

## Лекция № 2. Моделирование химико-технологических процессов

Многие химико-технологические процессы настолько сложны, что удастся лишь составить систему дифференциальных уравнений для их описания и установить условия однозначности. Решить же эти уравнения известными в математике методами обычно не представляется возможным. В подобных случаях используют *метод моделирования*. В широком смысле *под моделированием понимают исследование объектов познания на их моделях*, поэтому моделирование неотделимо от развития знания.

Огромное значение имеет моделирование при исследовании химико-технологических процессов и проектировании химических производств. При этом *под моделированием понимают метод исследования химико-технологических процессов на моделях, отличающихся от объектов моделирования (натуры) в основном масштабом*. Моделирование можно осуществлять двумя основными методами – *методом обобщенных переменных*, или *методом теории подобия* (физическое моделирование), и *методом численного эксперимента* (математическое моделирование).

При *физическом моделировании* (масштабировании) экспериментально исследуемый объект (модель) отличается от натуры *масштабом*, *физическая же природа явления (процесса)* остается той же. Изучение процессов с целью получения уравнений, необходимых для их анализа и расчета, можно проводить теоретически. Однако такой путь часто оказывается невозможным.

В таких случаях прибегают к проведению опытов, получая эмпирические зависимости. Однако такое осуществление экспериментов, которое позволяет обобщать результаты опытов и распространять их на широкий круг вопросов и явлений, подобных изучаемому, но отличающихся численными значениями параметров наиболее плодотворно. Это достигается при использовании для обработки опытных данных методов теории подобия. Метод обобщенных переменных составляет основу теории подобия.

Одним из основных принципов теории подобия является выделение из класса явлений (процессов), описываемых общим законом (процессы движения жидкостей, диффузии, теплопроводности и т.п.), группы подобных явлений. Подобными называют такие явления, для которых отношения сходственных и характеризующих их величин постоянны.

Различают следующие виды подобия: а) геометрическое; б) временное; в) физических величин; г) начальных и граничных условий.

Инварианты подобия, представляющие собой отношения однородных величин, называют *симплексами* (*simplex* (лат.) – простой), или *параметрическими критериями* (например, отношение  $L_1/D_1$  – геометрический симплекс). Инварианты подобия, выраженные отношением *разнородных* величин, называют *критериями подобия* (*kriterion* (греч.) – признак, средство для суждения). Обычно их обозначают начальными буквами имен ученых, внесших существенный вклад в данную область знания (например, Re – число, или критерий, Рейнольдса).

● Явления, подобные между собой, характеризуются численно равными критериями подобия. Равенство критериев подобия – единственное количественное условие подобия процессов. Отсюда очевидно, что отношение критериев одной системы к критериям подобной ей системы всегда равно 1. Например, для природы и модели  $Re_1 = Re_2$ . Тогда

$$\frac{w_1 \rho_1 d_1 / \mu_1}{w_2 \rho_2 d_2 / \mu_2} = 1 \quad (1.0)$$

или

$$\frac{(w_1/w_2)(\rho_1/\rho_2)(d_1/d_2)}{\mu_1/\mu_2} = \frac{a_w a_\rho a_d}{a_\mu} = 1. \quad (1.1)$$

Если отношение констант подобия равно 1, оно носит название *индикатора подобия* и указывает на равенство критериев подобия. Следовательно, у *подобных явлений индикаторы подобия равны единице* (первая теорема подобия). Критерии подобия, которые составлены только из величин, входящих в условия однозначности, называют *определяющими*.

Критерии же включающие также величины, которые не являются необходимыми для однозначной характеристики данного процесса, а сами зависят от этих условий называют *определяемыми*.

Любая зависимость между переменными, характеризующими какое-либо явление (т.е. система дифференциальных уравнений), может быть представлена в виде зависимости между критериями подобия (вторая теорема подобия):

$$f(K_1 K_2 K_3 \dots) = 0 \quad (1.2)$$

● Явления, подобные между собой, характеризуются численно равными критериями подобия. Равенство критериев подобия – единственное количественное условие подобия процессов. Отсюда очевидно, что отношение критериев одной системы к критериям подобной ей системы всегда равно 1. Например, для натуры и модели  $Re_1 = Re_2$ . Тогда

$$\frac{w_1 \rho_1 d_1 / \mu_1}{w_2 \rho_2 d_2 / \mu_2} = 1 \quad (1.0)$$

или

$$\frac{(w_1/w_2)(\rho_1/\rho_2)(d_1/d_2)}{\mu_1/\mu_2} = \frac{a_w a_\rho a_d}{a_\mu} = 1. \quad (1.1)$$

Если отношение констант подобия равно 1, оно носит название *индикатора подобия* и указывает на равенство критериев подобия. Следовательно, у *подобных явлений индикаторы подобия равны единице* (первая теорема подобия). Критерии подобия, которые составлены только из величин, входящих в условия однозначности, называют *определяющими*.

Критерии же включающие также величины, которые не являются необходимыми для однозначной характеристики данного процесса, а сами зависят от этих условий называют *определяемыми*.

Любая зависимость между переменными, характеризующими какое-либо явление (т.е. система дифференциальных уравнений), может быть представлена в виде зависимости между критериями подобия (вторая теорема подобия):

$$f(K_1 K_2 K_3 \dots) = 0 \quad (1.2)$$

Постоянное отношение каждой из действующих сил к силе инерции (или обратное отношение, которое используется вместо прямого отношения сил инерции, чтобы не иметь дела с дробными величинами) характеризуется критериями подобия. Критерии гидродинамического подобия можно получить из дифференциального уравнения движения реальной жидкости Навье-Стокса.

Напишем уравнение Навье-Стокса для реальной несжимаемой жидкости одномерного установившегося движения (для оси  $z$ ):

(1.5)

Разделим все слагаемые уравнения (1.5) на правую его часть

(1.6)

Выполняя подобное преобразование уравнения (1.6), умножим каждый из его элементов на соответствующие константы подобия, причем множители как постоянные величины выносим за знак дифференциала:

(1.7)

Сопоставляя уравнения (1.6) и (1.7), получим безразмерные комплексы, составленные из констант подобия, которые носят название индикаторов подобия (при этом одноименные множители сокращаются). Для членов уравнения (1.7), учитывающих влияние сил тяжести и объемных сил, будем иметь:

(1.8)

Заменяя  $\dots$ , получим

(1.9)

Для членов уравнения (1.7), учитывающих влияние сил давления:

(1.10)

Для членов уравнения (1.7), учитывающих влияние сил внутреннего трения:

(1.11)

В индикаторах подобия (1.9-1.11), вместо масштабных множителей подставив соответствующие отношения физических величин

(1.12)

(физические величины в знаменателе относятся к данной системе, а в числителе к подобной), получим безразмерные комплексы или критерии подобия.

1. Критерий Фруда  $Fr$  представляет собой отношение сил тяжести к силам инерции и получается из индикатора подобия (1.9), откуда

(1.13)

(1.14)

(1.15)

Чтобы избежать дробных величин, обычно пользуются обратным выражением:  
(1.16)

2. Критерий Эйлера  $Eu$  представляет собой отношение сил давления к инерционным силам, получается из индикатора подобия (1.10):

$$(1.17)$$

$$(1.18)$$

$$(1.19)$$

Поскольку для теории подобия важны не абсолютные значения, а относительные, вместо величины абсолютного давления вводят разность давлений в каких-нибудь двух точках, и критерий Эйлера принимает вид:

$$(1.20)$$

3. Критерий Рейнольдса  $Re$  представляет собой отношение сил трения к силам инерции и определяет режим движения жидкости. Получается он из индикатора подобия (1.11):

$$(1.21)$$

$$(1.22)$$

$$(1.23)$$

$$(1.24)$$

Если рассматривать неустановившееся движение, то аналогичным образом, как и для выведенных критериев гидродинамического подобия, получают критерий гомохронности  $Ho$ , учитывающий неустановившееся движение жидкости:

(1.25)

Таким образом, уравнение Навье-Стокса, описывающее в общей форме процесс движения жидкости, в результате подобного преобразования могут быть представлены в виде функции от критериев подобия:

(1.26)

Для установившегося движения, где  $Ho$  исключается:

(1.27)

Для вынужденного движения жидкости влияние сил тяжести ничтожно мало, и равенством критериев Фруда в этом случае можно пренебречь. Тогда зависимость между критериями подобия в общей форме выразится функцией:

(1.28)

Критерий Эйлера является неопределяющим, поскольку при равенстве критериев Фруда и Рейнольдса получается сам собой, так как перепад давления является следствием распределения скоростей в потоке.

Вид функции (1.28) представляется в степенной форме:

(1.29)

Основные критерии гидродинамического подобия  $Re$ ,  $Fr$  иногда заменяют более сложными критериями Галилея  $Ga$  и  $Ar$ , полученными сочетанием основных критериев:

(1.30)