Харьковский национальный университет им В.Н.Каразина

Лекция 6

Вариационное моделирование

О деле суди по исходу.
Овидий

Кафедра теплофизики и молекулярной физики

Литература

- Курс высшей математики: Смирнов В.И. , 1-й т., М., Наука, 1974. – 480с.
- Курс высшей математики, Смирнов В.И., 2-й т., М., Наука, 1974. – 656с.
- Введение в математические основы САПР: Д. М. Ушаков — Санкт-Петербург, ДМК Пресс, 2012 г.- 208 с.
- Введение в современные САПР: Владимир Малюх — Москва, ДМК Пресс, 2014 г.- 192 с.
- Любые книги по Solid Works

План

1. Параметры, ограничения и вариационные модели.
2. Создание эскизов и проектирование сборок.
3. Задача размещения геометрических объектов и ее характеристики.
4. Вариационный геометрический решатель.
5. Способы алгебраического моделирования геометрической задачи.
6. Решение систем уравнений.

Параметры, ограничения и вариационные модели

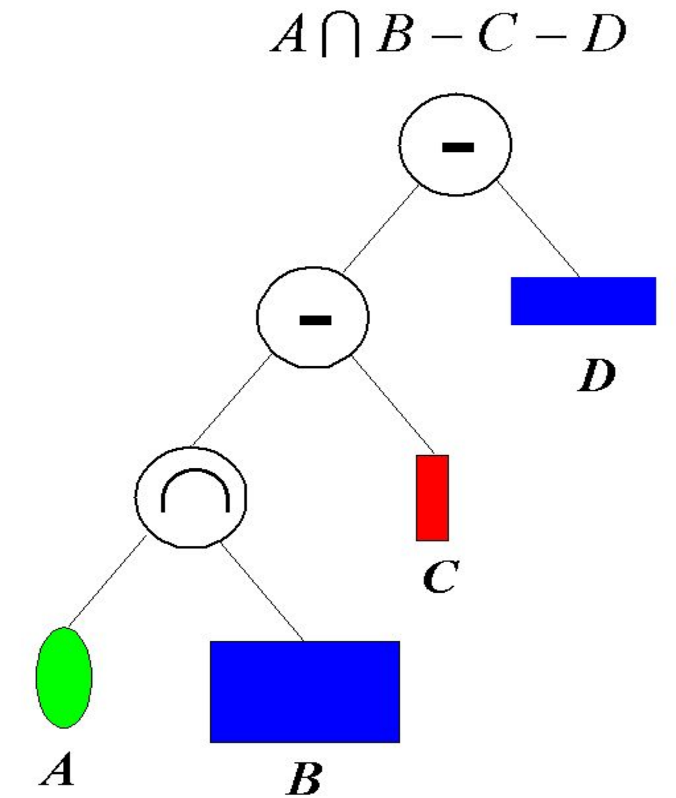
Параметры геометрической модели – это координаты и размеры ее элементов.

Параметрические геометрические модели - размеры и положение каждого примитива или конструктивного элемента могут быть изменены.

<u>Преимущество</u>: возможность быстрого получения по существующей модели изделия его модификации.

Параметры, ограничения и вариационные модели

В твердотельных моделях с CSG-деревом – модификация параметров реализуется путем полного или частичного повторения операций, хранящихся в дереве построения, с новыми значениями параметров.



Constructive Solid Geometry – построение новых объектов путем операций объединения, пересечение и вычитания более простых объектов (при этом эти объекты считаются сплошными, а не только границей).

Параметры, ограничения и вариационные модели

Геометрическое ***ограничение*** - это связывание точек, ребер и граней геометрической модели логическим или параметрическим отношением.

Примеры ограничений:

- инцидентность точки и кривой,
- касание кривой и поверхности,
- параллельность двух прямых,
- расстояние между двумя точками,
- угол между плоскостями и др.

Ограничение - декларативная (а не конструктивная) конструкция - оно не задает никакой процедуры расположения одного геометрического элемента относительно другого.

Параметры, ограничения и вариационные модели

Декларативная параметрическая модель с геометрическими ограничениями называется ***вариационной***.

Традиционный набор параметров геометрической модели – размеры и координаты конструктивных элементов

Дополнительный набор - параметры ограничений - величины длин и углов.

Для удовлетворения ограничениям вариационной модели используются специальные символьные и численные алгоритмы.

Создание эскизов и проектирование сборок

Области использования вариационного моделирования в CAD-системах:

- создание плоских эскизов;
- создание трехмерных сборок.

Эскиз (sketch) - основа для создания большинства конструктивных элементов в системах твердотельного моделирования.

При проектировании механизмов (сборок) – задаются ограничения на взаимное расположение деталей сборки – ***ограничения сборки***.

Задача размещения геометрических объектов и ее характеристики

Задача размещения геометрических объектов (*задача удовлетворения геометрическим ограничениям)* на плоскости (2D) или в пространстве (3D) задается:

- набором объектов (каждый объект характеризуется своим типом и начальными значениями параметров);
- набором логических и параметрических ограничений (для параметрических ограничений задаются требуемые значения параметров).

Задача размещения геометрических объектов и ее характеристики

Набор объектов: точки, прямые, окружности, эллипсы и параметрические кривые.
Для трехмерных задач - плюс плоскости, аналитические и параметрические поверхности.

Параметры объектов: координаты и размеры.
Пример.
Для двумерного эллипса являются координаты его центра, направление главной полуоси и радиусы полуосей
Для эллипсоида необходимо также задать направление нормали плоскости эллипса.

Задача размещения геометрических объектов и ее характеристики

Логическое ограничение инцидентности и параметрическое ограничение расстояния задаются между двумя любыми объектами (однотипными или разнотипными).

Ограничения параллельности, касания и заданного угла могут задаваться только между ***направленными*** объектами.

<u>Направленные</u> - все объекты кроме точки, окружности и сферы.

Задача размещения геометрических объектов и ее характеристики

Специальные виды ограничения - ***абсолютная и относительная фиксация.***

Абсолютная фиксация запрещает изменение положения или ориентации объекта в пространстве задачи.

Относительная фиксация группирует несколько объектов между собой, запрещая им менять относительные расстояния и углы (*жесткие множества)*.

Задача размещения геометрических объектов и ее характеристики

Решением геометрической задачи является такое определение параметров ее объектов, которое удовлетворяет всем заданным ограничениям.

Любая геометрическая задача или ее часть может иметь

- конечное число решений;
- бесконечное число решений;
- не иметь решений вообще.

Задача без решений называется ***переопределенной***.
Задача с конечным множеством решений называется ***хорошо определенной***
Задача с бесконечным множеством решений – ***недоопределенной***

Задача размещения геометрических объектов и ее характеристики

Свойства геометрической задачи:

- ***избыточность;***
- ***сингулярность***.

Если удаление ограничения не приводит к появлению новых решений задачи, такое ограничение называется ***избыточным***.

Сингулярность - свойство не структурное (синтаксическое), но численное - бесконечно малое изменение параметра (или группы параметров) ведет к изменению структуры пространства ее решений.

Вариационный геометрический решатель

Программная компонента для решения геометрических задач, возникающих при вариационном моделировании, называется ***геометрическим решателем***.

Функции решателя геометрической задачи:

- размещение геометрических объектов в соответствии с заданными ограничениями;
- диагностика пере-, недо- и хорошо определенных частей задачи, а также расчет степеней свободы геометрических объектов;
- динамическое перемещение геометрических объектов в соответствии с наложенными ограничениями;
- автоматическое наложение минимального набора ограничений.

Вариационный геометрический решатель

Большинство коммерческих систем используют DCM-решатель (Dimensional Constraint Manager) - разработка D-Cubed - дочерняя компания Siemens PLM Software. Имеет две версии - 2D и 3D.

Решатель LGS (LEDAS Geometric Solver) – производство российской компании ЛЕДАС.
Имеет две версии (2D и 3D) и различные конфигурации

Способы алгебраического моделирования геометрической задачи

Способы решения геометрической задачи:

- Декартово моделирование;
- Недекартово моделирование;
- Относительное моделирование.

Способы алгебраического моделирования геометрической задачи

Декартово моделирование:

- каждому объекту сопоставляется набор вещественных координат, которые полностью описывают его положение на плоскости или в пространстве;
- каждое ограничение представляется одним или несколькими уравнениями.

Пример. Ограничение расстояния между точками

$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$:

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-d^2=0,$$

где d – параметр ограничения расстояния.

Способы алгебраического моделирования геометрической задачи

Геометрическая задача

Система алгебраических уравнений:

1) количество неизвестных прямо пропорционально числу геометрических объектов;
2) количество уравнений прямо пропорциональным числу ограничений.

Недостаток: для одной и той же задачи в разных системах координат могут быть получены разные решения

Способы алгебраического моделирования геометрической задачи

Относительное моделирование - связывание с каждым объектом не абсолютных, а относительных координат. Преимущество: количество относительных координат можно существенно сократить.

Пример. Положение точки, инцидентной некоторой прямой, можно описать единственным вещественным параметром, задающим позицию точки в системе координат прямой.

Вывод:

- экономия двух переменных;
- нет необходимости в генерации двух лишних уравнений для ограничений инцидентности точки и прямой

Метрический тензор геометрической задачи

Недекартово моделирование – использование понятий аффинного пространства и метрического тензора.

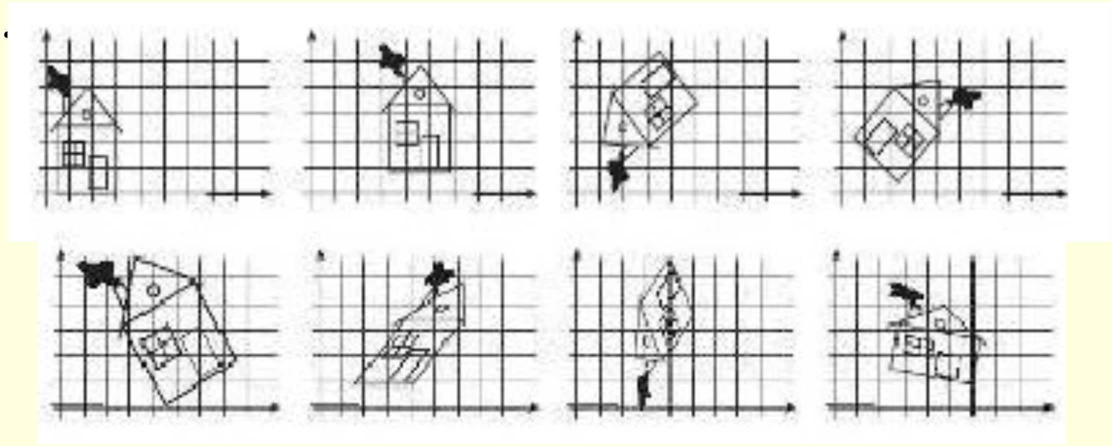
Элементы трехмерного аффинного пространства – точки и вектора.

Метрические ограничения - длины и угла.

Метрический тензор геометрической задачи

Аффинное пространство:

- задается двумя непересекающимися множествами - точек и векторов;
- задается операцией откладывания точки от другой точки с помощью вектора;
- задается обратной операцией вычисления вектора, соединяющего две точки.
- множество векторов должно образовывать евклидово пространство (линейное пространство со скалярным произведением).



Метрический тензор геометрической задачи

Метрический тензор набора векторов $\{v_1, \ldots, v_n\}$ – квадратная симметрическая матрица, элементами которой являются скалярные произведения $(v_i; v_j)$.

<u>Свойства</u> метрического тензора:

- симметричность;
- неотрицательность диагональных элементов (они равны квадратам длин векторов);
- ранг, не превосходящий размерность пространства;
- если сумма некоторых векторов равна нулю, то сумма соответствующих им элементов в любой строке (столбце) метрического тензора тоже равна нулю.

Метрический тензор геометрической задачи

Моделирование геометрической задачи

1. Каждый вектор с неизвестной нормой представляется в виде произведения его длины (она будет переменной алгебраической задачи) и единичного вектора.
2. Из всего набора единичных векторов выбираются три (для 2D – два) базовых, углы между которыми зафиксированы.
3. Все остальные векторы выражаются через выбранный базис

$$v=v_1e_1+v_2e_2+v_3e_3.$$

Метрический тензор геометрической задачи

Необходимо: в алгебраическую формулировку исходной геометрической задачи добавить три (два для 2D) неизвестных коэффициента, связанных уравнением

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$$

- В наборе векторов ищется независимый набор циклов векторов, сумма которых (некоторые из слагаемых, возможно, взяты с обратным знаком) равна нулю.
- Для каждого цикла генерируются три (два в 2D) уравнения - сумма коэффициентов соответствующих векторов в разложении по базисному вектору равна нулю.

Метрический тензор геометрической задачи

Последнее: учесть заданные углы между векторами.

Пусть u, v – единичные вектора с углом α между ними.

Векторы с разложением по базису (e_1, e_2, e_3):

$$u=u_1e_1+u_2e_2+u_3e_3,$$

$$v=v_1e_1+v_2e_2+v_3e_3.$$

Тогда

$$u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=\cos\alpha\ .$$

Решение систем уравнений

Численное решение системы уравнений - трудоемкость растет кубически с ростом размера задачи.

Что делать? Применять символьные методы упрощения систем уравнений:

1. Методы подстановки;
2. Методы декомпозиции.

Традиционный метод решения систем нелинейных уравнений – метод Ньютона-Рафсона – линейная аппроксимация гладкой функции F: $R^n \longrightarrow R^m$ в окрестности текущей точки $x^{(k)}$:

$$F(x) = F(x^{(k)}) + J_F(x^{(k)})(x - x^{(k)}),$$

$J_F(x^{(k)})$ – матрица Якоби функции F, вычисленная в точке $x^{(k)}$