Множества и операции над ними

1. Понятие множества и элемента множества.
2. Способы задания множеств. Отношения между множествами и их свойства.
3. Операция пересечения множеств. Свойства пересечения.
4. Операция объединения множеств. Свойства объединения.
5. Вычитание множеств. Дополнение. Свойства вычитания множеств
6. Классификация
7. Декартово произведение множеств

Основные задачи предметной области «Математика и информатика» в начальной школе

- Развитие математической речи, логического и алгоритмического мышления, воображения, обеспечение первоначальных представлений о компьютерной грамотности

Предметные результаты освоения предметной области «Математика и информатика»

- 1) использование начальных математических знаний для описания и объяснения окружающих предметов, процессов, явлений, а также оценки их количественных и пространственных отношений;
- 2) овладение основами логического и алгоритмического мышления, пространственного воображения и математической речи, измерения, пересчета, прикидки и оценки, наглядного представления данных и процессов, записи и выполнения алгоритмов;
- 3) приобретение начального опыта применения математических знаний для решения учебно-познавательных и учебно-практических задач;
- 4) умение выполнять устно и письменно арифметические действия с числами и числовыми выражениями, решать текстовые задачи, умение действовать в соответствии с алгоритмом и строить простейшие алгоритмы, исследовать, распознавать и изображать геометрические фигуры, работать с таблицами, схемами, графиками и диаграммами, цепочками, совокупностями, представлять, анализировать и интерпретировать данные;
- 5) приобретение первоначальных представлений о компьютерной грамотности.

Соответствие содержания начального курса математики и вузовского

Разделы начального курса математики	Разделы ТОНКМ
Числа и величины	Натуральные числа и нуль
Арифметические действия	Соответствия, отношения
Работа с задачами	Задача и процесс ее решения
Пространственные отношения. Геометрические фигуры. Геометрические величины	Геометрические фигуры и величины
Работа с информацией	Логические основы математики.

Множества

- ***Понятие множества*** является одним из основных понятий математики и поэтому не определяется через другие.

Обозначение:

A, B, C - множества;

a, b, c - элементы множества

$a \in A$ -объект a принадлежит множеству A;

$a \notin A$ -объект a не принадлежит множеству A.

Множество, не содержащее никаких элементов, называют ***пустым*** и обозначают $\varnothing$.

Множества бывают ***конечными и бесконечными.***

Способы задания множеств

- ***Множество задано***, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит.

Способы задания множества:

1. Перечисление всех элементов множества.

Например, А ={2, 4, 6, 8 }.

2. Указание характеристического свойства элементов, т. е. *такого свойства, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит.*

Например, $A = \{ x \mid x \in N \text{ и } x < 175\}$

Отношения между множествами

- Если множества А и В имеют общие элементы, т.е. элементы, принадлежащие одновременно А и В, то говорят, что эти множества пересекаются.
- Если множества А и В не имеют общих элементов, т.е. нет элементов, принадлежащих одновременно А и В, то говорят, что эти множества не пересекаются.
- Множество В называется подмножеством множества А, если каждый элемент множества В является также элементом множества А. ($B \subset A$)

Пустое множество считают подмножеством любого множества. ($\varnothing \subset A$)

Любое множество является подмножеством самого себя. ($A \subset A$)

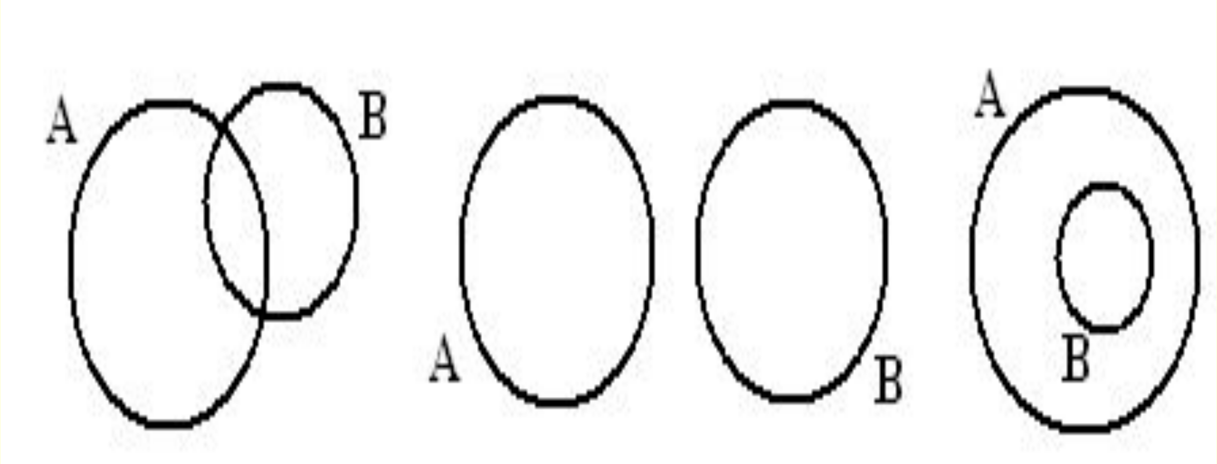
Если число элементов множества В равно n, то число различных подмножеств данного множества 2^n.

- Множества А и В называются равными, если $A \subset B$ и $B \subset A$. ($A=B$)

Задача. В каком отношении находятся множества А= {1,2, 3, 4,5} , В= {1,5,7, 9 }, С= {7, 9} D= {7, 9, 5, 1} ?

Круги Эйлера

- Отношения между множествами наглядно представляют с помощью особых чертежей, кругов Эйлера.



Пересечение множеств

- Пересечением множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству *A,* так и множеству *B.* ***(обоз.*** $\boldsymbol{A \cap B}$ ***)***
- $\boldsymbol{A \cap B = \{x \mid x \in A}$ и $\boldsymbol{x \in B\}}$.

Пересечение любых множеств *A* и *B* всегда существует, и оно единственно.

Когда множества *A* и *B* не имеют общих элементов, то говорят, что их пересечение пусто ($A \cap B = \varnothing$).

- Операция, при помощи которой находят пересечение множеств, называется также пересечением.

Свойства пересечения множеств

1) $A \cap \varnothing = \varnothing$;

2) $A \cap A = A$;

3) $A \cap B = B \cap A$; - коммутативность операции пересечения

4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$; - ассоциативность операции пересечения

5) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$;

Объединение множеств

- Объединением множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств *A* и *B*. *(обоз.* $A \cup B$ *)*
- $A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$.
- Объединение любых множеств *A* и *B* всегда существует, и оно единственно.
- Операция, при помощи которой находят объединение множеств, называется также объединением.

Свойства объединения множеств

- *1. $A \cup \varnothing = A$;*
- 2. $A \cup A = A$;
- 3. $A \cup B = B \cup A$;
- 4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$;
- 5. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$;

Свойства, связывающие операции пересечения и объединения множеств

- $A \cup (B \cap A) = A$.
- $A \cap (B \cup A) = A$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Если в выражении есть знаки пересечения и объединения множеств и нет скобок, то сначала выполняют пересечение, так как считают, что пересечение более «сильная» операция, чем объединение.

Вычитание множеств

- *Разностью множеств А и В называется множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству А и не принадлежат множеству В. (обоз. А \ В)*.
- $\boldsymbol{A \setminus B = \{x \mid x \in A}$ и $\boldsymbol{x \notin B\}}$.
- Операция, при помощи которой находят разность множеств, называется вычитанием.
- Если А ∩ В= ∅, $A \setminus B = A$
- Если А ⊂ В, $A \setminus B = \varnothing$

Дополнение множеств

- *Пусть B ⊂ A. Дополнением множества B до множества A называется множество, содержащее те и только те элементы множества A, которые не принадлежат множеству B. (обоз.B'_A)*
- $B \subset A$, $A \setminus B = B'_A$

Задача. Пусть A = {1, 2, 3, 4, 5}, а *B* = {2, 4}. Найдите B'_A.

Порядок выполнения действий в выражениях

- Условились считать, что пересечение – более «сильная» операция, чем вычитание. Объединение и вычитание множеств считают равноправными.
- Задача. Расставьте порядок действий в выражении $A \setminus B \cup C \cap D$.

Свойства вычитания множеств

1. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$;
2. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
3. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;
4. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
5. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Разбиение множества на классы

- ***Множество X разбито на классы X_1, X_2, ..., X_n, если***:

1) ***подмножества X_1, X_2, ..., X_n попарно не пересекаются;***

2) ***объединение подмножеств X_1, X_2, ..., X_n совпадает с множеством X.***

Пример правильной классификации: множество X треугольников разбили на классы остроугольных, тупоугольных, прямоугольных.

Пример неправильной классификации: множество *X* треугольников разбили на классы равнобедренных, равносторонних и разносторонних треугольников

Дихотомическая классификация

- Так как разбиение множества на классы связано с выделением его подмножеств, то классификацию можно выполнять при помощи свойств элементов множеств.
- Вообще, если на множестве *X* задано одно свойство, то это множество разбивается на два класса. Первый – это класс объектов, обладающих этим свойством, а второй – дополнение первого класса до множества *X*. Во втором классе содержатся такие объекты множества *X*, которые заданным свойством не обладают. Такую классификацию называют ***дихотомической***.

- Задача 1. Составьте слоги, состоящие из двух букв, из которых первая — любая согласная из П, Р, С, а вторая — любая гласная из А, У?

	А	У
П	ПА	ПУ
Р	РА	РУ
С	СА	СУ

С={П, Р, С} и V = {А, У}

S={(П; А), (П; У), (Р; А), (Р; У), (С; А), (С; У)}

Задача 2. Составьте слоги, состоящие из двух букв, из которых первая — любая гласная из А, У, а вторая — любая согласная из П, Р, С?

	П	Р	С
А	АП	АР	АС
У	УП	УР	УС

С={П, Р, С} и V = {А, У}

M={(А; П), (У; П), (А; Р), (У; Р), (А; С), (У; С)}

Декартово произведение множеств

- Декартовым произведением множеств A и B называется множество всех пар, первая компонента которых принадлежит множеству A, а вторая принадлежит множеству *B. (обоз. A x B)*
- $A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ и } y \in B\}$.
- Если какое-либо из множества A и B пусто, то декартово произведение A x B считается пустым множеством.

Кортежи

- Упорядоченные наборы называют ***кортежами*** и различают по длине**.** ***Длина кортежа*** – это число элементов, из которых он состоит.
- Например, (3; 6; 7) – это кортеж длины 3, (м, а, т, е, м, а, т, и, к, а) – это кортеж длины 10.

Декартово произведение *n* множеств

- ***Декартовым произведением множеств A_1, A_2, ... , A_n называется множество всех кортежей длины n, первая компонента которых принадлежит множеству A_1, вторая – множеству A_2, ..., n-я – множеству A_n.*** ($A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$).

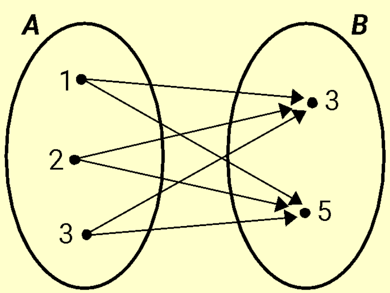
Свойства декартова произведения множеств

$A \times B \neq B \times A$

$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$

- **1. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$**
- **2. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$**

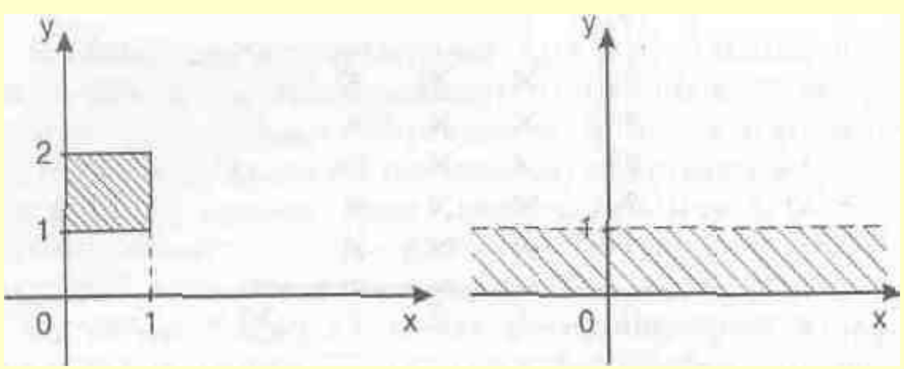
Изображение декартова произведения двух числовых множеств



а)

B \ A	3	5
1	(1,3)	(1,5)
2	(2,3)	(2,3)
3	(3,3)	(3,3)

б)



- Для наглядного представления декартова произведения двух множеств можно использовать
- **1.** графы
- **2.** таблицы
- **3.** график

Число элементов в объединении, разности и декартовом произведении конечных множеств

$n(A) = a$ - множество A содержит a элементов

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = a + b$, *если A и B не пересекаются*

$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_t) = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_t)$, если множества попарно не пересекаются

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, если A и B пересекаются

Если $B \subset A$, то $n(B'_A) = n(A) - n(B)$

$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = a \cdot b$

Дерево возможных вариантов

- Запишите все двузначные числа, используя цифры 5, 4 и 7.