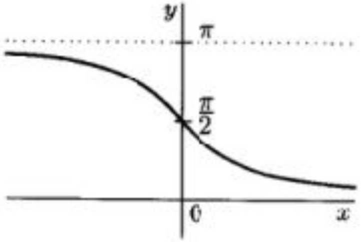

Рис. 2.20

Бер Л.М. Введение в анализ
ТПУ Рег.№282 от 25.11.2009

Классификация функций

Все функции, получаемые с помощью конечного числа алгебраических действий над основными элементарными функциями, а также суперпозицией (или наложением) этих функций, составляют класс ***элементарных функций***.

Функция вида

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$$

где $x \in R, a_i \in R, a_0 \neq 0, n = 0,1,2,...$, называется *целой рациональной функцией* или ***алгебраическим многочленом (полиномом) степени n***. Многочлен первой степени называется также *линейной функцией*.

Функция, представляющая собой отношение двух целых рациональных функций

$$y = f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

называется *дробно-рациональной функцией*.

Совокупность целых рациональных и дробно-рациональной функцией образует класс ***рациональных функций***.

Классификация функций

Алгебраическая функция, не являющаяся рациональной функцией, называется ***иррациональной функцией***.

Всякая функция, не являющаяся алгебраической, называется ***трансцендентной***.

Трансцендентными в частности являются функции:

- Секанс: $y = \sec x$, где $\sec x = 1/\cos x$.
- Косеканс: $y = \operatorname{cosec} x$, где $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$.
- Синус гиперболический: $y = \operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$.
- Косинус гиперболический: $y = \operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$.
- Тангенс гиперболический: $y = \operatorname{th} x = (e^x - e^{-x})/ (e^x + e^{-x})$.
- Котангенс гиперболический: $y = \operatorname{cth} x = (e^x + e^{-x})/ (e^x - e^{-x})$.
- Секанс гиперболический: $y = \operatorname{sch} x = 2/ (e^x + e^{-x})$.
- Косеканс гиперболический: $y = \operatorname{csch} x = 2/ (e^x - e^{-x})$.

Спасибо за внимание