Лекция 7
Исследование нелинейных процессов на рынке ВРП аналитическими методами

1. Модель взаимовлияния спроса и предложения для слабонеравновесного рынка

Цель: найти математические уравнения кривых спроса и предложения.

- В слабонеравновесных процессах все коэффициенты эластичности не меняются: $\mathbf{L_{ii}}$ = Const, $\mathbf{L_{ee}}$ = Const, $\mathbf{L_{ei}} = \mathbf{L_{ie}}$ = Const, т.е. система линейная;
- $I_i(t)$, $I_e(t)$, $X_i(t)$, $X_e(t)$ – потоки и цены изменяются во времени.

В условиях сокращения выпуска продукции изменение предложения, спроса и цен можно представить уравнениями:

$$I_i - \tau_i \frac{dI_i}{dt} = L_{ii} X_i + L_{ie} X_e \qquad (1)$$

$$I_e + \tau_e \frac{dI_e}{dt} = L_{ee} X_e + L_{ei} X_i \qquad (2)$$

$$\frac{dX_i}{dt} = X_i \left(I_i - L_{ii} X_i - L_{ie} X_e \right) \qquad (3)$$

$$\frac{dX_e}{dt} = X_e \left(I_e - L_{ee} X_e - L_{ei} X_i \right) \qquad (4)$$

где $\frac{dI_i}{dt}$, τ_i – скорость и время сокращения выпуска продукции соответственно;

$\frac{dI_e}{dt}$, τ_e – скорость и время повышения спроса на продукцию соответственно.

Из совместного решения (1) и (3), а также (2) и (4) следует:

$$\frac{dX_i}{dt} = X_i \cdot \tau_i \frac{dI_i}{dt} \qquad \cdot \Big| \frac{dt}{X_i}$$

$$\frac{dX_e}{dt} = X_e \cdot \left(-\tau_e \frac{dI_e}{dt} \right) \qquad \cdot \Big| \frac{dt}{X_e}$$

После преобразования:

$$\frac{dX_i}{X_i} = \tau_i \cdot dI_i$$

$$\frac{dX_e}{X_e} = -\tau_e \cdot dI_e$$

Интегрирование дает уравнения:

$$\ln X_i = \tau_i I_i + \ln Const$$

$$\ln X_e = -\tau_e I_e + \ln Const$$

После потенцирования имеем:

$$X_i = Const \cdot e^{\tau_i I_i}$$

$$X_e = Const \cdot e^{-\tau_e I_e}$$

где основание натурального логарифма $e \approx 2{,}7$.

Из начальных условий можно найти значения Const:

если $\tau_i = 0$, $Const = X_i = X_i^{\circ}$,

если $\tau_e = 0$, $Const = X_e = X_e^{\circ}$, Подставляя получаем уравнения:

$$X_i = X_i^0 \cdot e^{\tau_i I_i} \qquad (5)$$

$$X_e = X_e^0 \cdot e^{-\tau_e I_e} \qquad (6)$$

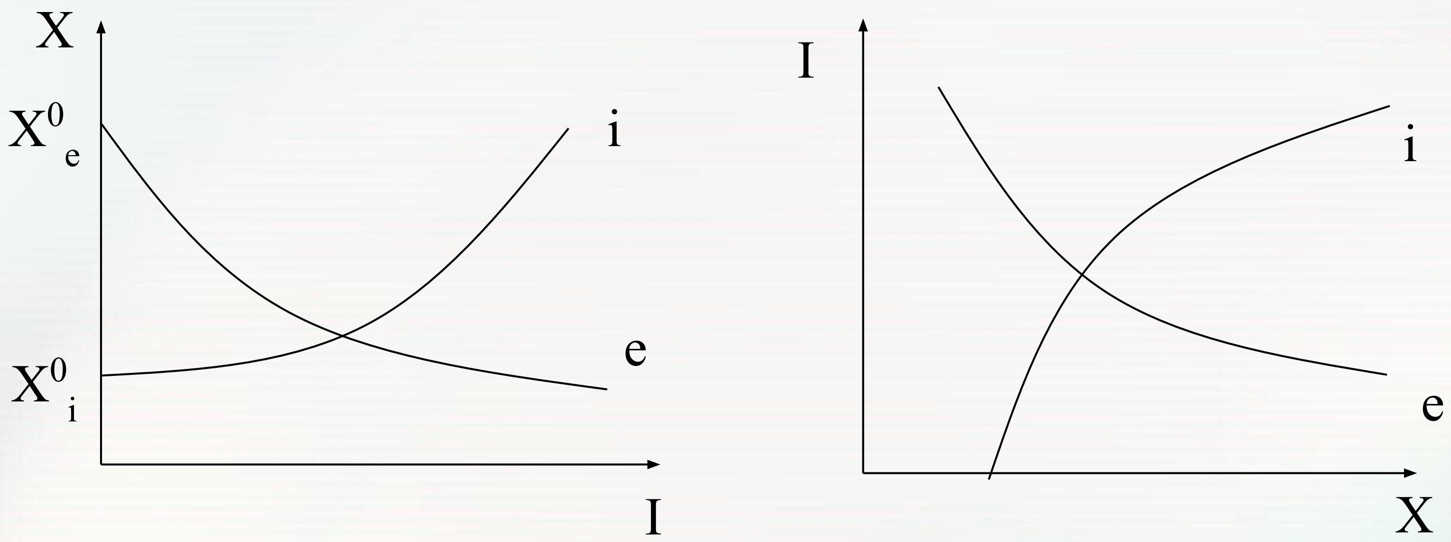


Рис.1. График спроса (е) и предложения (i).

- *Кривая спроса*: нисходящая экспонента устанавливает для рынка ВРП количество продукции, покупаемой в течение τ_e (дня, месяца, года) по различным ценам;

- *Кривая предложения*: восходящая экспонента показывает цену, ниже которой производитель продукции не может продавать товар;

- Модель отражает реальные взаимовлияния спроса и предложения вблизи стационарного состояния (линейные процессы).

• Кривые спроса и предложения содержат одну точку стационарного состояния («равновесия»), что согласуется с представлениями классической экономической теории о рыночной экономике.

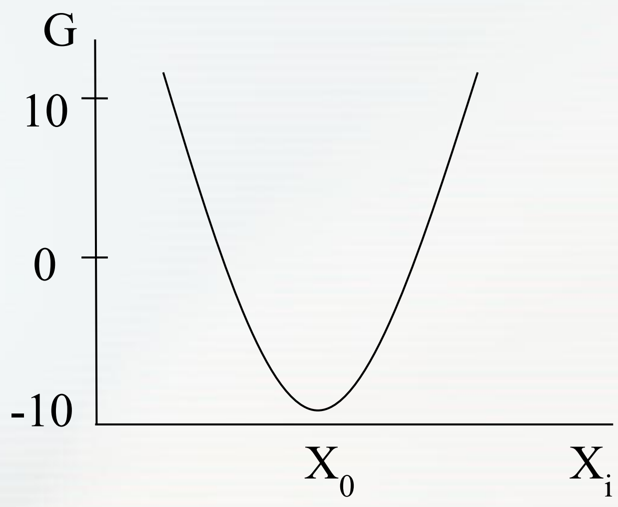


Рис.3. Потенциальная функция G (t) имеет один глобальный min, соответствующий стационарному состоянию линейного рынка.

• Исследование нелинейных рыночных процессов нуждается в применении более сложных методов анализа.

2. Элементы теории катастроф

Катастрофами называются внезапные изменения в системах – резкие переходы в новые состояния, происходящие при плавном изменении управляющих параметров.

Теория катастроф позволяет исследовать нелинейную динамику систем в зависимости от числа управляющих параметров.

Процессы, связанные с катастрофой, описываются уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial F\left(x, a, b, c\ldots\right)}{\partial x} \qquad (7)$$

где x – переменная, *параметр порядка*;

a, b, c,… – *управляющие параметры*;

F – потенциальная функция.

В зависимости от величины показателя степени переменной и числа управляющих параметров можно назвать ряд катастроф:

1. Складка $$F=\frac{1}{3}x^3+ax$$

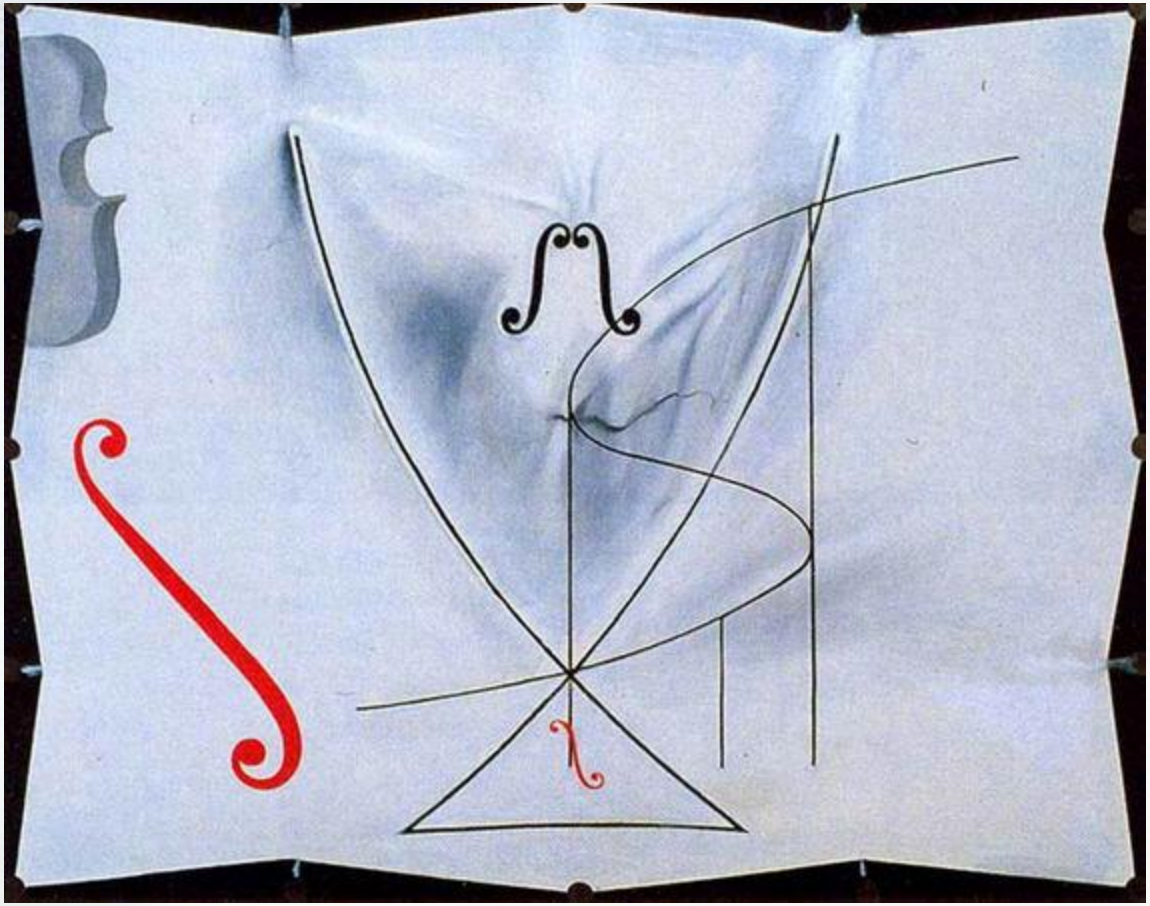
2. Сборка $$F=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}ax^2+bx$$

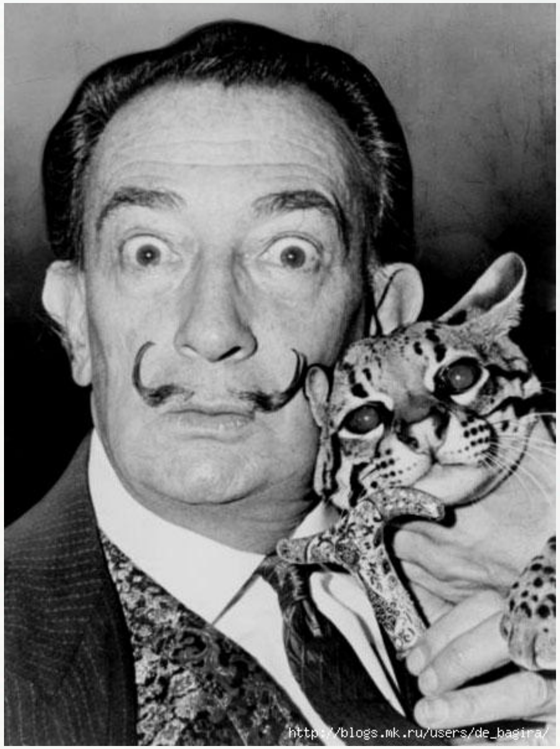
3. Ласточкин хвост $$F=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx$$

4. Бабочка $$F=\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{4}ax^4+\frac{1}{3}bx^3+\frac{1}{2}cx^2+dx$$

5. Вигвам $$F=\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{5}ax^5+\frac{1}{4}bx^4+\frac{1}{3}cx^3+\frac{1}{2}dx^2+ex$$

- Все перечисленные и другие катастрофы используются при анализе экономических процессов.
- В ряде случаев модели теории катастроф способны обнаружить новые эффекты в нелинейных экономических системах.

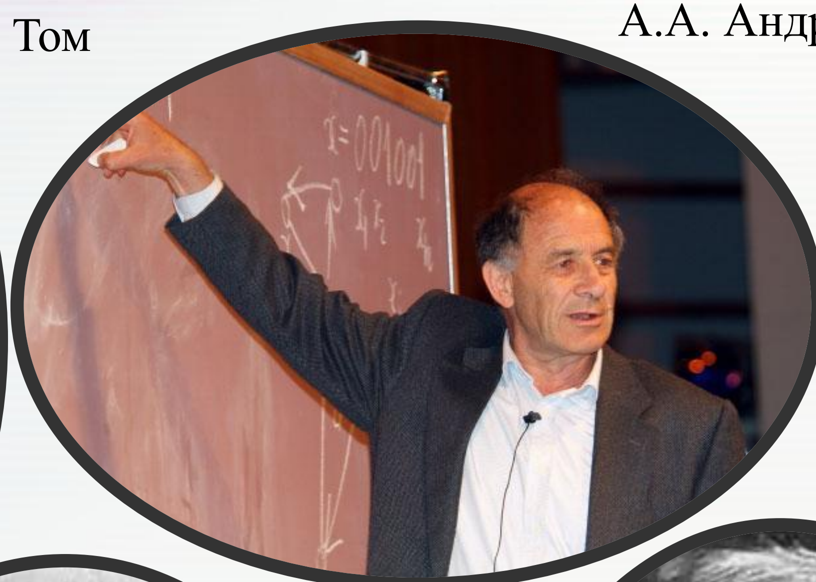




Сальвадор Дали

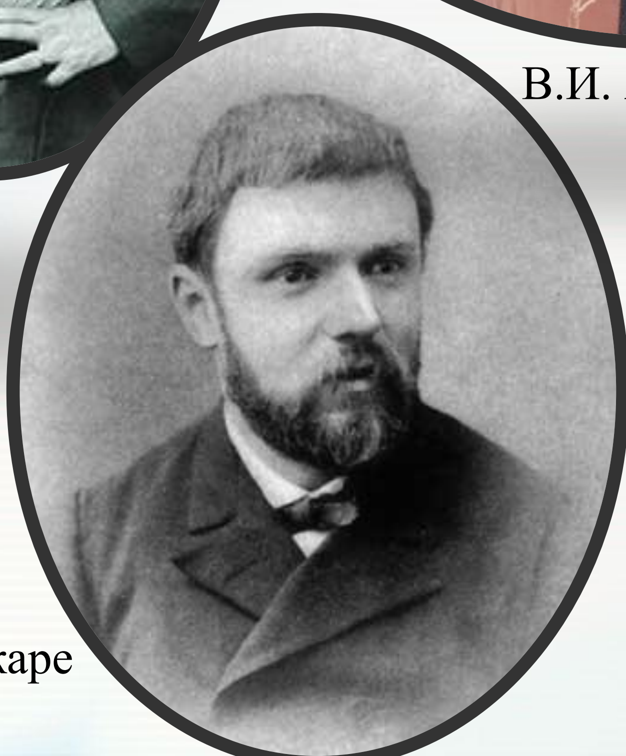
Катастрофа «Ласточкин хвост»

Рене Том

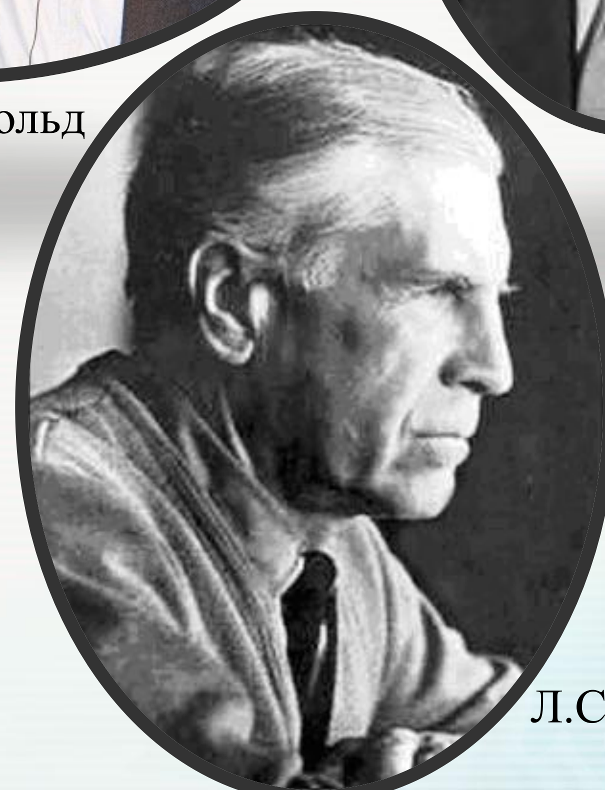


А.А. Андронов

В.И. Арнольд



Ж.А. Пуанкаре



Л.С. Понтрягин

3. Катастрофа сборки

В уравнении катастрофы сборки есть два управляющих параметра a и b.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial F(x,a,b)}{\partial x} \qquad (8)$$

где

$$F(x,a,b) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx \qquad (9)$$

тогда

$$\frac{dx}{dt} = -\left(x^3 + ax + b\right) \qquad (10)$$

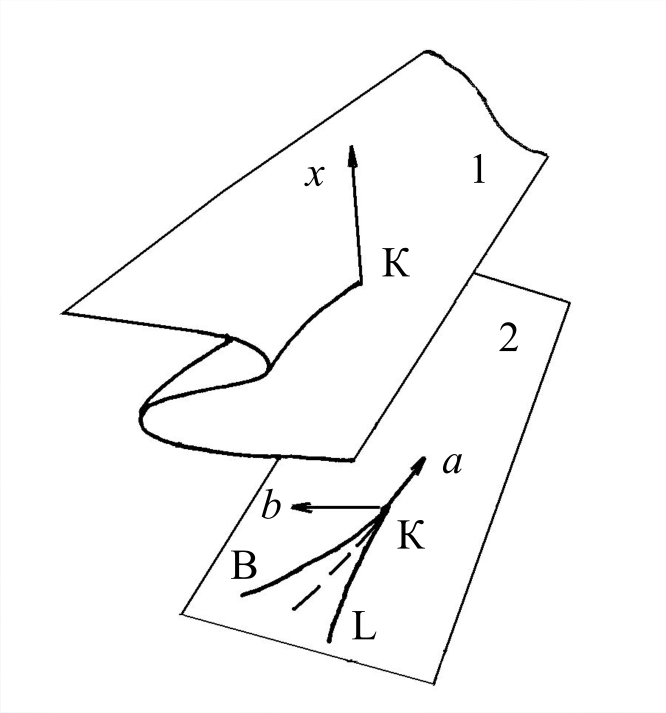


Рис.3. Катастрофа сборки.
1 – лист состояний *x*; каждая точка соответствует стационарным решениям.
2 – лист управляющих параметров; каждая точка соответствует заданным значениям *a* и *b*.

Особые точки:

1. $\dfrac{dF}{dx} = 0, \quad x^3 + ax + b = 0$ - вырожденные точки, соответствуют листу состояний 1, т.е.ext F.

2. $\dfrac{d^2F}{dx^2} = 0, \quad 3x^2 + a = 0$ - дважды вырожденные точки, линии ВК, LK.

3. $\dfrac{d^3F}{dx^3} = 0, \quad 6x = 0$ - трижды вырожденная точка К (x = 0, a = 0, b = 0)

4. $\left(\dfrac{a}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = 0$ - уравнение сепаратрисы {LK, BK}. Сепаратриса является предельной для метастабильных состояний.

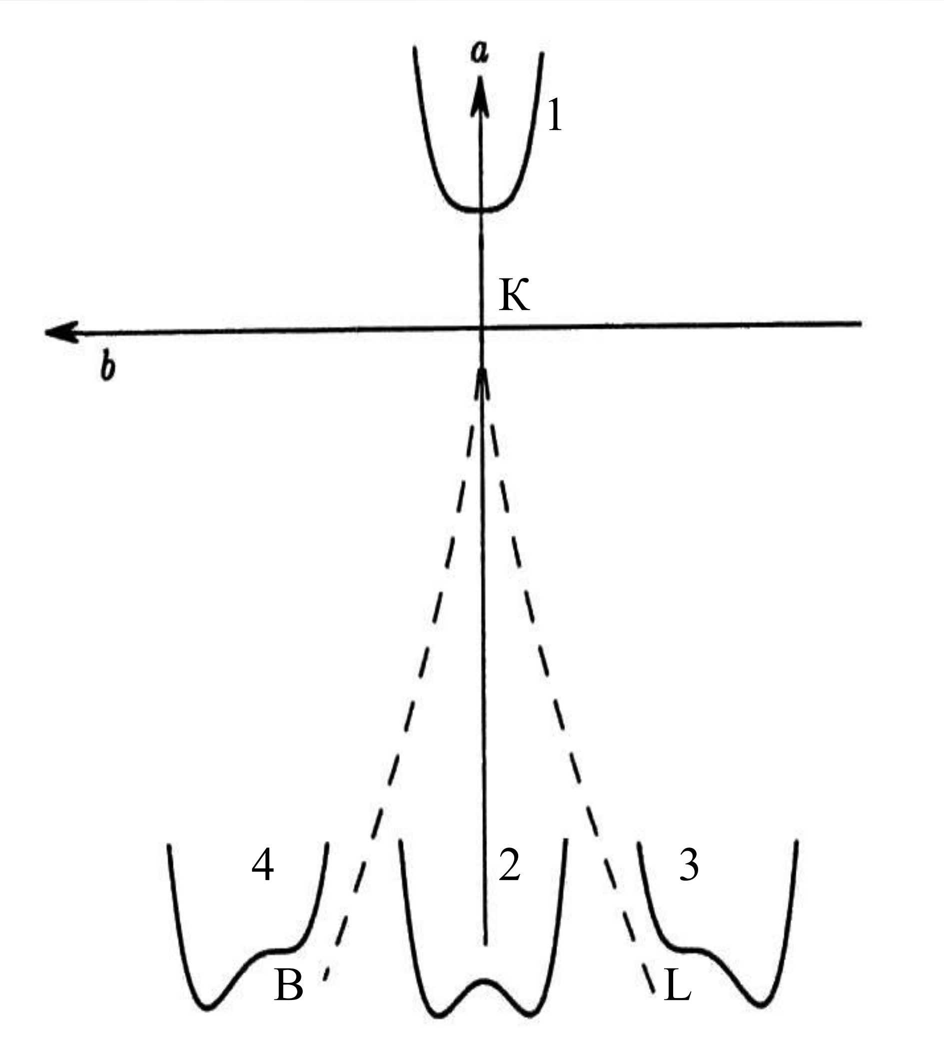


Рис.4. Вид потенциальной функции F, характеризующий устойчивость состояний системы:

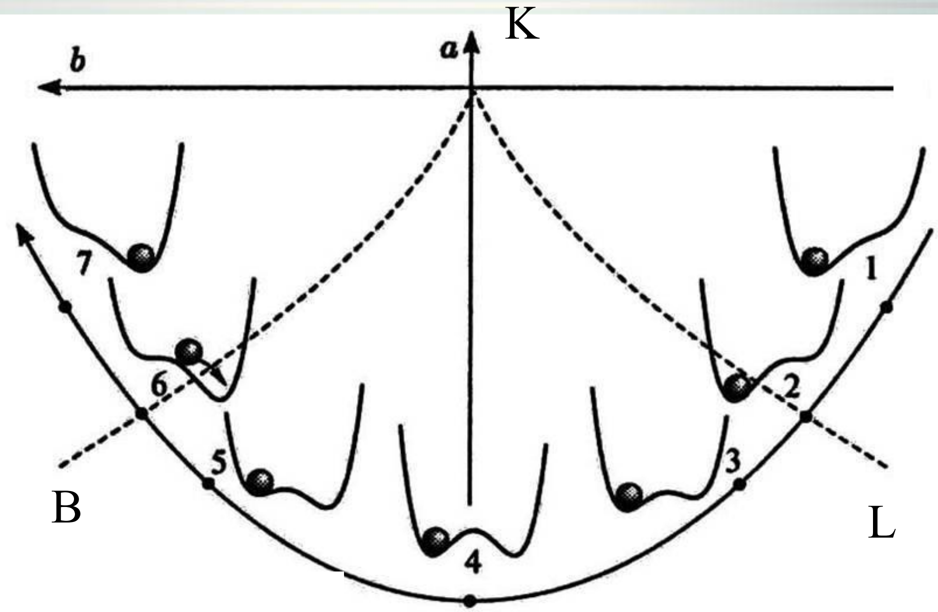
1 – при $a > 0$ всегда устойчива, но система не может развиваться;

2 – при $a < 0$ двухфазное состояние с одинаковой устойчивостью обеих фаз при $b = 0$;

3 – глобальная устойчивость первой фазы при $b < 0$;

4 – глобальная устойчивость второй фазы при $b > 0$.

Рис. 5. Деформация потенциальной функции F за счет управляющего параметра b при $a < 0$. Изменение состояния системы в направлении, показанном стрелкой.



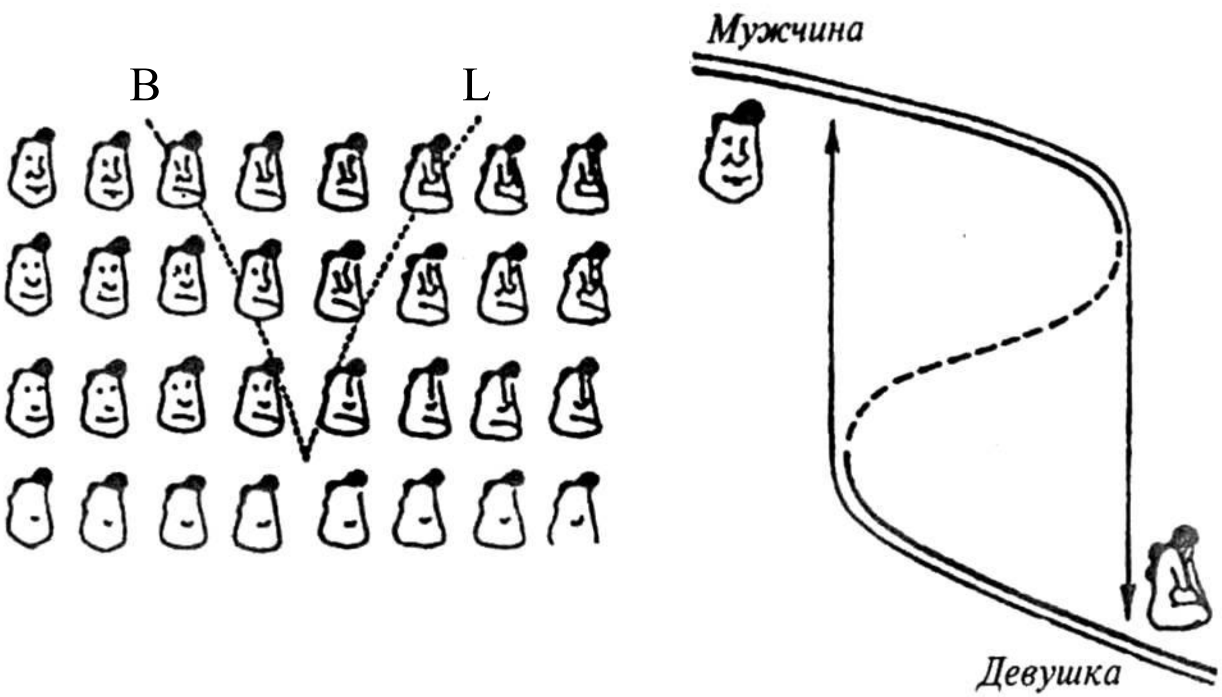


Рис. 6. Оптическая иллюзия, демонстрирующая бистабильность восприятия. В области катастрофы LKB воспринимаются с равной вероятностью как мужское лицо и как фигура девушки.

- Система, динамика которой моделируется катастрофой сборки, способна к развитию. Она является *самоорганизующейся*.

- Модель катастрофы сборки:
  - объясняет переход рынка ВРП из одного стационарного состояния в другое через экономический кризис;
  - выясняет различные механизмы развития нелинейных экономических систем;
  - решает ряд задач прогноза экономических кризисов.

4. Нелинейный рынок ВРП

Нелинейная ситуация на рынке ВРП может быть обусловлена ростом издержек, если $L_{ii} = L_{ii}(X_i)$ при $X_e \approx \text{Const}$, $\dfrac{dX_i}{dt} >> \dfrac{dX_e}{dt}$.

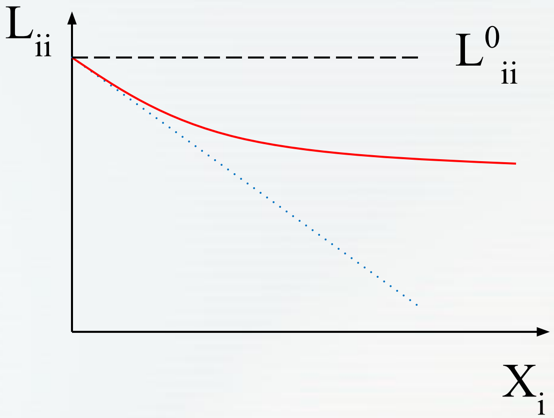


Рис.7. Нелинейное уменьшение коэффициента издержек L_{ii}.

$$L_{ii} = k_1 - k_2 X_i + k_3 X_i^2 \qquad (11)$$

где $k_i > 0$; $k_1 = L^0_{ii}$;
k_2 – понижающий фактор;
k_3 – повышающий фактор;

В потенциальной функции G(t)

$$\boldsymbol{G} = \frac{\boldsymbol{dS}}{\boldsymbol{dt}} = -\boldsymbol{I_e X_e} + \boldsymbol{I_i X_i} + \boldsymbol{\sigma}$$

учтем величину потерь регионального уровня введением показателя потерь χ:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\chi} - 1)\boldsymbol{I_i X_i} \qquad (12)$$

где $\chi \geq 1$ при $\chi = 1$, $\sigma = 0$.

Тогда $$\boldsymbol{G} = -\boldsymbol{I_e X_e} + \boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{I_i X_i} \qquad (13)$$

где
$$\boldsymbol{I_e} = \boldsymbol{L_{ee} X_e} + \boldsymbol{L_{ei} X_i},$$
$$\boldsymbol{I_i} = \boldsymbol{L_{ii} X_i} + \boldsymbol{L_{ie} X_e}$$

После преобразования функция издержек выглядит так:

$$G = \chi \cdot L_{ii} X_i^2 + (\chi \cdot L_{ie} - L_{ei}) X_i X_e - L_{ee} X_e^2 \qquad (14)$$

Производная функции издержек:

$$\frac{\partial G}{\partial X_i} = 2\chi \cdot L_{ii} X_i + (\chi \cdot L_{ie} - L_{ei}) X_e \qquad (15)$$

Она связана со скоростью изменения цены X_i уравнением катастрофы:

$$-\frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial G}{\partial X_i} \qquad (16)$$

Подставив (11) → (15) → (16), получаем:

$$-\frac{dX_i}{dt} = 2\chi \cdot \left(k_3 X_i^3 - k_2 X_i^2 + k_1 X_i\right) + (\chi \cdot L_{ie} - L_{ei}) X_e \qquad (17)$$

Если (11) → (14), то функция издержек **$G = G(X^4_i)$** **(18)**

$$G = 2\chi \cdot k_3 X_i^4 - \chi \cdot k_2 X_i^3 + \chi \cdot k_1 X_i^2 + (\chi \cdot L_{ie} - L_{ei}) X_i X_e - L_{ee} X_e^2 \qquad (18)$$

- Кривые X_i и X_e имеют три точки пересечения;
- потенциальная функция G (X^4_i) имеет два минимума;
- цена предложения X_i – внутренняя *быстрая* переменная, а цена спроса X_e – внешняя *медленная* переменная;
- цена X_e – *управляющий параметр*, он определяет рыночную ситуацию.

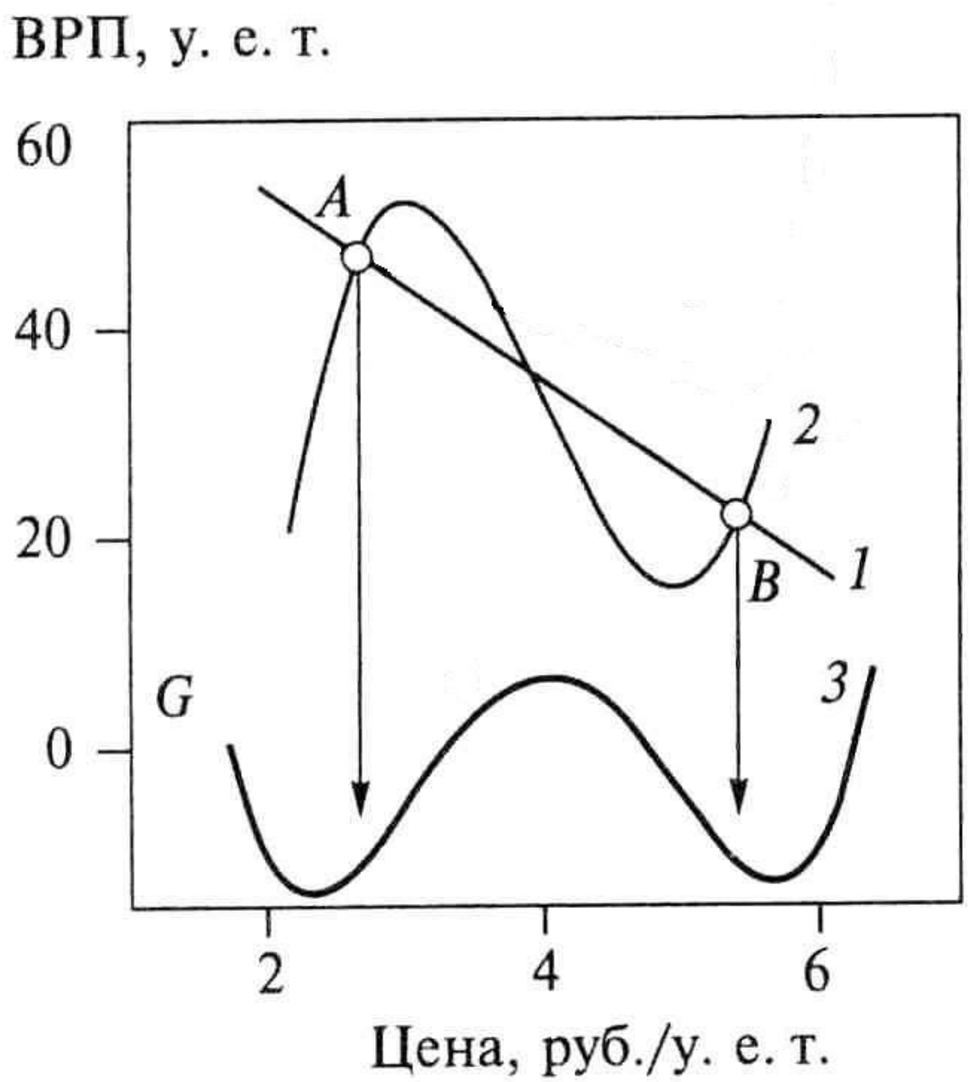


Рис.8. Эволюция нелинейной системы. Устойчивость состояний до кризиса А и после кризиса В.

1 – спрос;

2 – предложение;

3 – потенциальная функция G.

После кризиса цены возрастают, а спрос и предложение уменьшаются.

Переход к новой переменной *x* и управляющим параметрам (*a, b*) дает более простые уравнения:

$$-\frac{dx}{dt} = x^3 + ax + b \qquad (19)$$

$$-\frac{dx}{dt} = \frac{\partial G}{\partial x} \qquad (20)$$

$$G(x, a, b) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx \qquad (21)$$

где G $(x,\ a,\ b) \lessgtr 0$.

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{X_i}}{\boldsymbol{X_K}} - \frac{\boldsymbol{X}_0}{\boldsymbol{X_K}} \qquad (22)$$

где x – определена по отклонению X_i от среднего значения $\boldsymbol{X_0} = \frac{\boldsymbol{X_A} + \boldsymbol{X_B}}{\boldsymbol{2}}$;

$X_К$ – цена в точке К.

$$\boldsymbol{a} = -3\left[\left(\frac{\boldsymbol{X}_0}{\boldsymbol{X_K}}\right)^2 - 1\right] \qquad (23)$$

$$\boldsymbol{b} = -\frac{\boldsymbol{X_e}}{\boldsymbol{X_K}} + 3\frac{\boldsymbol{X}_0}{\boldsymbol{X_K}} - 2\left(\frac{\boldsymbol{X}_0}{\boldsymbol{X_K}}\right)^3 \qquad (24)$$

Уравнения (19 - 21) соответствуют катастрофе сборки, здесь x – параметр порядка, a, b – управляющие параметры и уравнение (17) переходит в уравнение (19).

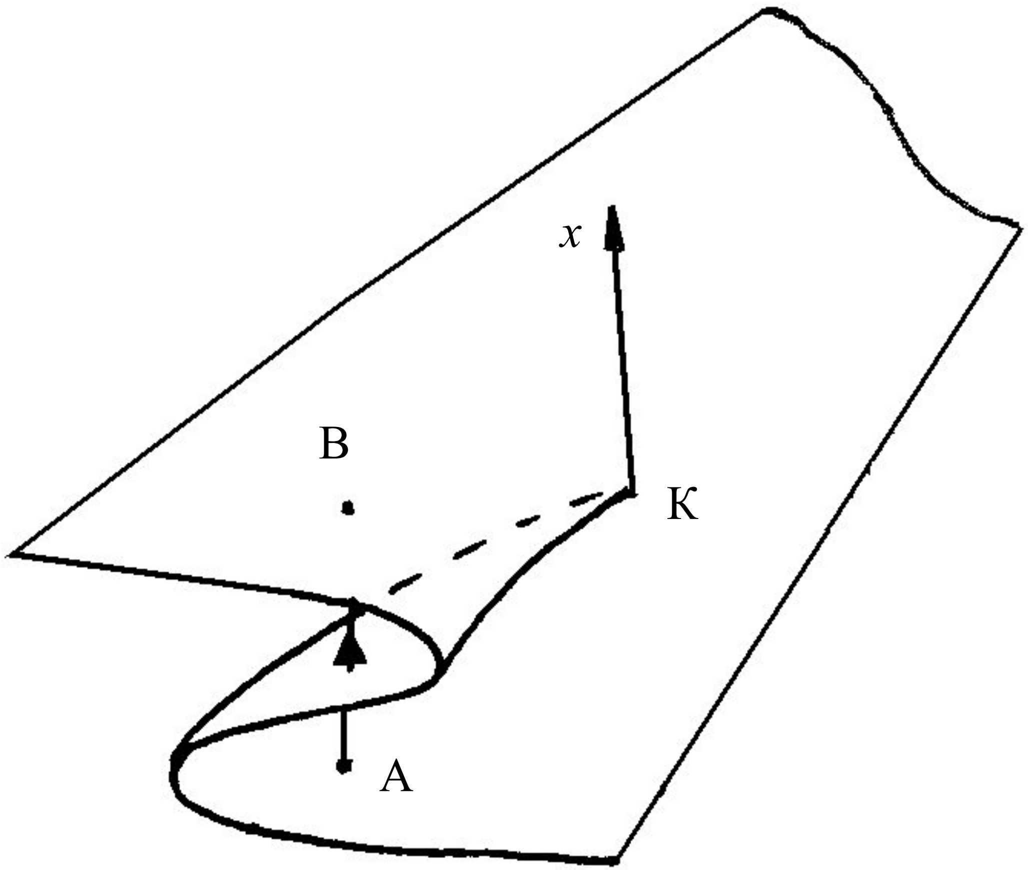
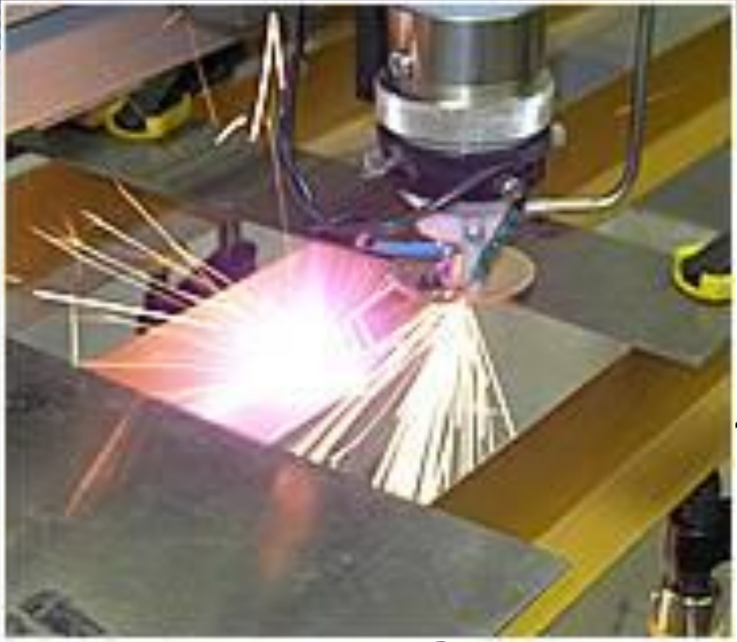
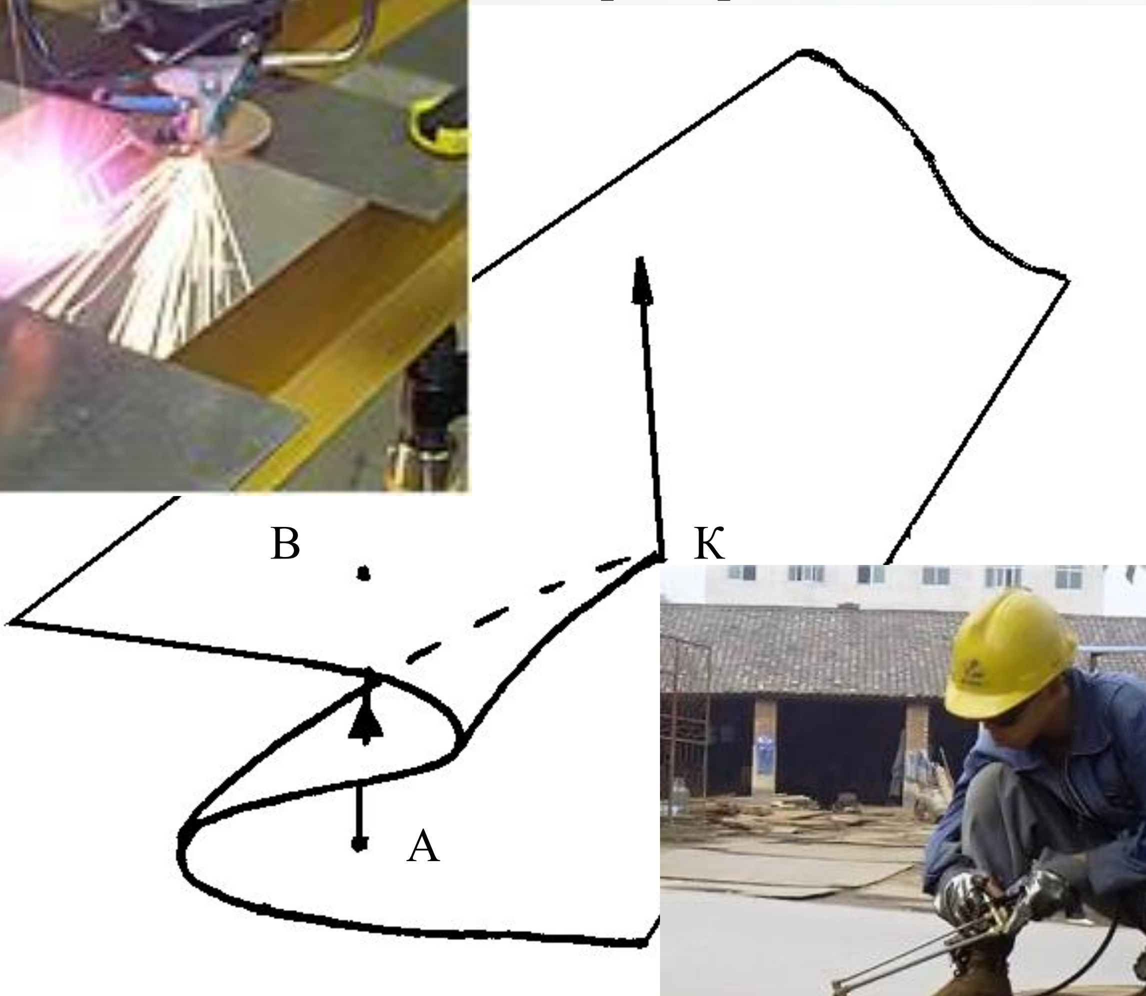


Рис.9. Катастрофа сборки и анализ структурных изменений в системе при кризисе.
А – до кризиса – старые технологии;
В – после кризиса – новые технологии;
К – критическая точка
($\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$).



Лазерная резка металла



Газовая резка металла

- Управляющий параметр *b* характеризует влияние цены спроса X_e (внешнее рыночное поле) на развитие рыночной ситуации.
  Величина в *рамке*

$$\boldsymbol{b} = -\frac{\boldsymbol{X_e}}{\boldsymbol{X_K}} + \boxed{3\frac{\boldsymbol{X}_0}{\boldsymbol{X_K}} - 2\left(\frac{\boldsymbol{X}_0}{\boldsymbol{X_K}}\right)^3} \qquad \textbf{(24)}$$

составляет внутреннее самосогласованное рыночное поле.

- G < 0 – условие процессов самоорганизации, имеет место прибыль: доходы > расходов;

- G > 0 – условие деградации, здесь убытки: издержки > доходов.

- Таким образом, нелинейные процессы на рынкеа ВРП, вызванные нелинейным ростом издержек, описывается моделью (законом) – катастрофа сборки.

5. Устойчивость нелинейных экономических систем

Теорема. При постоянных граничных условиях (постоянном спросе σ^e = Const) издержки в нелинейных системах стремятся убывать и достигают минимального (положительного) значения в ближайшем стационарном состоянии, локальная или глобальная устойчивость которого определяется теоремой Тома теории катастроф.

Доказательство. Уравнения катастрофы сборки:

$$-\frac{dx}{dt} = x^3 + ax + b \qquad (19)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dG}{dx} \qquad (20)$$

$$G(x, a, b) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx \qquad (21)$$

где G $\gtrless$ 0 – функция издержек, равная относительной скорости изменения убытков системы;

x – характеризует отклонение цены от среднего уровня цен;

b – параметр, связанный с ценой спроса X_e.

На устойчивость рынка ВРП влияют различные состояния мезоэкономической системы: $a < 0$ и $a > 0$ (рис. 10).

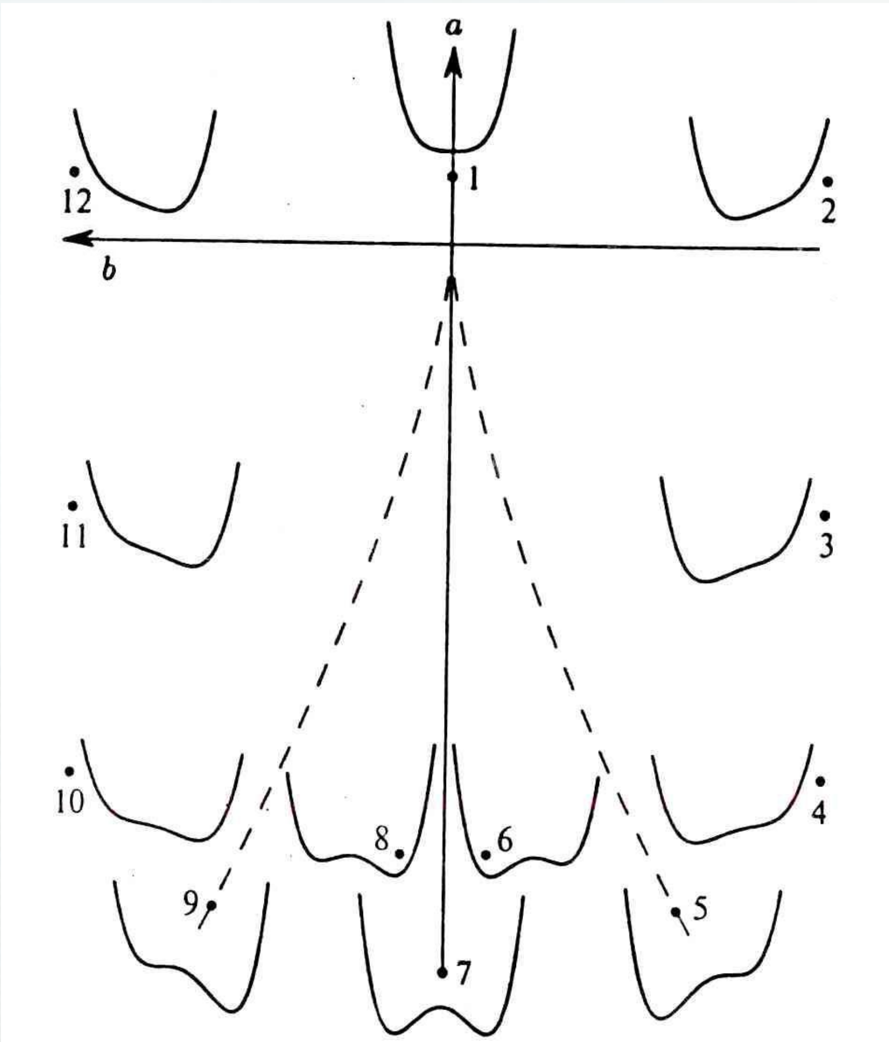


Рис. 10. Функция издержек G может иметь два минимума при $a < 0$, и лишь один – при $a > 0$. Изменение цены спроса X_e вызывает деформацию потенциала G.

1. Устойчивость при $a < 0$.

G < 0 – *условие самоорганизации*. Система может иметь два стационарных состояния (глобальный и локальный min при $b \neq 0$), определяемых по значениям параметров уравнения (19).

Относительно заданных параметров x и b (рис. 11):

- динамика системы нелинейна;
- медленным изменением приведенной цены спроса систему можно перевести из одного стационарного в другое стационарное состояние.

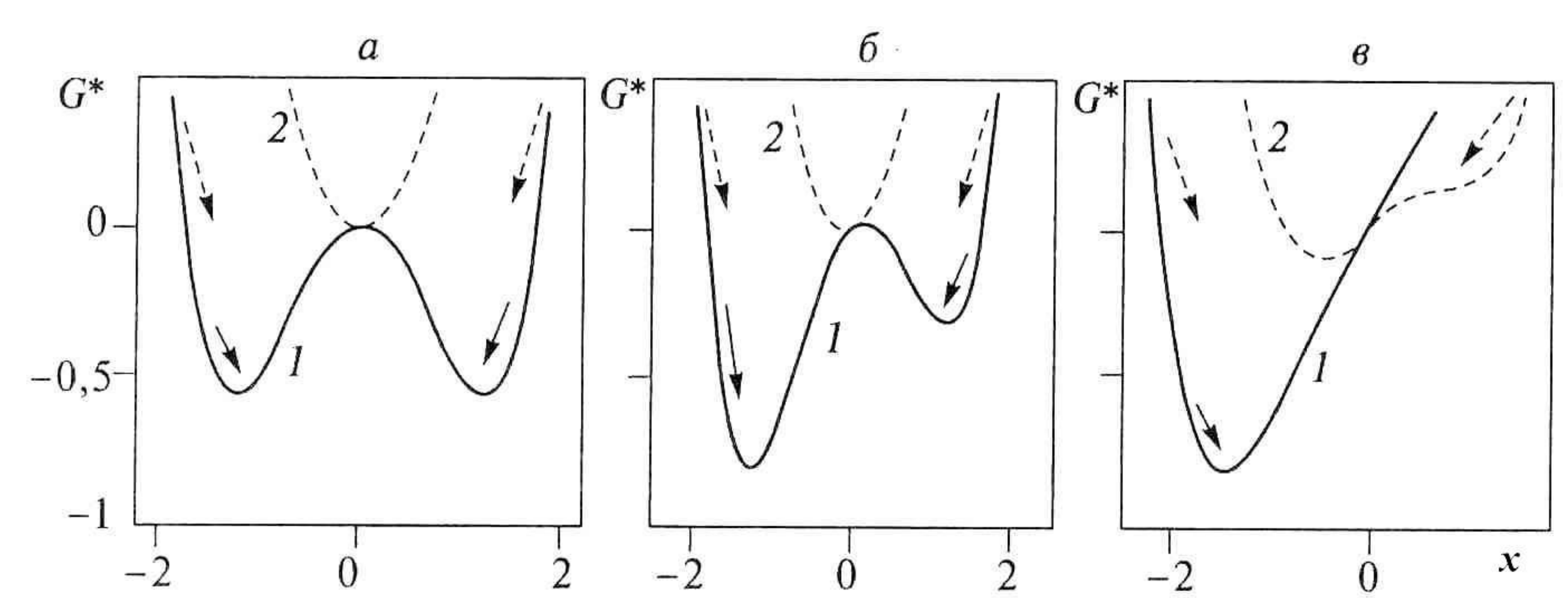


Рис. 11. Эволюция открытой мезоэкономической системы на уровне региона к ближайшему локальному минимуму скорости изменения убытков G. Система описывается уравнением (19) при b = 0 (а); b = 0,2 (б); b = 0,6 (в). Линии: 1. a = -1,5; 2. a = 1,5. Штриховые – *областии устойчивых по Ляпунову неравновесных процессов*, непрерывные – *области самоорганизации (структурной устойчивости).*

2. Устойчивость при $a > 0$.

G > 0 – является функцией Ляпунова при b = 0).

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{4}\boldsymbol{x}^4 + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2 > 0 \qquad \textbf{(25)}$$

$$\frac{\boldsymbol{dG}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{dG}}{\boldsymbol{dx}} \cdot \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\boldsymbol{dG}}{\boldsymbol{dt}} = -\left(\boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}\right)^2 \leq 0 \qquad \textbf{(26)}$$

G имеет min при $x = 0$ (кривая 2 рис. 11 (а)).

На рынке ВРП ($a > 0$, b = 0) нелинейные процессы устойчивы по Ляпунову.

3. Модель однопродуктового рынка описывает:

- наличие двух стационарных состояний;
- возможность перехода из одного стационарного состояния в другое;
- изменение спроса, предложения и цен (экономический кризис).

Итак, аналитические методы теории катастроф позволяют:

- исследовать временную деформацию потенциальных функций, а значит, и формализовать на мезоуровне задачи устойчивого развития объектов и управления ими;

- после обработки финансовых отчетов предприятий, статистических данных по отраслям, по ВРП в целом дать оценку состояния экономического объекта с точки зрения устойчивости.

6. О реальной выполнимости принципа минимальности издержек

Рассмотренные аналитические методы дополняет экономический принцип minimax – минимизации издержек и максимизации прибыли.

Пример 1. Результаты исследования легкой промышленности Свердловской области.

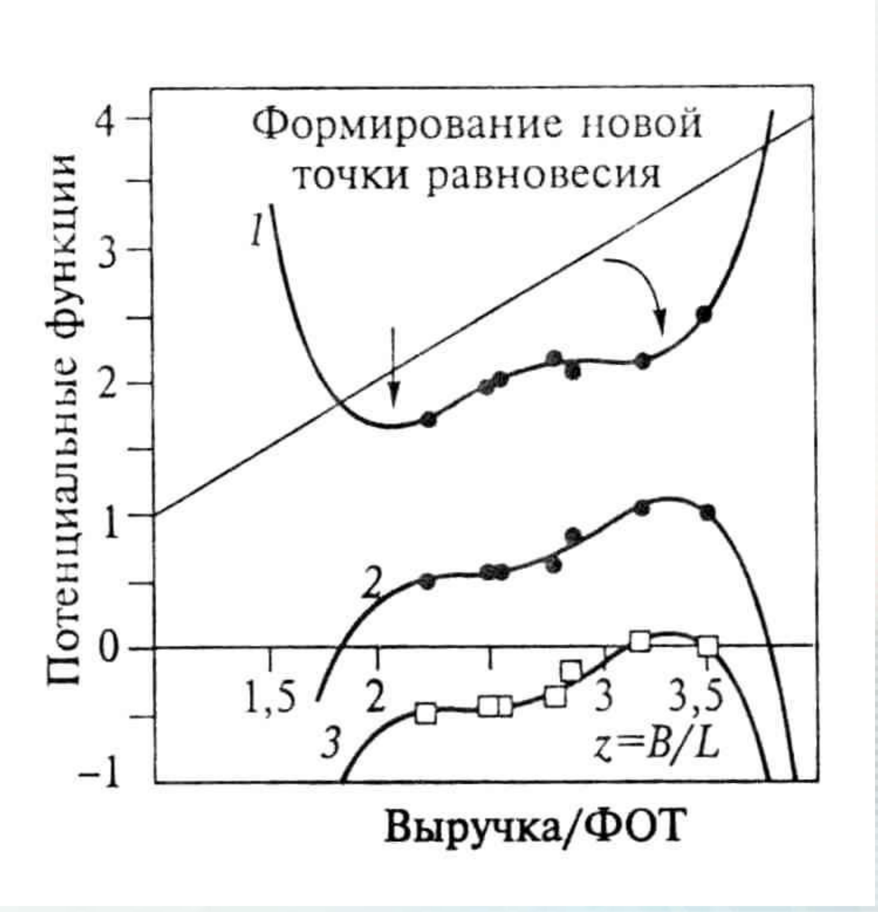
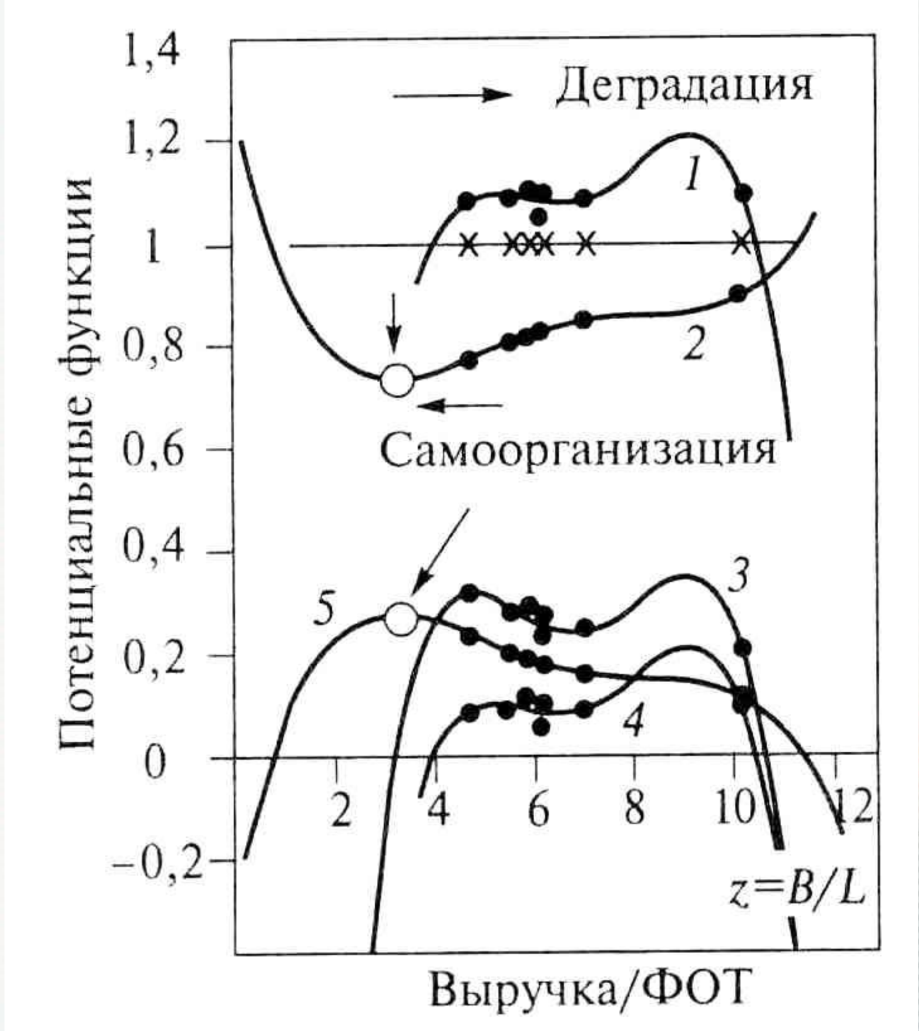


Рис. 12. Зависимости функций издержек (кривая 1), чистого дохода (кривая 2), прибыли (кривая 3) от выручки B, отнесенной к ФОТ (L) для легкой промышленности Свердловской области (1996-1997 гг.)

- В издержках есть глобальный ($z = 2,2$) и локальный ($z = 3,3$) минимумы;
- состояние при z = 3,3 неустойчиво;
- сдвиг стационарной точки за 1,5 года от $z = 3,3$ к $z = 2,2$ вызван завышенным размером ФОТ по сравнению с другими отраслями;
- область прибыли неустойчива по Ляпунову (кривая 3).

Пример 2. Анализ экономических показателей в целом для промышленности Свердловской области (рис. 13)

Рис. 13. Зависимость приведенных показателей промышленности Свердловской области :
1. выручка (кривая 1),
2. материальные затраты (кривая 2),
3. чистый доход (кривая 3) ,
4. нормы прибыли (кривая 4),
5. ФОТ (кривая 5).



- Условие самоорганизации (при z = 3) – это движение экономической системы к стационарному состоянию с G_{min}, $ФОТ_{max}$, – является условием устойчивого развития.

Итак, результаты подтверждают возможность оценки устойчивости при нелинейном развитии экономики региона.

Благодарю за внимание!