Алгоритмы с возвратом

Лекция 20

План лекции

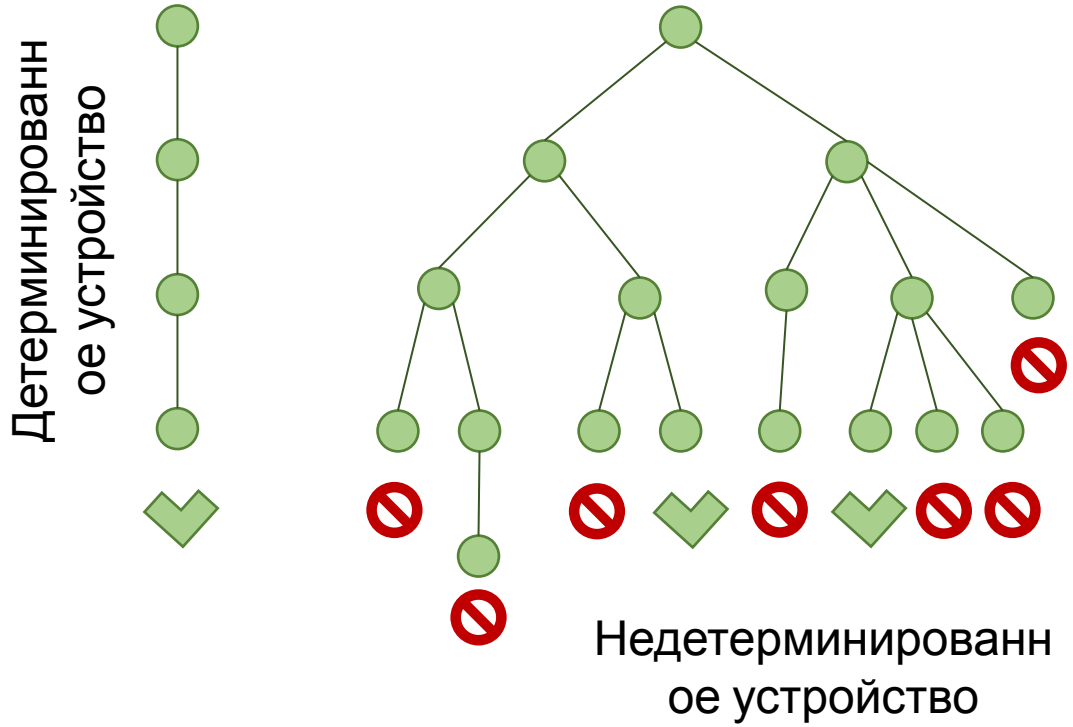
- Элементы теории сложности вычислений
  - Классы задач P и NP, сводимость, NP-полные задачи
- Метод поиска с возвратом
- Алгоритмы решения классических задач комбинаторного поиска

Понятие задачи

- Задачи – это подмножества множества входных данных
- «Решить задачу P для входных данных x» = «Проверить истинность $x \in P$»
- Детерминированное исполняющее устройство
  - в математике – обычная машина Тьюринга
  - в реальности – компьютер
    - Размер ленты у машины Тьюринга не ограничен, а размер памяти у компьютера ограничен
- Недетерминированное исполняющее устройство
  - в математике – машина Тьюринга с неограниченным числом лент
  - в реальности – нет
    - Компьютер, с неограниченным числом процессоров

Разница между исполняющими устройствами

- Состояния устройства при выполнении четырех команд



- Работу недетерминированного устройства можно эмулировать на детерминированном устройстве

- Для эмуляции N команд недетерминированного устройства достаточно $\leq C^N$ команд детерминированного устройства
  - В худшем случае не ≤, а ≈

Понятие класса сложности задач

- Size(x) – размер входных данных x
  - Обычно число битов в двоичном представлении x

- MaxOp(n) – ограничение на число исполненных команд в зависимости от размера входных данных
  - Например, MaxOp(n) = n * log2(n) и т.п.

- Класс сложности – множество задач, таких что для любых входных данных x для решения задачи требуется исполнить не более C * MaxOp(Size(x)) команд на исполняющем устройстве
  - Константа C зависит от задачи и не зависит от x

Класс P

- P = deterministic Polynomial

- Число команд при решении на детерминированной машине Тьюринга ограничено полиномом от размера входных данных
  - проверка делимости чисел
  - проверка связности графа
  - проверка кратчайшего расстояния между двумя вершинами в графе на <= const
    - Как узнать это расстояние точно, решив log2(сумма длин всех дуг) таких задач?
  - …

Класс NP

- NP = Non-deterministic Polynomial

- Число команд при решении на недетерминированной машине Тьюринга ограничено полиномом от размера входных данных
  - Все задачи класса P
    - Почему?
  - Приведите конкретные примеры
  - Приведите пример задачи НЕ из класса NP

NP-полные задачи

- Задача P сводится к задаче Q , если существует функция f, такая что
  - f «вычислима за полиномиальное время»
  - для любых входных данных x «решить задачу P для x» равносильно «решить задачу Q для f(x)», т.е. $\square$ x (x $\in$ P $\Leftrightarrow$ f(x) $\in$ Q)

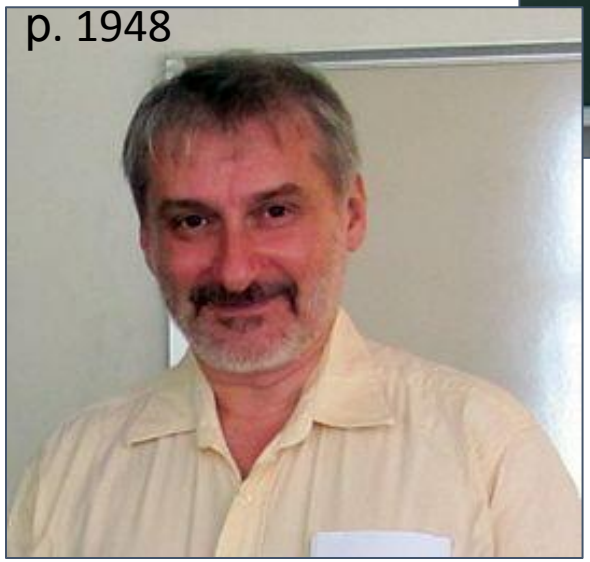
- Задача является NP-полной, если она принадлежит классу NP и к ней сводится любая задача класса NP
  - Задача является NP-трудной, если к ней сводится любая задача класса NP, но сама она не обязательно из класса NP

Теорема Левина-Кука

- Проверка выполнимости произвольных булевых формул в КНФ является NP-полной задачей
  - Cook, Stephen (1971). "The complexity of theorem proving procedures". Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing. pp. 151–158.
  - Л. А. Левин. Универсальные задачи перебора (рус.) // Проблемы передачи информации. — 1973. — Т. 9, № 3. — С. 115—116.

Cook, Stephen Arthur
b. 1939

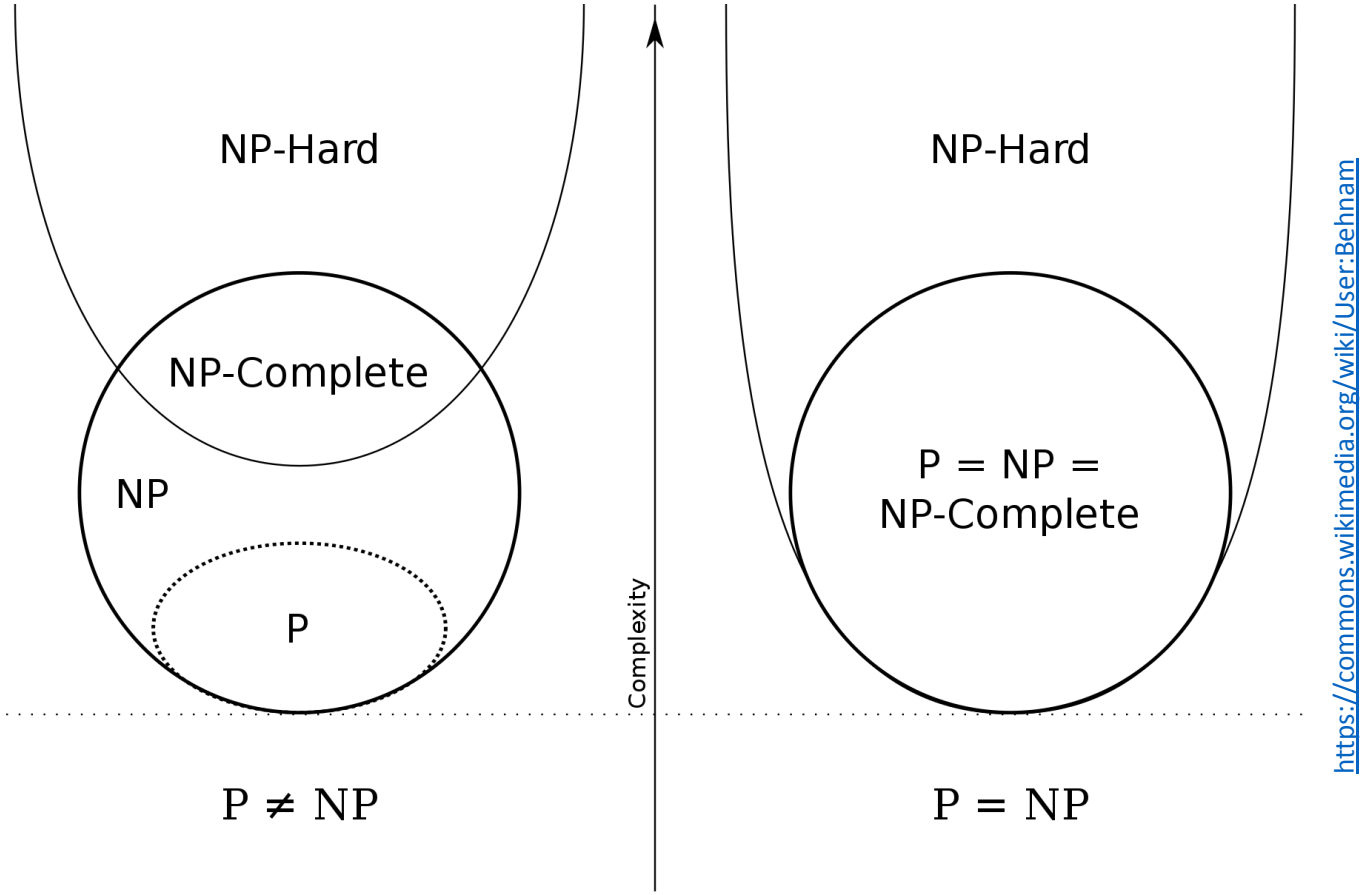
Левин, Леонид Анатольевич
р. 1948



Примеры других NP-полных задач

- Существует ли в графе цикл, содержащий все вершины по одному разу? («задача коммивояжёра»)
- Можно ли раскрасить вершины графа в C цветов так, чтобы концы каждого ребра были разного цвета? («раскраска графа»)
  - NP-полная начиная с C = 3
- Дано расположение дамок (простых шашек нет) на доске размером NxN. Есть ли у белых выигрыш в данной позиции?
- Существует ли в графе путь из одной вершины в другую длины не менее K?
- Существует ли множество из K вершин графа, такое что один или оба конца любой дуги принадлежит этому множеству («вершинное покрытие»)
- «Задача о рюкзаке»
- …

Возможные отношения между P и NP



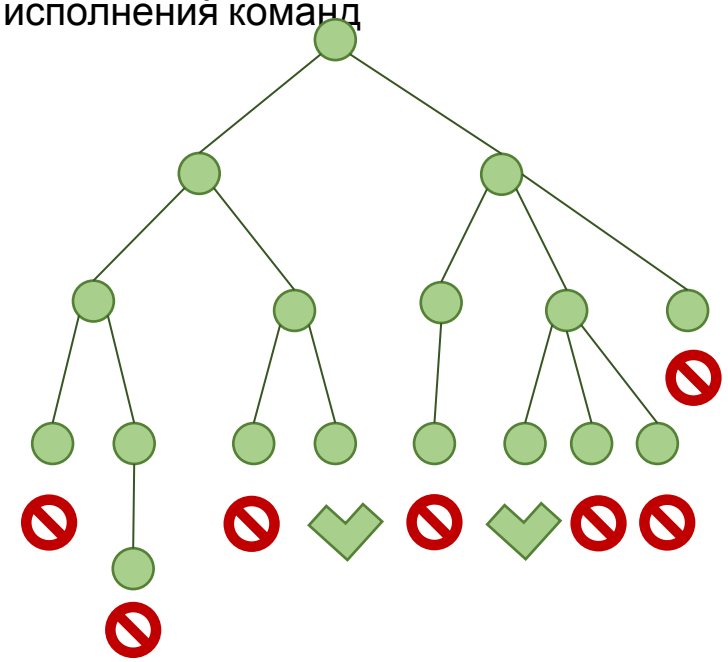
https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Behnam

Метод поиска с возвратом

- Метод проб и ошибок, backtracking
  - Примерно 1950 год
  - Derrick Henry Lehmer, 1905-1991
- Популярный метод в раннем искусственном интеллекте
- Эмуляция недетерминированных исполняющих устройств на обычном компьютере

Метод поиска с возвратом

- Граф состояний недетерминированного исполняющего устройства во время исполнения программы
  - Вершины – состояния устройства
  - Дуги – переходы между состояниями в результате исполнения команд

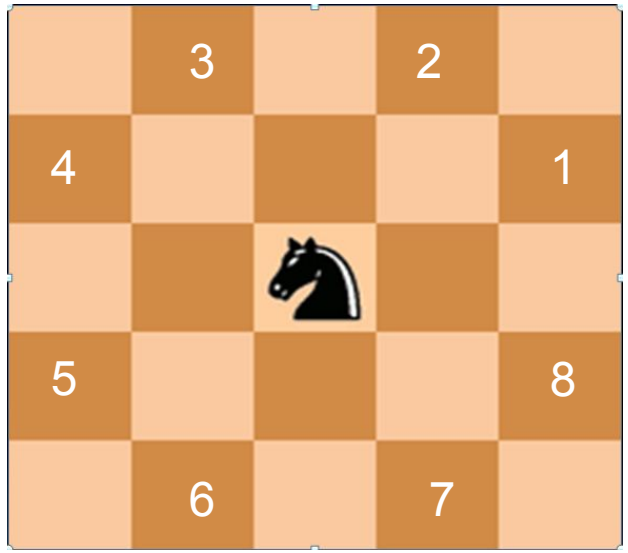


1. «Конструируем» недетерминированное исполняющее устройство, удобное для решения задачи
   - Выбираем множество исходных, промежуточных и конечных состояний
   - Выбираем команды
2. Пишем программу для решения задачи на недетерминированном исполняющем устройстве
3. Эмулируем на обычном компьютере её исполнение на недетерминированном устройстве
   - Обходим «граф состояний недетерминированного исполняющего устройства во время исполнения программы»
   - Скорость эмуляции зависит от метода обхода

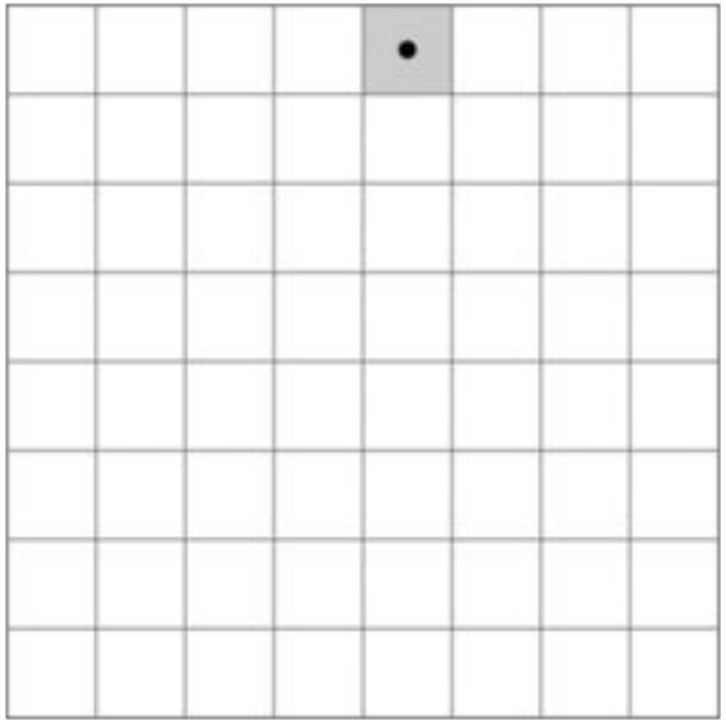
Обход доски шахматным конём

- Найти последовательность ходов шахматного коня, начинающуюся с заданного поля доски NxN, такую что конь посещает каждое поле доски ровно один раз

- К какой NP-полной задаче сводится обход доски шахматным конем?



Пример обхода доски 5x5 и 8x8



Недетерминированное исполняющее устройство

- Состояние
  - матрица NxN, частично заполненная номерами ходов коня от 1 до M <= N^2 и частично значением 0 («поле не посещено»)
    - Можно хранить список полей в порядке их посещения, но будет труднее проверять пройдено поле или нет

- Команды
  - GetNextBoard(board)
    - Если возможно, то сделать следующий ход; иначе «неудача»
    - Недетерминированная команда

Обход доски шахматным конём на недетерминированном устройстве

```
BuildKnightTour(startSquare):
    board[startSquare] = 1
    for freeSquareCount in GetSquareCount(board) – 1 … 1:
        board = GetNextBoard(board)
    return board
```

Детерминированная реализация

```
struct TBoard {
    int Size, Row, Column;
    int** Squares;
};
enum { MoveCount = 8 };
int BuildTour(int freeSquareCount, struct TBoard* board) {
    if (freeSquareCount == 0) {
        return 1;
    }
    struct TBoard nextBoard = MakeBoard(board->Size);
    int success = 0;
    for (int idx = 0; !success && idx < MoveCount; ++idx) {
        CopyBoard(*board, &nextBoard);
        success = TryMove(idx, &nextBoard)
            && BuildTour(freeSquareCount - 1, &nextBoard);
    }
    DestroyBoard(nextBoard);
    return success;
}
```

```
int TryMove(int idx, struct TBoard* board) {
    int row = board->Row, column = board->Column;
    int** squares = board->Squares;
    int count = squares[row][column];
    int change[MoveCount] = { 1, -1, -2, -2, -1, 1, 2, 2 };
    row += change[MoveCount - 1 - idx];
    column += change[idx];
    int isValid = Min(row, column) >= 0
        && Max(row, column) < board->Size;
    if (isValid && !squares[row][column]) {
        squares[row][column] = count + 1;
        board->Row = row;
        board->Column = column;
    }
    return isValid;
}
```

Пример эвристики

- Эвристика Варнсдорфа (Warnsdorff), 1823
  - На каждом ходу ставь коня на такое поле, из которого можно совершить наименьшее число ходов на еще не пройденные поля. Если таких полей несколько, берем любое из них.

- Позволяет обойти без возвратов доски от 5x5 до 76x76

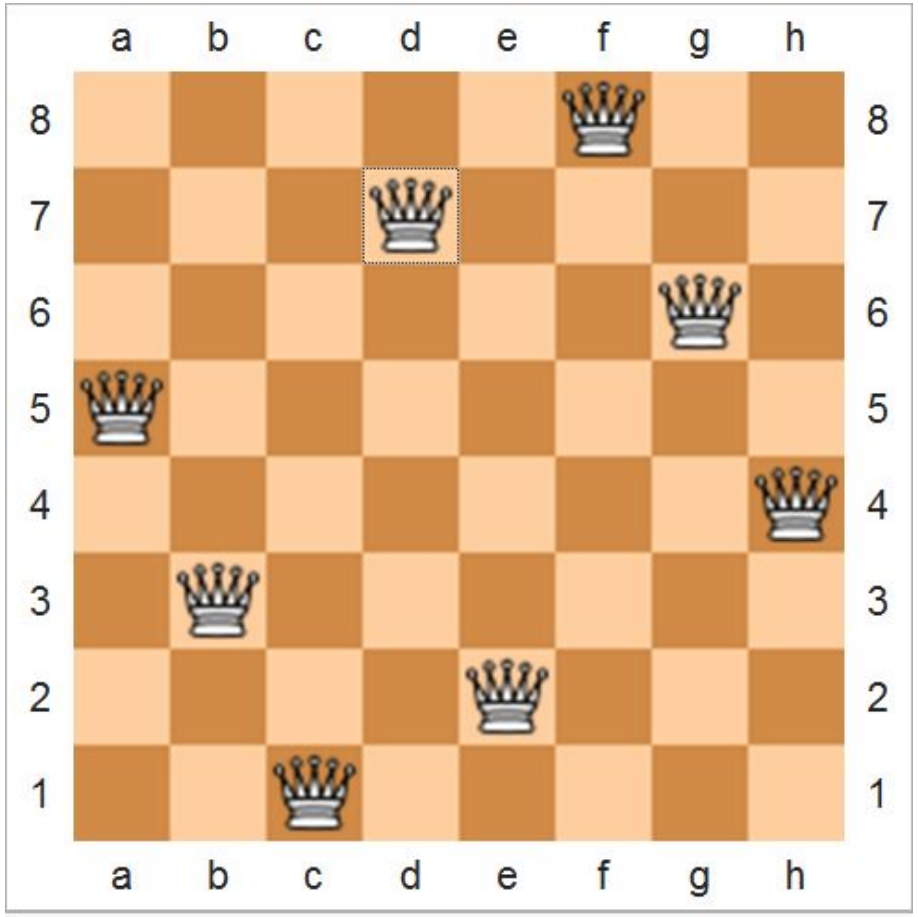
Что известно из теории

- Для любой прямоугольной доски с наименьшей стороной >= 5 существует (возможно незамкнутый) обход шахматным конем
  - Conrad, A.; Hindrichs, T.; Morsy, H. & Wegener, I. (1994). "Solution of the Knight's Hamiltonian Path Problem on Chessboards". Discrete Applied Mathematics. 50 (2): 125–134. https://doi.org/10.1016%2F0166-218X%2892%2900170-Q
  - Cull, P.; De Curtins, J. (1978). "Knight's Tour Revisited" (PDF). Fibonacci Quarterly. 16: 276–28. http://www.fq.math.ca/Scanned/16-3/cull.pdf

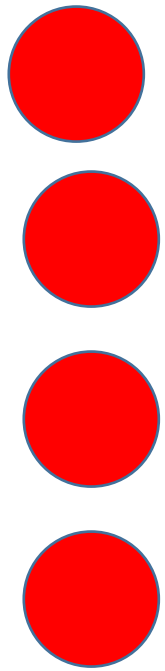
- Для любой доски m × n (m ≤ n) существует замкнутый обход шахматным конем, за исключением случаев, когда выполнены одно или более из следующих условий:
  - m и n оба нечетные
  - m = 1, 2, или 4
  - m = 3 и n = 1, 2, 3, 5 или 6
  - Allen J. Schwenk (1991). "Which Rectangular Chessboards Have a Knight's Tour?". Mathematics Magazine: 325–332

Задача о расстановке ферзей

- «Требуется расставить 8 ферзей на шахматной доске так, чтобы ни один ферзь не угрожал другому»
- Формулировка -- Max Bezzel, 1848
- Первое решение -- Franz Nauck, 1850
  - Перечислил все 92 решения
  - Расширил на N ферзей на доске NxN
- Используется для проверки скорости работы алгоритмов с возвратом



Пример расстановки 4 ферзей

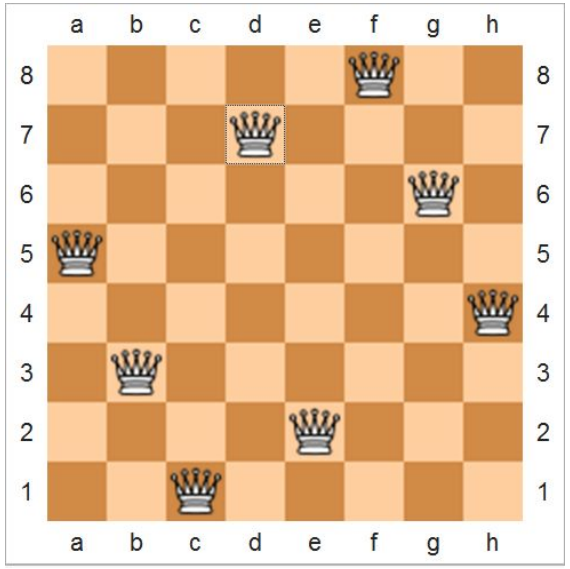


Недетерминированное исполняющее устройство

- Состояние
  - вектор длины M <= N, заполненный номерами вертикалей, в которых находятся ферзи в горизонталях 0 до M-1

- Команды
  - PlaceNextQueen(board)
    - Если возможно, то добавить в конец вектора board следующего ферзя; иначе «неудача»
    - Недетерминированная команда

[
5,
3,
6,
0,
7,
1,
4,
2
]



Расстановка ферзей с помощью недетерминированного устройства

```
PlaceQueens(Count):
    board = []
    for queenIdx in 1 … Count:
        board = PlaceNextQueen(board)
    return board
```

Детерминированная реализация

```
struct TBoard {
    int Size;
    int QueenCount;
    int* QueenColumns;
};

int PlaceQueens(int queenIdx, struct TBoard* board) {
    if (queenIdx > board->Size) {
        return 1;
    }
    struct TBoard nextBoard = MakeBoard(board->Size);
    int success = 0;
    for (int col = 0; !success && col < board->Size; ++col) {
        CopyBoard(board, &nextBoard);
        success = TryPlaceQueen(col, &nextBoard)
            && PlaceQueens(queenIdx + 1, &nextBoard);
    }
    DestroyBoard(nextBoard);
    return success;
}
```

```
int TryPlaceQueen(int column, struct TBoard* board) {
    int upDiagonalIdx = column + board->QueenCount;
    int downDiagonalIdx = column - board->QueenCount;
    int* queens = board->QueenColumns;
    int isSafe = 1;
    for (int idx = 0; isSafe && idx < board->QueenCount; ++idx)
{
        isSafe = column != queens[idx]
            && upDiagonalIdx != queens[idx] + idx
            && downDiagonalIdx != queens[idx] - idx
    }
    if (isSafe) {
        board->QueenColumns[board->QueenCount] = column;
        ++board->QueenCount;
    }
    return isSafe;
}
```

Что известно из теории

- Расстановка N ферзей за O(N)
  - E. J. Hoffman et al., "Construction for the Solutions of the m Queens Problem". Mathematics Magazine, Vol. XX (1969), pp. 66–72
    http://penguin.ewu.edu/~trolfe/QueenLasVegas/Hoffman.pdf

Задача о рюкзаке

- Дано n вещей
  - i-я вещь имеет вес w_i, и стоимость c_i
- Дано число K – вместимость рюкзака
- Найти набор вещей максимальной стоимости при условии, что их общий вес не превышает K
  - $t_i = 0$, если вещь не взята
  - $t_i = 1$, если вещь взята

$$\sum_{i=1}^{i \le n} t_i w_i \le K$$

$$\sum_{i=1}^{i \le n} t_i c_i \to max$$

Схема перебора всех решений и выбора оптимального

```
Try(int i)
{
   if (включение приемлемо)
   {  включение i-й вещи;
      if (i < n) Try(i+1);
      else проверка оптимальности;
      исключение i-й вещи;
   }
   if (приемлемо невключение)
   {
      if (i < n) Try(i+1);
      else проверка оптимальности;
   }
}
```

Метод ветвей и границ

- Вариант полного перебора
- Нахождение оптимальных решений среди допустимых
- Отсечение заведомо неоптимальных допустимых решений
- Ленд и Дойг 1960 общая задача целочисленного линейного программирования
  - A. H. Land and A. G. Doig An automatic method of solving discrete programming problems
- Литтл, Мурти, Суини и Кэрел 1963 задача коммивояжера

Метод ветвей и границ

- Целевая функция
  - В задаче о рюкзаке это

$$\sum_{i=1}^{i\leq n} t_i c_i \rightarrow max$$

- Ограничения
  - В задаче о рюкзаке это

$$\sum_{i=1}^{i\leq n} t_i w_i \leq K$$

- Допустимые решения удовлетворяют ограничениям
- Оптимальные решения – это допустимые решения, дающие максимальное значение целевой функции

Метод ветвей и границ

- Разбиение множества допустимых решений на подмножества меньших размеров
- Подмножества допустимых решений образуют *дерево поиска* (*дерево ветвей и границ*)
- Для каждого подмножества допустимых решений оцениваем *снизу* и *сверху* множество значений целевой функции
  - Если нижняя граница совпадает с верхней границей, то Ц.Ф. достигает максимума (минимума) на данном подмножестве допуст. решений
  - Если *нижняя* граница для значений Ц.Ф. на подмножестве А больше *верхней* границы для значений Ц.Ф. на подмножестве В, то А не содержит минимума Ц.Ф., а
    В не содержит максимума Ц.Ф.

Метод ветвей и границ

- Ищем оптимальное решение при помощи обхода дерева ветвей и границ
  - Вид обхода выбираем в зависимости от задачи
- На каждом шаге обхода проверяем, содержит ли данное подмножество допустимых решений оптимальное решение
  - да, если верхняя граница == нижняя граница
    - обновляем известный min (max)
  - нет, если нижняя граница > известный min (верхняя граница < известный max)
    - не исследуем (пропускаем) подмножество допустимых решений
  - неизвестно
    - разбиваем подмножество допустимых решений на части и добавлем в дерево новые вершины

Метод ветвей и границ для решения задачи о рюкзаке

- Множество допустимых решений задаём массивом t[] и номером x рассматриваемой вещи
  - значения t[0] … t[x] уже зафиксированы
  - t[0]*w[0]+t[1]*w[1]+…+t[x]*w[x] <= K
  - значения t[x+1] … t[n] еще не зафиксированы
- Оценка снизу для множества допустимых решений t, x
  - тривиальная -- t[0]*c[0]+t[1]*c[1]+…+t[x]*c[x]
  - приведите примеры более "умных" оценок

Схема перебора всех решений и выбора оптимального (копия)

```
Try(int i)
{
   if (включение приемлемо)
   {  включение i-й вещи;
      if (i < n) Try(i+1);
      else проверка оптимальности;
      исключение i-й вещи;
   }
   if (приемлемо невключение)
   {
      if (i < n) Try(i+1);
      else проверка оптимальности;
   }
}
```

Детализация метода ветвей и границ для задачи о рюкзаке

- Обозначим
  - *tw* – общий вес рюкзака к данному моменту
  - *av* – оценка сверху на конечную ценность рюкзака
  - maxv – максимум, известный на данный момент
- "Включение приемлемо"

  tw + w[i] ≤ K
- "Проверка оптимальности"

```
if (av  > maxv) {
     opts = t;
  maxv = av;
}
```
- “Приемлемо невключение”

  av < maxv

Заключение

- Классы задач P и NP, сводимость, NP-полные и NP-трудные задачи
- Метод поиска с возвратом
- Алгоритмы решения классических задач комбинаторного поиска
  - Обход доски шахматным конем
  - Расстановка ферзей

Задача о кубике

Задано описание кубика и входная строка.

Можно ли получить входную строку, прокатив кубик?

Перенумеруем грани кубика с 123456 на 124536:

1 – нижняя;

6 – верхняя; (1+6 = 7)

3 – фронтальная;

4 – задняя; (3+4 = 7)

2 – боковая левая;

5 – боковая правая (2+5 = 7).

Тогда соседними для *i*-й будут все, кроме *i*-й и (7-i)-й.

Попробуем построить слово, начиная со всех шести граней.

Результат (в переменной *q*) 1, если можно получить слово, записанное в глобальной строке *w*, начиная *n*-го символа, перекатывая кубик, лежащий *g*-ой гранью.

```
int chkword(g, n) {
 if((n>strlen(w)) || (w[n]== ' '))
   return 1;
 if(CB[g] != w[n]) break;
 for(i=1; i<=6; i++) {
  if((i != g) && (i+g != 7))
     q=chkwrd(i,n+1);
     if (q) return 1;
 }
}
```

Задача о стабильных браках

Имеются два непересекающихся множества *A* и *B*. Нужно найти множество пар <*a*, *b*>, таких, что $a \in A$, $b \in B$, и они удовлетворяют некоторым условиям.

Для выбора таких пар существует много различных критериев; один из них называется «правилом стабильных браков».

Пусть A — множество мужчин, а B — женщин. У каждых мужчины и женщины есть различные предпочтения возможного партнера.

Если среди *n* выбранных пар существуют мужчины и женщины, не состоящие между собой в браке, но предпочитающие друг друга, а не своих фактических супругов, то такое множество браков считается нестабильным.

Если же таких пар нет, то множество считается стабильным.

Алгоритм поиска супруги для мужчины *m*

Поиск ведется в порядке списка предпочтений именно этого

мужчины.

```
Try(m) {
  int r;
  for (r=0; r<n; r++) {
    выбор r-ой претендентки для m;
    if (подходит)  {
       запись брака;
       if (m - не последний) Try(m+1);
       else записать стабильное множество;
    }
    отменить брак;
  }
}
```

Выбор структур данных

Будем использовать две матрицы, задающие предпочтительных партнеров для мужчин и женщин: For*Lady* и For*Man*.

ForMan [*m*][*r*] — женщина, стоящая на *r*-м месте в списке для мужчины *m*.

ForLady [*w*][*r*] — мужчина, стоящий на *r*-м месте в списке женщины *w*.

Результат — массив женщин *x*, где *x*[*m*] соответствует партнерше для мужчины *m*.

Для поддержания симметрии между мужчинами и женщинами и для эффективности алгоритма будем использовать дополнительный массив *y*: *y*[*w*] — партнер для женщины w.

Конкретизация схемы

Предикат “подходит” можно представить в виде конъюнкции single и stable, где stable — функция, которую нужно еще определить.

```
Try (int m) {
  int r, w;
  for (r=0; r<n; r++) {
    w = ForMan[m][r];
    if (single[w] && stable) {
       x[m]= w; y[w]= m;
  single[w]=0;
          if (m < n) Try(m+1);
       else record set;
    }
    single[w]=1;
  }
}
```

Стабильность системы

Мы пытаемся определить возможность брака между *m* и *w*, где *w* стоит в списке *m* на *r*-м месте. Возможные источники неприятностей могут быть:

1) Может существовать женщина *pw*, которая для *m* предпочтительнее *w*, и для *pw* мужчина m предпочтительнее ее супруга.
2) Может существовать мужчина *pm*, который для *w* предпочтительнее *m*, причем для *pm* женщина *w* предпочтительнее его супруги.

1) Исследуя первый источник неприятностей, мы сравниваем ранги женщин, котрых *m* предпочитает больше *w*. Мы знаем, что все эти женщины уже были выданы замуж, иначе бы выбрали ее.

```
stable = 1; i = 1;
while((i<r)&& stable){
  pw = ForMan[m][i];
  i = i+1;
  if(single[pw]) {
    stable = (ForLady[pw][m] > ForLady[pw][y[pw]]};
  }
}
```

2) Нужно проверить всех кандидатов *pm*, которые для *w* предпочтительнее «суженому». Здесь не надо проводить сравнение с мужчинами, которые еще не женаты. Нужно использовать проверку *pm <m:* все мужчины, предшествующие *m*, уже женаты.

Напишите проверку 2) самостоятельно!

Перебор ходов

- Из поля (x, y) достижимы не более 8 полей

  (u, v) = (x + D[0,k], y + D[1,k]), k = 0, 1, ..., 7

  где массив D[2][8] заполнен следующим образом

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & -2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Для (x, y) вблизи края доски не рассматриваем k, для которых (u, v) лежат за пределами доски