

2. КИНЕМАТИКА.

1. Предмет кинематики.

Кинематика изучает механическое движение без учета сил.

Кинематика разделяется на кинематику точки и кинематику твердого тела.

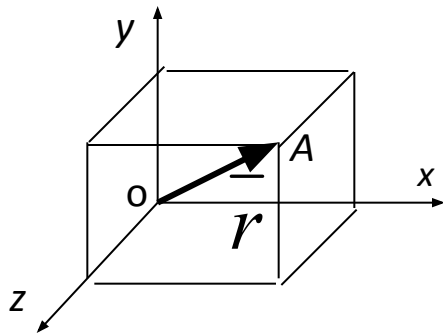
2. Кинематика точки.

2.1. Два способа задания движения точки: векторно-координатный и естественный.

При векторно-координатном способе задаются либо три координаты точки для любого момента времени:

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad (2.1)$$

либо радиус-вектор точки, имеющий, как правило, начало в начале системы координат:

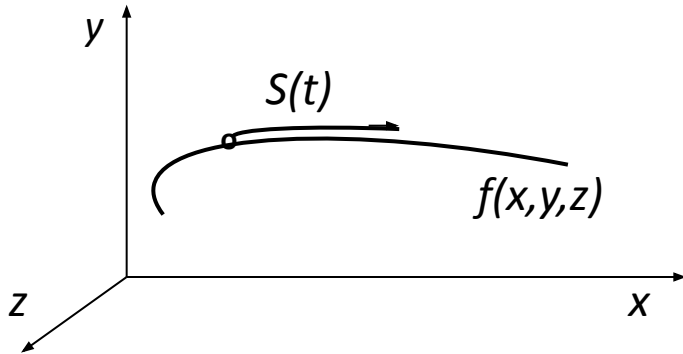


$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \quad (2.2)$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - единичные орты координатных осей.

2. Кинематика точки (продолжение).

При естественном способе задается закон движения точки $S=S(t)$ и уравнение траектории $f(x,y,z)$.



Движение точки считается заданным, если можно в каждый момент времени определить ее положение на траектории.

2.2. Скорость точки характеризует быстроту перемещения точки в пространстве.

Средняя скорость.

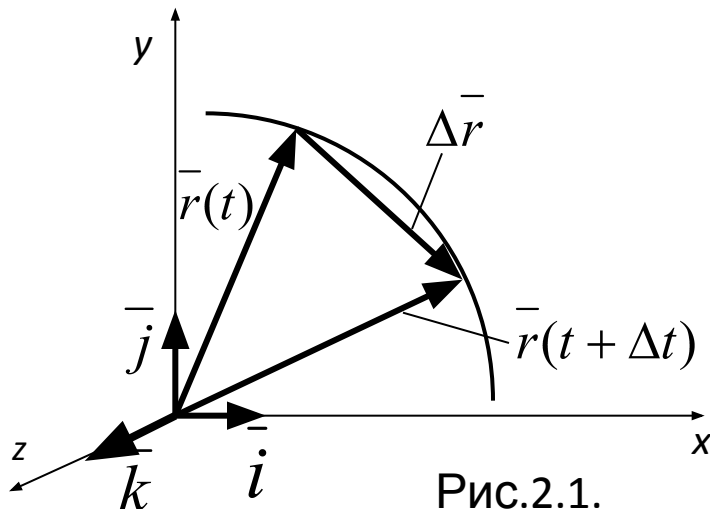


Рис.2.1.

Средняя скорость (рис.2.1) определяется выражением:

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

2. Кинематика точки (продолжение).

Мгновенная скорость (или просто скорость).

Чаще всего определяют мгновенную скорость в данный момент времени:

$$\bar{v} = \lim \left(\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \bar{i} + \frac{dy}{dt} \bar{j} + \frac{dz}{dt} \bar{k}. \quad (2.3)$$

Обозначим проекции вектора скорости на координатные оси:

$$v_x = \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad v_y = \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad v_z = \dot{z} = \frac{\partial z}{\partial t}. \quad (2.4)$$

С учетом этих обозначений формула (2.3) примет вид:

$$\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}. \quad (2.5)$$

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (2.6)$$

2. Кинематика точки (продолжение).

2.3. У с к о р е н и е точки – это скорость изменения скорости.

Среднее ускорение $\overline{a_{cp}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Мгновенное ускорение

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\overline{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\overline{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\overline{k} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}, \quad (2.7)$$

где проекции ускорения на координатные оси:

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (2.8)$$

М о д у л ь ускорения (п о л н о е ускорение):

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.9)$$

Ускорение также разделяется на касательное и нормальное.

2. Кинематика точки (продолжение).

Определение касательного и нормального ускорений.

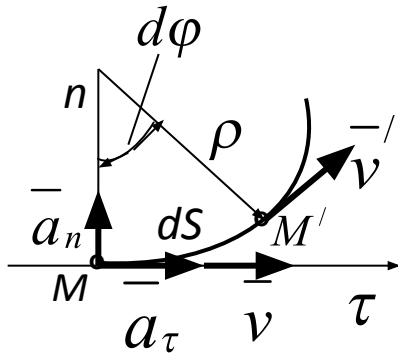


Рис.2.2.

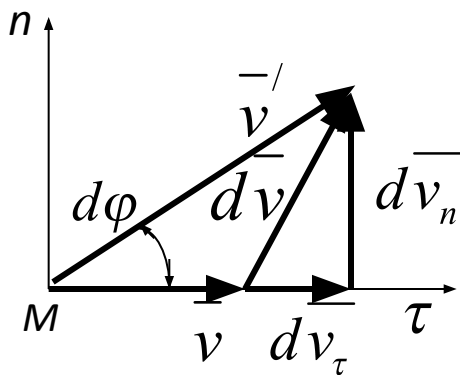


Рис.2.3.

Пусть т.М движется по криволинейной траектории. При этом изменяется и величина и направление скорости.

Величину скорости изменяет касательное ускорение $\overline{a}_\tau$, а направление нормальное ускорение $\overline{a}_n$ - рис.2.2 и 2.3. Обозначим приращение скорости по касательной τ к траектории в т.М через $d\overline{v}_\tau$ а по нормали n через $d\overline{v}_n$.

$$\text{Тогда } \overline{a}_\tau = \frac{d\overline{v}_\tau}{dt}, \quad \overline{a}_n = \frac{d\overline{v}_n}{dt}. \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \quad (2.10)$$

Рассмотрим только приращение $d\overline{v}_\tau$ ($d\overline{v}_n=0$). В этом случае $d\phi=0$, $d\overline{v}_\tau = d\overline{v}$ и

$$\overline{a}_\tau = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d^2\overline{S}}{dt^2}. \quad (2.11)$$

Рассмотрим теперь только приращение $d\overline{v}_n$ ($d\overline{v}_\tau=0$). Из рис.2.3 следует:

$$d\overline{v}_n = v d\phi, \quad \text{а из рис.2.2: } d\phi = \frac{ds}{\rho}. \quad \text{С учетом этих выражений формула}$$

$$(2.10) \text{ для } \overline{a}_n \text{ примет вид: } a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

2. Кинематика точки (продолжение).

2.4. Простые формы движения точки.

а). Прямолинейное движение:

$$\rho = \infty, \quad a_n = 0, \quad a = a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

б). Равномерное движение:

$$|v| = \text{const}, \quad a_\tau = 0, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

в). Равномерное прямолинейное движение:

$$\rho = \infty, \quad |v| = \text{const}, \quad a_n = 0, \quad a_\tau = 0.$$

г). Равнопеременное движение (за равные промежутки времени скорости изменяются на равные величины):

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \text{const} \implies dv = a_\tau dt;$$

$$\Delta v = v - v_0 = \int_0^t dv = a_\tau t \implies v = v_0 + a_\tau t;$$

$$v = \frac{dS}{dt} \implies dS = v dt = (v_0 + a_\tau t) dt;$$

$$S = \int_0^t dS = \int_0^t (v_0 + a_\tau t) dt = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}.$$

2. Кинематика точки (продолжение).

2.5. Сложное движение точки.

2.5.1. Понятие о сложном движении точки.

При сложном движении точка одновременно участвует в нескольких движениях. Например, человек идет по движущемуся поезду. Поезд можно рассматривать как подвижную систему координат, а движение человека (примем его за материальную точку M) относительно поезда – **о т н о с и т е л ь н ы м** движением. Движение поезда относительно земли (примем ее за неподвижную) назовем **п е р е н о с н ы м** движением относительно неподвижной системы координат.

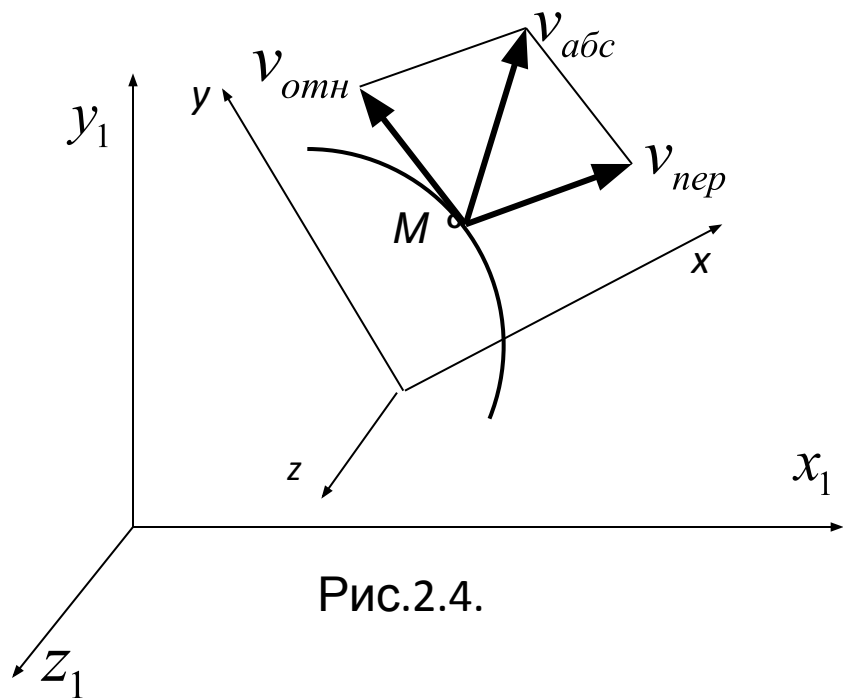
Таким образом, т. M одновременно участвует и в относительном движении (имеет $v_{отн}$ и $a_{отн}$) и в переносном движении (имеет $v_{пер}^{И}$ и $a_{пер}$).

Движение, совершаемое т. M по отношению к неподвижной системе отсчета – это **а б с о л ю т н о е** (или сложное) движение. Соответственно в абсолютном движении у т. M : $v_{абс}^{И}$ и $a_{абс}$.

2. Кинематика точки (продолжение).

2.5. Сложное движение точки (продолжение).

2.5.2. Сложение скоростей.



$x_1y_1z_1$ – подвижная система координат, в которой точка M совершает относительное движение (рис.2.4).

$x_1y_1z_1$ – неподвижная система координат, относительно которой подвижная система совершает переносное движение. Поскольку относительная и переносная скорости не влияют друг на друга, то они складываются геометрически:

$$\overline{v_{абс}} = \overline{v_{отн}} + \overline{v_{пер}}. \quad (2.13)$$

2.5.3. Сложение ускорений.

$$\overline{a_{абс}} = \frac{d\overline{v_{абс}}}{dt} = \frac{d\overline{v_{пер}}}{dt} + \frac{d\overline{v_{отн}}}{dt}. \quad (2.14)$$

2. Кинематика точки (продолжение).

2.5.3. Сложение ускорений (продолжение).

Скорости изменяются и в переносном и в относительном движениях.

Условимся изменение скорости в относительном движении отмечать индексом «1», а в переносном – индексом «2». Формула (2.14) примет вид:

$$\overline{a_{abc}} = \frac{(d\overline{v_{пер}})_1}{dt} + \frac{(d\overline{v_{пер}})_2}{dt} + \frac{(d\overline{v_{отн}})_1}{dt} + \frac{(d\overline{v_{отн}})_2}{dt}. \quad (2.15)$$

В этой формуле:

$$a_{отн} = \frac{(d\overline{v_{отн}})_1}{dt} \text{ относительное ускорение;} \quad (2.16)$$

$$a_{пер} = \frac{(d\overline{v_{пер}})_2}{dt} \text{ переносное ускорение;} \quad (2.17)$$

$$a_{кор} = \frac{(d\overline{v_{пер}})_1}{dt} + \frac{(d\overline{v_{отн}})_2}{dt} \text{ кориолисово ускорение.} \quad (2.18)$$

Кориолисово ускорение характеризует изменение относительной скорости при переносном движении и изменение переносной скорости в относительном движении. Таким образом:

$$\overline{a_{abc}} = \overline{a_{отн}} + \overline{a_{пер}} + \overline{a_{кор}}. \quad (2.19)$$

2. Кинематика точки (продолжение).

2.5.4. Вывод рабочей формулы для $a_{кор}$.

Найдем сначала $\frac{(d\overline{v_{отн}})_2}{dt}$.

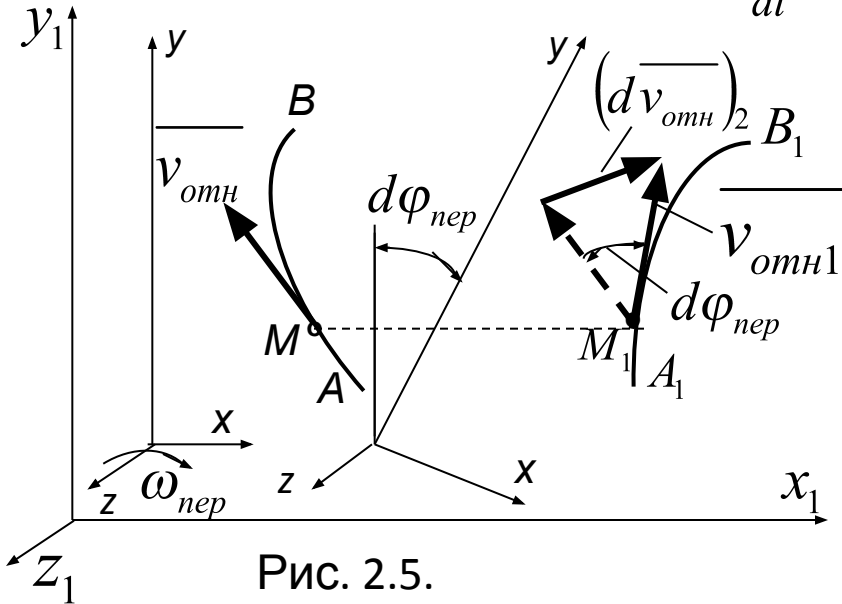


Рис. 2.5.

Пусть, т.М движется в относительном движении по кривой AB в подвижной системе координат xyz . В общем случае переносное движение кривой AB в неподвижной системе координат $x_1y_1z_1$ складывается из поступательного движения и вращательного относительно некоторого полюса с переносной угловой скоростью $\omega_{пер}$ - рис. 2.5. Приращение угловой скорости в переносном движении будет только за счет $\omega_{пер}$. Поскольку $d\phi_{пер} = \omega_{пер} dt$, приращение $(d\overline{v_{отн}})_2$ будет

$$(d\overline{v_{отн}})_2 = v_{отн} d\phi_{пер} = v_{отн} \omega_{пер} dt,$$

откуда
$$\frac{(d\overline{v_{отн}})_2}{dt} = v_{отн} \omega_{пер}.$$

Переходим к векторному обозначению-рис.2.6:

$$\frac{(d\overline{v_{отн}})_2}{dt} = \overline{\omega_{пер}} \times \overline{v_{отн}}.$$

(2.20)

Слайд 33

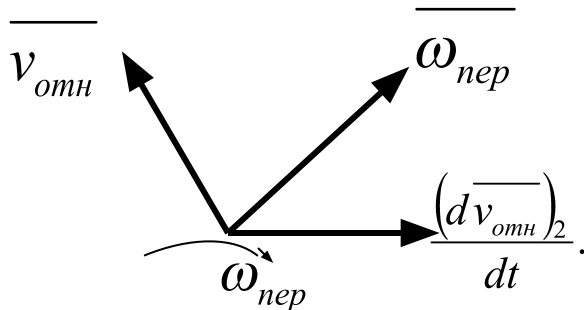


Рис. 2.6.

2. Кинематика точки (продолжение).

2.5.4. Вывод рабочей формулы для $a_{кор}$ (продолжение).

Найдем теперь $\frac{(d\overline{v_{пер}})_1}{dt}$.

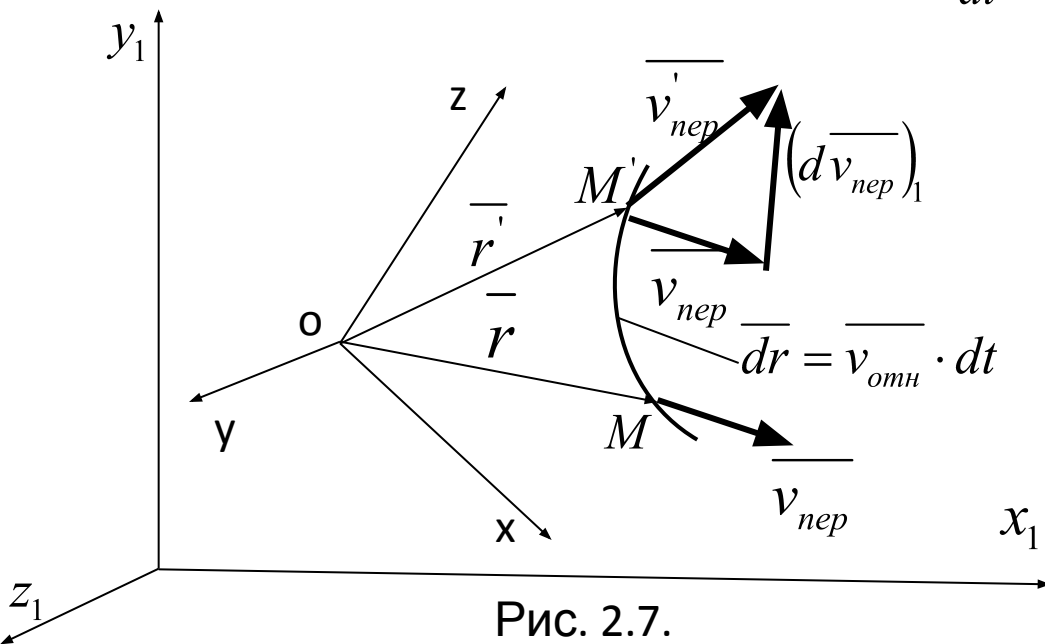


Рис. 2.7.

Точка M в относительном движении (в системе координат $x_1y_1z_1$) переходит в положение M' , пройдя путь

$$d\overline{r} = \overline{v_{отн}} \cdot dt.$$

Линейная скорость переносного движения v_o , угловая - ω

В т.М: $\overline{v_{пер}} = \overline{v_o} + \omega \times \overline{r}$, в т. M' :
 $\overline{v'_{пер}} = \overline{v_o} + \omega \times (\overline{r} + d\overline{r}).$

Приращение переносной скорости

$$(d\overline{v_{пер}})_1 = \overline{v'_{пер}} - \overline{v_{пер}} = \overline{v_o} + \omega \times (\overline{r} + d\overline{r}) - \overline{v_o} - (\omega \times \overline{r}) = \omega \times d\overline{r} = (\omega \times \overline{v_{отн}})dt,$$

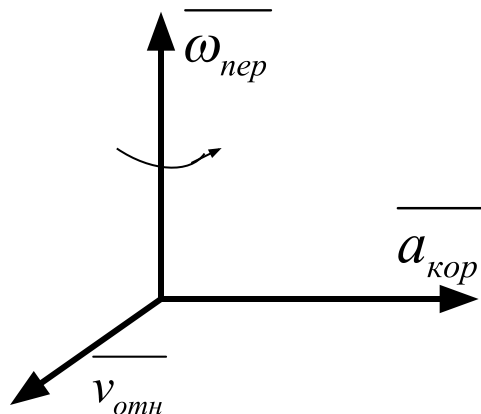
откуда

$$\frac{(d\overline{v_{пер}})_1}{dt} = \omega \times \overline{v_{отн}}. \quad (2.21)$$

С учетом (2.18) и (2.20):

$$a_{кор} = 2(\omega_{пер} \times \overline{v_{отн}}). \quad (2.22)$$

2. Кинематика точки (завершение).



Таким образом, получена рабочая формула (2.22) для расчета кориолисова ускорения.

Если $\overline{\omega_{пер}}=0$, то $\overline{a_{кор}}=0$.

Модуль кориолисова ускорения $a_{кор} = 2\omega v_{отн} \sin \alpha$,

где α - угол между векторами $\overline{\omega}$ и $\overline{v_{отн}}$

3. Кинематика твердого тела.

3.1. Простейшие движения твердого тела.

3.1.1. Поступательное движение.

При поступательном движении тела достаточно знать движение любой одной точки тела, поскольку $\overline{v_i} = const, \overline{a_i} = const$.

Частным случаем поступательного движения является *равномерное поступательное движение*. В этом случае $\overline{a_i} = 0$.

3. Кинематика твердого тела (продолжение)

3.1.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

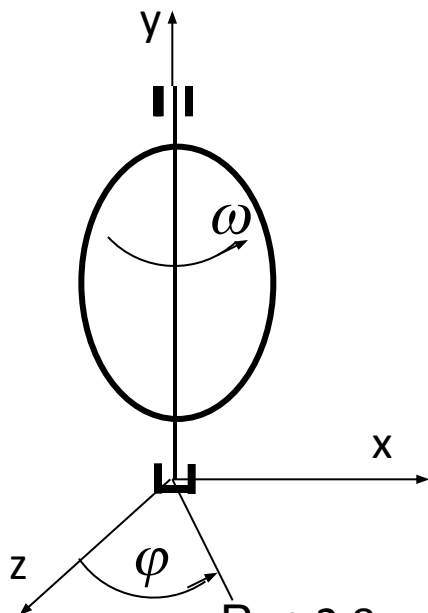


Рис.2.8.

Закон движения (рис.2.8): $\varphi = \varphi(t)$.

Угловая скорость: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$.

Угловое ускорение: $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} \neq \ddot{\varphi}$.

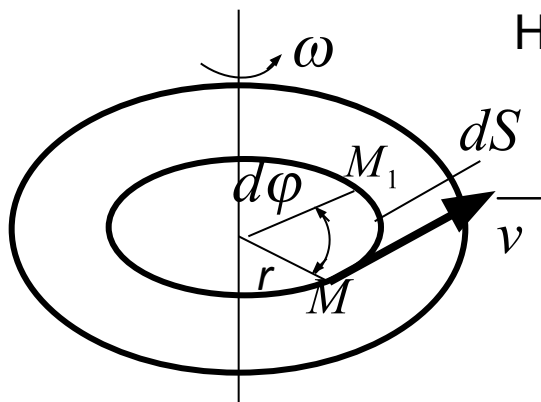


Рис.2.9.

Найдем линейную скорость $\overline{v}$ и ускорение $\overline{a}$ (рис.2.9).

$$\overline{v} = \frac{dS}{dt} = \frac{r d\varphi}{dt} = r\omega.$$

В векторной форме: $\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}$.

3. Кинематика твердого тела (продолжение)

3.1.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси (продолжение).

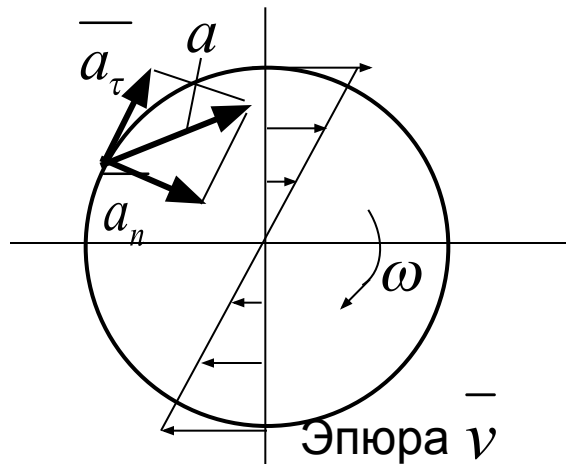


Рис. 2.10.

На рис.2.10 показана эюра скоростей $\bar{v}$

Полное линейное ускорение $\bar{a}$ разложено на касательное $\bar{a}_\tau$ и нормальное $\bar{a}_n$

$$\bar{a}_\tau = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2} = \varepsilon r. \quad \bar{a}_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

Пример.

Уравнение движения гири $x = 100t^2 (см)$; $r = 10 см$.
Найти ускорение т.В.

Решение.

$$S = x = r\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{x}{r} = \frac{100t^2}{r}.$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 20t (с^{-1}); \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 20 (с^{-2}).$$

$$a_n = \omega^2 r = 4000t^2 \left(\frac{см}{с^2} \right); a_\tau = \varepsilon r = 200 \left(\frac{см}{с^2} \right); a_B = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

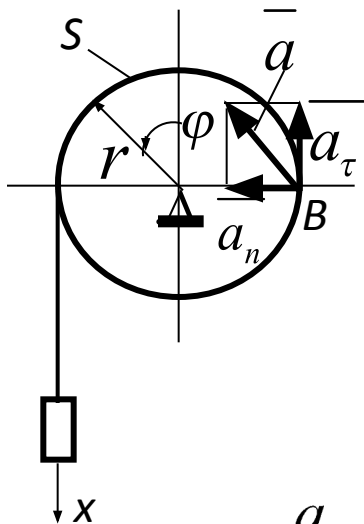


Рис.2.11

3. Кинематика твердого тела (продолжение)

3.2. Плоскопараллельное движение твердого тела. 3.2.1. Основные понятия.

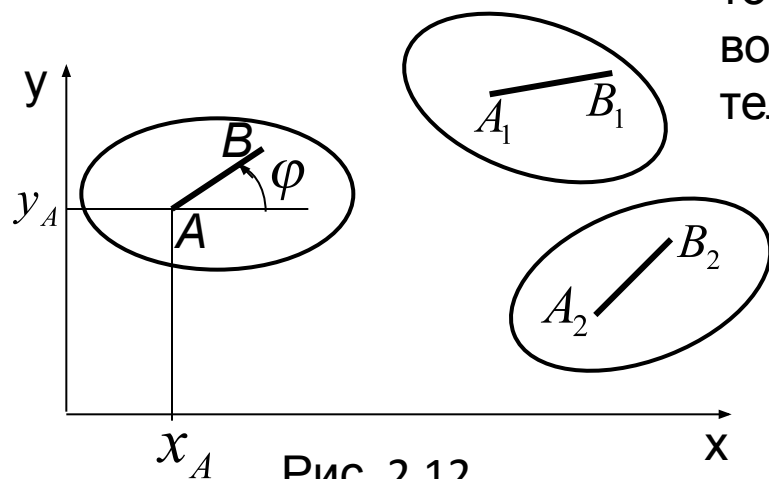
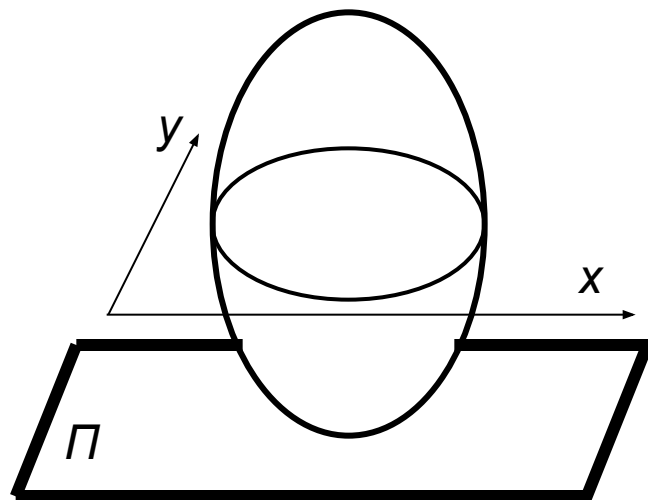


Рис. 2.12.

При плоскопараллельном (плоском) движении все точки тела перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости Π . Достаточно изучить движение любого сечения, параллельного пл. Π . Плоское движение полностью характеризуется положением произвольного отрезка AB в этом сечении (рис. 2.12).

Движение отрезка AB можно разложить на *поступательное* движение полюса A (произвольная точка на этом отрезке) и *вращательное* движение вокруг этого полюса. Таким образом, движение тела полностью определяется функциями:

$$x_A = f_1(t); y_A = f_2(t); \varphi = f_3(t),$$

т.е. надо знать $\underline{v_A}, \underline{a_A}, \omega, \varepsilon$.

За полюс принимается точка, скорость которой либо известна, либо ее легко найти.

3. Кинематика твердого тела (продолжение)

3.2. Плоскопараллельное движение твердого тела (продолжение).

Покажем, что вращательное движение не зависит от выбора полюса, поэтому в качестве полюса можно выбрать любую точку.

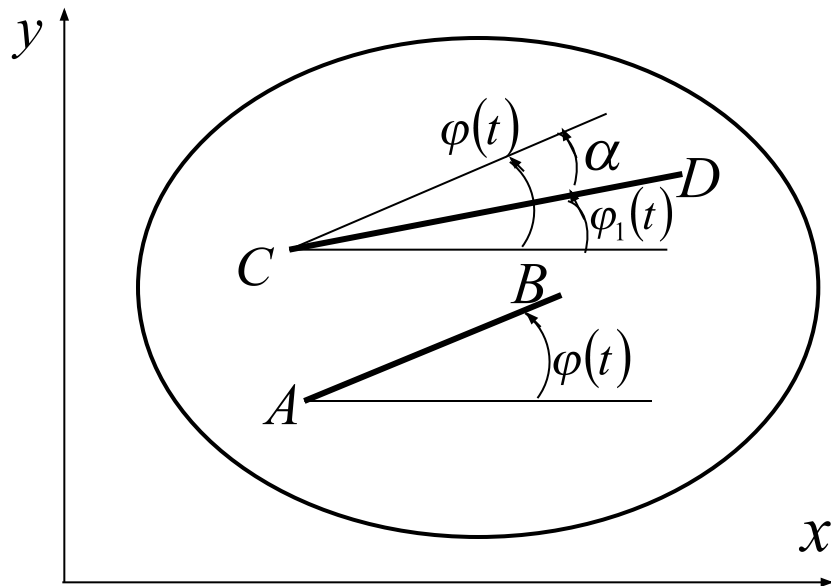


Рис.2.13.

Положение фигуры (рис.2.13) можно определить и отрезком AB и отрезком CD .
 $\overline{v_c} \neq \overline{v_A}, \overline{a_c} \neq \overline{a_A}$, т. к. иначе движение было бы поступательным.

$\varphi_1 = \varphi - \alpha, \alpha = const$, поэтому
 $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt}, \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$, т. е. угловые скорости и ускорения плоской фигуры при изменении полюса (A или C) не изменяются.

Таким образом, поступательное движение зависит от выбора полюса, а вращательное не зависит.

3. Кинематика твердого тела (продолжение)

3.2. Плоскопараллельное движение твердого тела (продолжение).

3.2.2. Определение скоростей точек плоской фигуры (рис. 2.14).

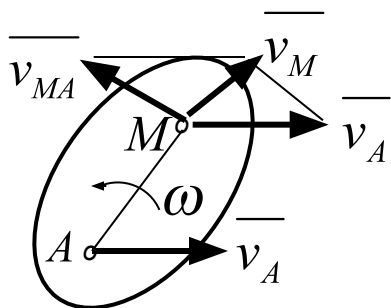


Рис.2.14.

A – полюс,

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}.$$

$$\vec{v}_{MA} = \omega \cdot AM.$$

3.2.3. Мгновенный центр скоростей (м.ц.с.).

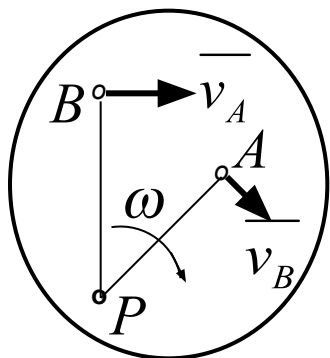


Рис.2.15.

М.ц.с. – это точка, в которой в данный момент времени скорость равна нулю. Если тело имеет вращательное движение, то такая точка существует и она единственная, т.к. в противном случае в различных точках тела направление скоростей было бы неопределенным. Для определения м.ц.с. (т. P – рис.2.15) надо знать скорости двух точек тела, провести к ним перпендикуляры и на их пересечении будет м.ц.с. P .

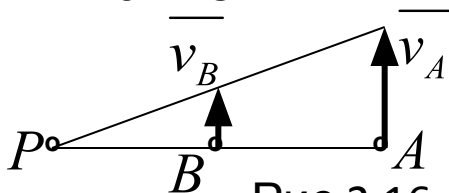


Рис.2.16.

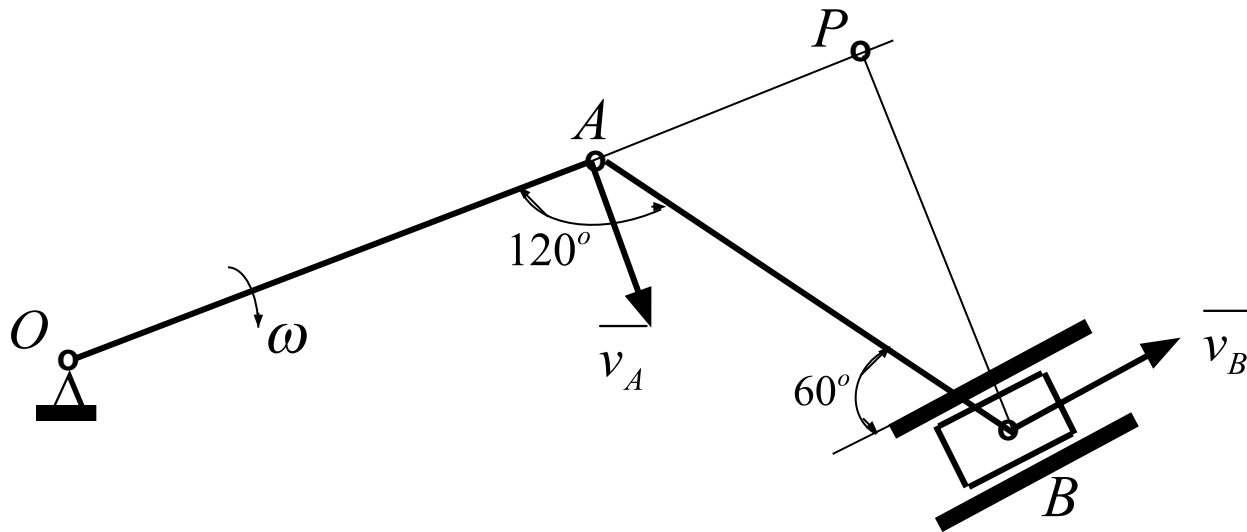
Если скорости в двух точках параллельны, то положение м.ц.с. находится, как показано на рис.2.16.

3. Кинематика твердого тела (продолжение)

3.2. Плоскопараллельное движение твердого тела (продолжение).

3.2.2 Определение скоростей точек плоской фигуры (продолжение).

Пример.



ОА - кривошип,

В – ползун,

$\omega = 10 \text{ с}^{-1}$,

ОА=0,1 м.

Найти $\overline{v_B}$

Решение.

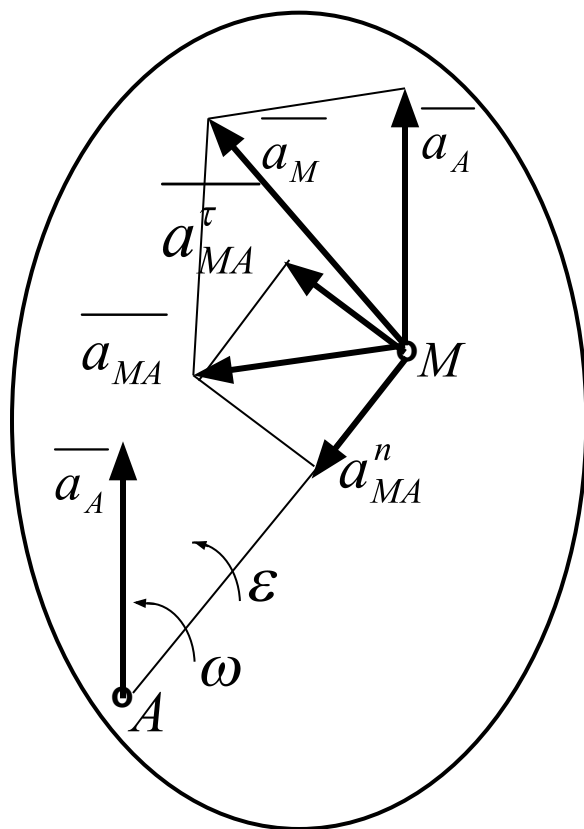
Находим м. ц. с. P . $\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} \Rightarrow v_B = v_A \frac{BP}{AP}$. $v_A = \omega \cdot OA = 10 \cdot 0,1 = 1 \text{ м/с}$.

Угол PAB равен 60° . $\frac{BP}{AP} = \operatorname{tg} 60^\circ = 1,73$. $v_B = 1 \cdot 1,73 = 1,73 \text{ м/с}$.

3. Кинематика твердого тела (продолжение)

3.2. Плоскопараллельное движение твердого тела (продолжение).

3.2.3. Определение ускорений точек плоской фигуры (рис.2.17).



A – полюс,

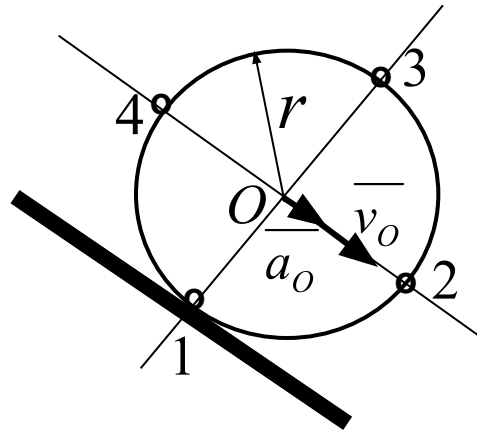
$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}.$$

$$\vec{a}_{MA} = \vec{a}_{MA}^n + \vec{a}_{MA}^\tau.$$

Рис. 2 17.

3. Кинематика твердого тела (продолжение)

3.2.3 Определение ускорений точек плоской фигуры (продолжение).



Пример

$$\overline{v_o} = 1 \text{ м/с}, \quad \overline{a_o} = 3 \text{ м/с}^2, \quad r = 0,5 \text{ м}.$$

Найти ускорения точек 1,2,3,4.

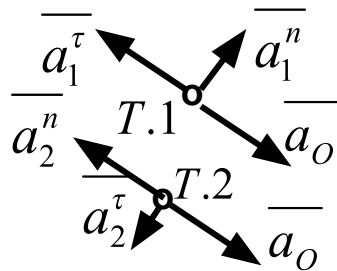
Решение

$$\text{Т.1 – м.ц.с. } \omega = \frac{v_o}{r} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ с}^{-1}, \quad \varepsilon = \frac{a_o}{r} = \frac{3}{0,5} = 6 \text{ с}^{-2}.$$

Примем за полюс т.О, тогда

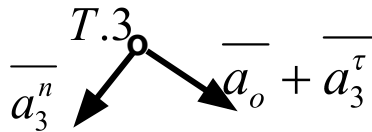
$$\overline{a_{io}^n} = \omega^2 r = 2 \text{ м/с}^2. \quad \overline{a_{io}^\tau} = \varepsilon r = 3 \text{ м/с}^2.$$

$$\overline{a_i} = \overline{a_o} + \overline{a_{io}^n} + \overline{a_{io}^\tau}, \text{ где}$$

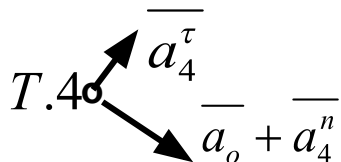


$$a_1 = \sqrt{(a_o - a_1^\tau)^2 + (a_1^n)^2} = a_1^n = 2 \text{ м/с}^2.$$

$$a_2 = \sqrt{(a_o - a_2^n)^2 + (a_2^\tau)^2} = \sqrt{(3 - 2)^2 + 3^2} = 3,16 \text{ м/с}^2.$$



$$a_3 = \sqrt{(a_o - a_3^\tau)^2 + (a_3^n)^2} = 6,32 \text{ м/с}^2.$$



$$a_4 = \sqrt{(a_o + a_4^n)^2 + (a_4^\tau)^2} = 5,83 \text{ м/с}^2.$$

3. Кинематика твердого тела (продолжение)

3.2. Плоскопараллельное движение твердого тела (продолжение).

3.2.4. Теорема о проекциях скоростей двух точек тела. *Проекции скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки, равны.*

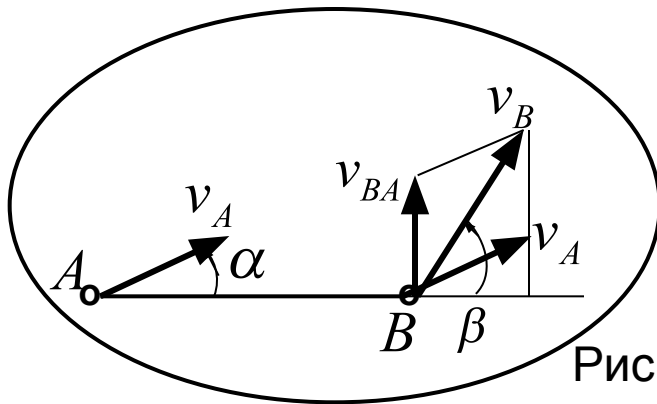
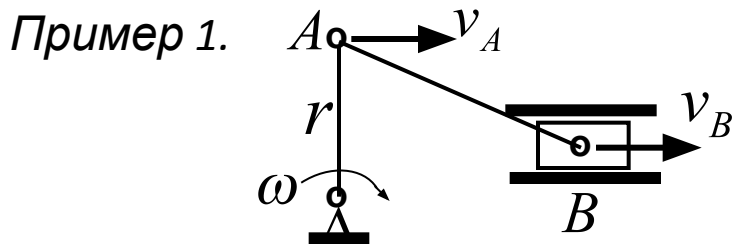


Рис.2.18.

Поскольку $v_{BA} \perp AB$, то

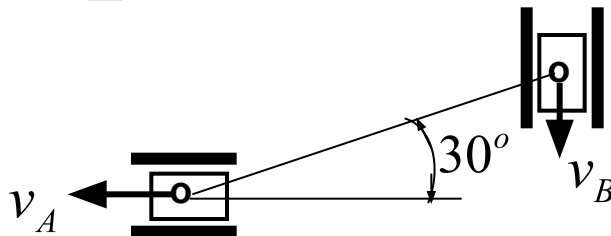
$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta.$$



Дано: ω , r . Найти v_B .

$$v_B = v_A = \omega r.$$

Пример 2.



Известно v_A , найти v_B .

$$v_A \cos 30^\circ = v_B \cos 60^\circ \Rightarrow v_B = v_A \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ}.$$