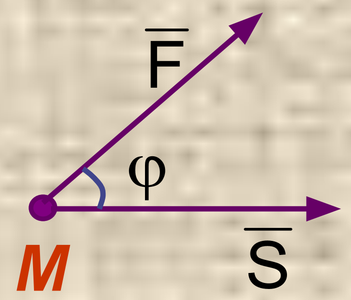
Векторная алгебра

- Скалярное произведение векторов
- Векторное произведение векторов
- Смешанное произведение векторов

Скалярное произведение векторов

Пусть постоянная сила $\overline{F}$ действует на прямолинейно перемещающуюся точку *М* под углом *φ* к направлению движения

Как известно из физики, работа силы $\overline{F}$ по перемещению точки *М* определяется по формуле:



$$A = \left|\overline{F}\right| \cdot \left|\overline{S}\right| \cdot \cos\varphi$$

Таким образом, двум векторам: силе и перемещению оказался сопоставлен скаляр – работа.

Этот скаляр *А* и называется скалярным произведением силы $\overline{F}$ на перемещение $\overline{S}$

Скалярным произведением двух векторов называется произведение модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначатся:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не нулевые: $\bar{a}\cdot\bar{b}=0 \Leftrightarrow \bar{a}\perp\bar{b}$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot ПР_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\cdot ПР_{\bar{b}}\bar{a}$$

$$ПР_{\bar{a}}\bar{b}$$

$$= ПР_{\bar{b}}\bar{a}$$

$$\bar{a}\cdot\bar{a} = |\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos 0^o \Rightarrow \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$$

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

Законы скалярного произведения

1) $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$

2) $(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}$

3) $\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b}) = (\lambda\bar{a})\cdot\bar{b} = \bar{a}\cdot(\lambda\bar{b})$

Скалярное произведение векторов

Для координатных ортов декартовой системы координат справедливо:

$$\bar{i}\cdot\bar{i}=\bar{j}\cdot\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{k}=1 \qquad \bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{i}\cdot\bar{k}=\bar{j}\cdot\bar{k}=0$$

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат заданы векторы:

$$\bar{a}=x_1\cdot\bar{i}+y_1\cdot\bar{j}+z_1\cdot\bar{k} \qquad \bar{b}=x_2\cdot\bar{i}+y_2\cdot\bar{j}+z_2\cdot\bar{k}$$

Найдем скалярное произведение:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left(x_1\cdot\bar{i}+y_1\cdot\bar{j}+z_1\cdot\bar{k}\right)\cdot\left(x_2\cdot\bar{i}+y_2\cdot\bar{j}+z_2\cdot\bar{k}\right)$$

$$=x_1x_2\cdot 1+y_1x_2\cdot 0+z_1x_2\cdot 0+x_1y_2\cdot 0+y_1y_2\cdot 1+$$

$$z_1y_2\cdot 0+x_1z_2\cdot 0+y_1z_2\cdot 0+z_1z_2\cdot 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}$$

Скалярное произведение векторов

Из формулы скалярного произведения векторов следует формула для нахождения угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Найти косинус угола между векторами:

$$\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$$
$$\overline{b} = 6\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k}$$

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = 1\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3\cdot(-2) = 8$$

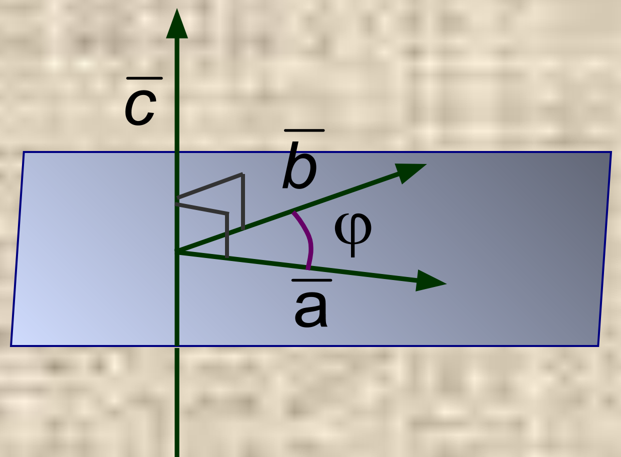
$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$$

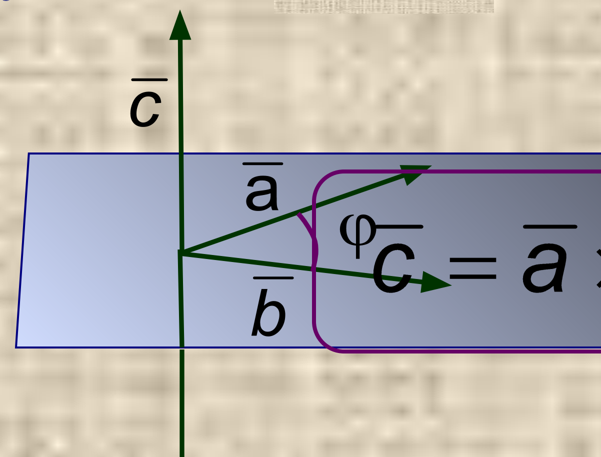
$$\left|\overline{b}\right| = \sqrt{6^2+4^2+(-2)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{14}} = \boxed{\frac{2}{7}}$$

Векторное произведение векторов

Тройка некомпланарных векторов $\overline{a};\overline{b};\overline{c}$ называется ***левой*** если наименьший поворот с конца третьего вектора $\overline{c}$ от первого вектора $\overline{a}$ ко второму вектору $\overline{b}$ виден ***по*** часовой стрелки





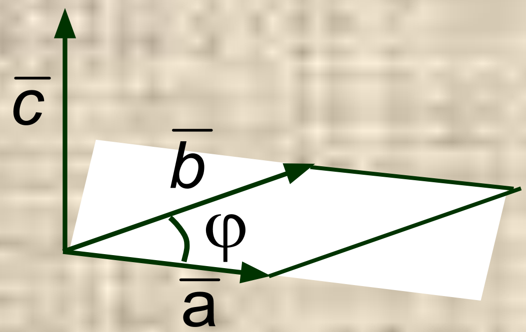
$$\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$$

Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, определяемый следующим образом:

- $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin(\overline{a}; \overline{b})$.
- $\overline{c} \perp \overline{a}; \quad \overline{c} \perp \overline{b}$
- Вектор $\overline{c}$ направлен так, что тройка векторов $\overline{a};\overline{b};\overline{c}$ - правая.

Векторное произведение векторов

Модуль вектороного произведения равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах



$$S = \left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\varphi$$

$$\boxed{\overline{a} \times \overline{b} = 0} \Leftrightarrow \boxed{\overline{a} \parallel \overline{b}}$$

Законы векторного произведения

1) $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$

2) $\overline{a} \times \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}$

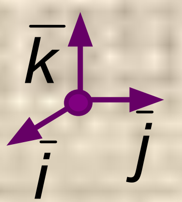
3) $\lambda(\overline{a} \times \overline{b}) = (\lambda\overline{a}) \times \overline{b} = \overline{a} \times (\lambda\overline{b})$

4) $\overline{a} \times \overline{a} = 0$ - векторный квадрат равен нулю для любого вектора

Векторное произведение векторов

Для координатных ортов декартовой системы координат справедливо:

$$\bar{i}\times\bar{i}=\bar{j}\times\bar{j}=\bar{k}\times\bar{k}=0$$



$$\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k} \qquad \bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k}$$

$$\bar{j}\times\bar{k}=\bar{i} \qquad \bar{k}\times\bar{j}=-\bar{i}$$

$$\bar{k}\times\bar{i}=\bar{j} \qquad \bar{i}\times\bar{k}=-\bar{j}$$

$$|\bar{k}|=|\bar{i}|\cdot|\bar{j}|\cdot\sin 90^\circ=1$$

$$|\bar{i}|=|\bar{j}|\cdot|\bar{k}|\cdot\sin 90^\circ=1$$

$$|\bar{j}|=|\bar{k}|\cdot|\bar{i}|\cdot\sin 90^\circ=1$$

$\bar{k}\perp\bar{i};\bar{j}$

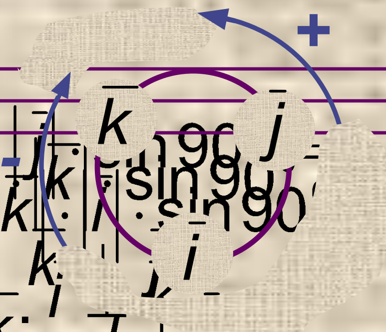
$\bar{i}\perp\bar{j};\bar{k}$

$\bar{j}\perp\bar{k};\bar{i}$

$\bar{i};\bar{j};\bar{k}$ – правая тройка

$\bar{j};\bar{k};\bar{i}$ – правая тройка

$\bar{k};\bar{i};\bar{j}$ – правая тройка



Векторное произведение двух разноименных ортов, следующих друг за другом в направлении положительного обхода окружности, равно третьему орту со знаком плюс, в противоположном же случае - знаком минус.

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат заданы векторы:

$$\bar{a}=x_1\cdot\bar{i}+y_1\cdot\bar{j}+z_1\cdot\bar{k} \qquad \bar{b}=x_2\cdot\bar{i}+y_2\cdot\bar{j}+z_2\cdot\bar{k}$$

Найдем векторное произведение:

Векторное произведение векторов

$$\bar{a} \times \bar{b} = \left(x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k}\right) \times \left(x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}\right)$$

$$= x_1 x_2 \cdot 0 + y_1 x_2 \cdot \left(-\bar{k}\right) + z_1 x_2 \cdot \bar{j} + x_1 y_2 \cdot \bar{k} +$$

$$y_1 y_2 \cdot 0 + z_1 y_2 \cdot \left(-\bar{i}\right) + x_1 z_2 \cdot \left(-\bar{j}\right) +$$

$$+ y_1 z_2 \cdot \bar{i} + z_1 z_2 \cdot 0 =$$

$$= -y_1 x_2 \cdot \bar{k} + z_1 x_2 \cdot \bar{j} + x_1 y_2 \cdot \bar{k} - z_1 y_2 \cdot \bar{i} - x_1 z_2 \cdot \bar{j} + y_1 z_2 \cdot \bar{i} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} =$$

$$\boxed{\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}$$

Векторное произведение векторов

Найти векторное произведение векторов:

$$\overline{a} = 2\overline{i} - 3\overline{j} - \overline{k} \qquad \overline{b} = 3\overline{i} - \overline{j} - 4\overline{k}$$

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

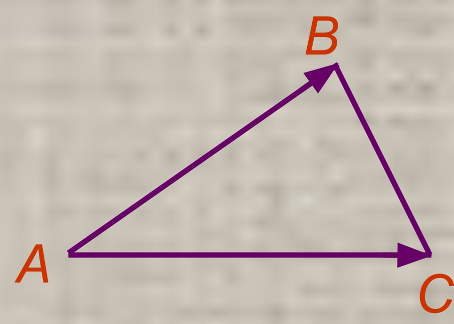
$$= \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \cdot \overline{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \cdot \overline{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \overline{k}$$

$$= (12 - 1) \cdot \overline{i} - (-8 + 3) \cdot \overline{j} + (-2 + 9) \cdot \overline{k} = \boxed{-11\overline{i} + 5\overline{j} + 7\overline{k}}$$

Векторное произведение векторов

Найти площадь треугольника с вершинами:

$$A\left(2;3;1\right) \quad B\left(5;6;3\right) \quad C\left(7;1;10\right)$$



Найдем координаты векторов:

$$\overline{AB}=\left\{5-2;6-3;3-1\right\}=\left\{3;3;2\right\}$$

$$\overline{AC}=\left\{7-2;1-3;10-1\right\}=\left\{5;-2;9\right\}$$

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$$

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 3 & 3 & 2\\ 5 & -2 & 9\end{vmatrix}=31\overline{i}-17\overline{j}-21\overline{k}$$

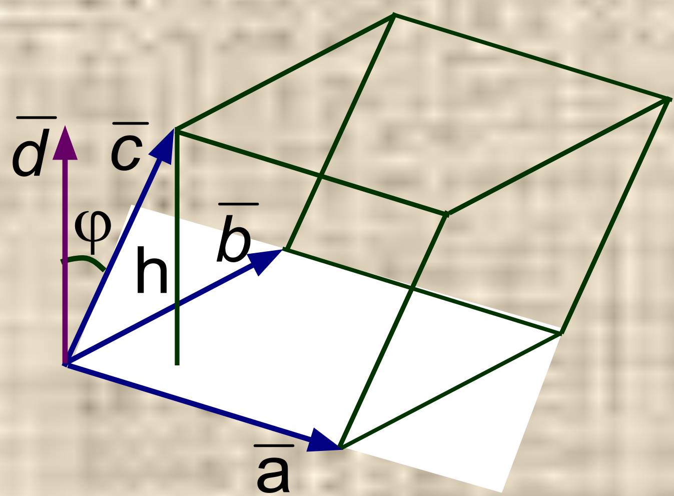
$$S=\frac{1}{2}\sqrt{31^2+(-17)^2+(-21)^2}=\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{1691}\approx 20.6}$$

Смешанное произведение векторов

Векторно - скалярным или ***смешанным произведением*** трех векторов $\overline{a};\overline{b};\overline{c}$ называется произведение, которое получается скалярным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор, т.е. произведение вида:

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}$$

Смешанное произведение представляет собой скаляр. Выясним его геометрический смысл.



Построим на векторах $\overline{a};\overline{b};\overline{c}$ *параллелепипед.*

Обозначим $\overline{d}=\overline{a}\times\overline{b}$

Площадь основания, который будет параллелограмм со сторонами $\overline{a};\overline{b}$

Обозначим через h высоту параллелепипеда, тогда объем будет равен:

$$h=\left|\overline{c}\right|\cdot\cos\varphi \Rightarrow$$

$$V=\left|\overline{d}\right|\cdot\left|\overline{c}\right|\cdot\cos\varphi$$

$$V=S_{\overline{a};\overline{b}}\cdot h=\left|\overline{d}\right|\cdot h \Rightarrow$$

$$V=(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}$$

Смешанное произведение векторов

Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах в том случае, если векторы $\overline{a};\overline{b};\overline{c}$ образуют ***правую тройку векторов*** (как в предыдущем примере).

В случае, если векторы образуют ***левую тройку***, то смешанное произведение равно объему параллелепипеда, взятому со знаком «-»:

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=-V$$

Таким образом, объем параллелепипеда, построенного на трех векторах, всегда равен абсолютной величине их смешанного произведения:

$$\boxed{V=\left|\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}\right|}$$

Смешанное произведение векторов

Законы смешанного произведения

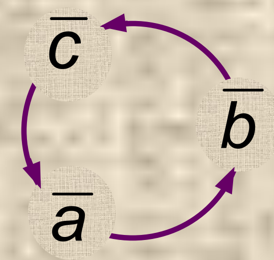
1) ***Сочетательный закон*** следует из геометрического смысла смешанного произведения:

$$\left.\begin{aligned} V &= \left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} \\ V &= \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$$

Учитывая сочетательный закон, смешанное произведение обозначают: $(\bar{a};\bar{b};\bar{c})$ или $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$.

2) ***Закон круговой переместительности:***

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \bar{b}\,\bar{c}\,\bar{a} = \bar{c}\,\bar{a}\,\bar{b} = -\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{b} = -\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a} = -\bar{b}\,\bar{a}\,\bar{c}$$



При перестановке множителей не нарушающей их кругового порядка, смешанное произведение не меняется, при перестановке же множителей, нарушающей круговой порядок, смешанное произведение меняет свой знак

Смешанное произведение векторов

3) ***Распределительный закон***

$$\left(\overline{a}_1 + \overline{a}_2\right)\overline{b}\,\overline{c} = \overline{a}_1\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}_2\overline{b}\,\overline{c}$$

$$\boxed{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\overline{a};\overline{b};\overline{c} - \text{компланарны}}$$

В частности, смешанное произведение равно нулю, если в нем два множителя одинаковы: $\overline{a}\,\overline{a}\,\overline{c} = 0$

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат заданы векторы:

$$\overline{a} = x_1 \cdot \overline{i} + y_1 \cdot \overline{j} + z_1 \cdot \overline{k} \qquad \overline{b} = x_2 \cdot \overline{i} + y_2 \cdot \overline{j} + z_2 \cdot \overline{k}$$

$$\overline{c} = x_3 \cdot \overline{i} + y_3 \cdot \overline{j} + z_3 \cdot \overline{k}$$

Смешанное произведение векторов

$$\bar{b}\times\bar{c}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_2 & z_2\\ y_3 & z_3\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix}x_2 & z_2\\ x_3 & z_3\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}\cdot\bar{k}$$

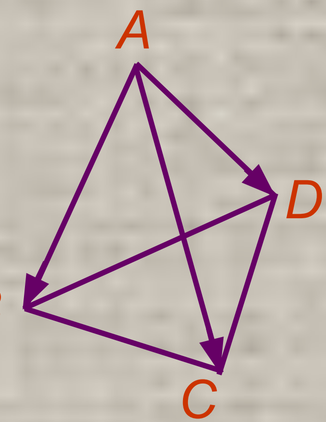
$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=\begin{vmatrix}y_2 & z_2\\ y_3 & z_3\end{vmatrix}\cdot x_1-\begin{vmatrix}x_2 & z_2\\ x_3 & z_3\end{vmatrix}\cdot y_1+\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}\cdot z_1$$

$$\boxed{\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}}$$

Смешанное произведение векторов

Найти объем треугольной пирамиды с вершинами:

$$A\left(2;\,2;\,2\right)\quad B\left(4;\,3;\,3\right)\quad C\left(4;\,5;\,4\right)\quad D\left(5;\,5;\,6\right)$$



Найдем координаты векторов:

$$\overline{AB}=\left\{4-2;\,3-2;\,3-2\right\}=\left\{2;\,1;\,1\right\}$$

$$\overline{AC}=\left\{4-2;\,5-2;\,4-2\right\}=\left\{2;\,3;\,2\right\}$$

$$\overline{AD}=\left\{5-2;\,5-2;\,6-2\right\}=\left\{3;\,3;\,4\right\}$$

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}=\begin{vmatrix}2&1&1\\2&3&2\\3&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1\\-2&1&2\\-5&-1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&1\\-5&-1\end{vmatrix}=7$$

$$V=\frac{1}{6}\left|\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right|$$

Объем треугольной пирамиды равен 1/6 части параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a};\overline{b};\overline{c}$

$$V=\frac{7}{6}$$