

Геометричні перетворення

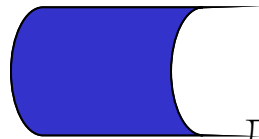
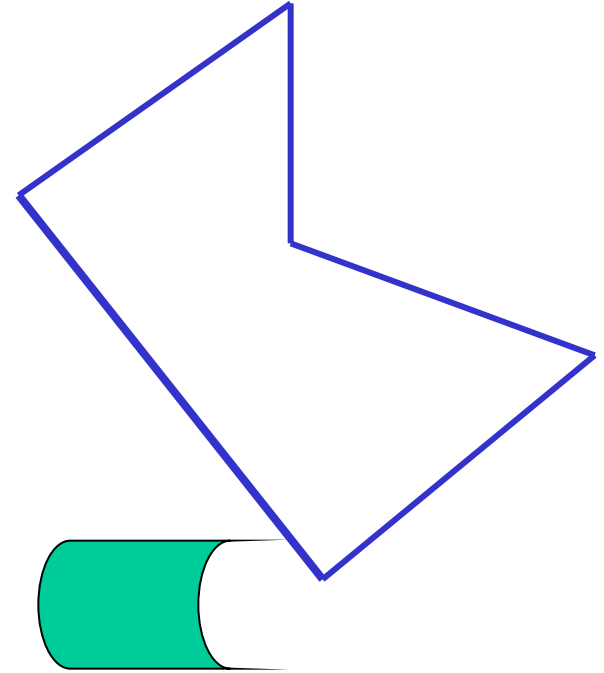
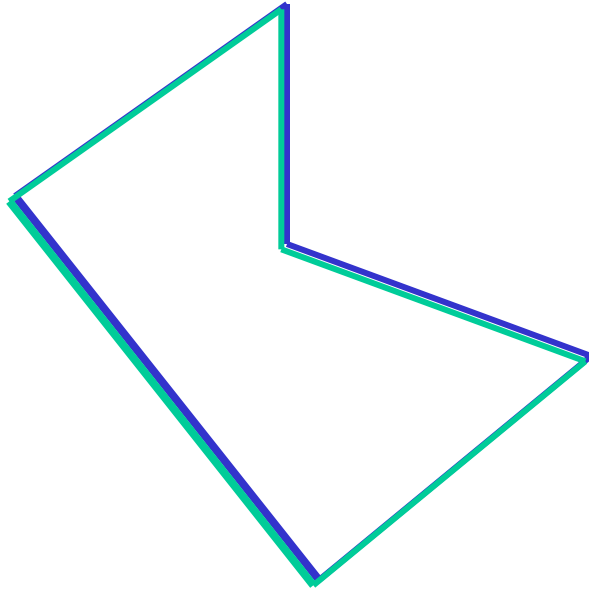


Геометрія є прообразом краси світу (Й.Кеплер)

Переміщенням (або **рухом**) називається перетворення фігури, внаслідок якого зберігаються відстані між точками даної фігури.

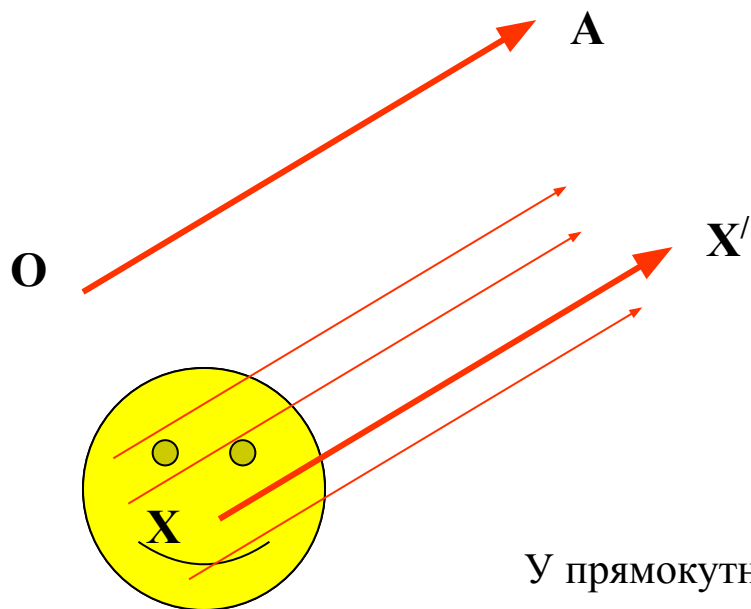
Властивості переміщення:

- ✓ два послідовні переміщення знову дають переміщення;
- ✓ перетворення, обернене до переміщення також є переміщення;
- ✓ внаслідок переміщення точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і порядок їх взаємного розміщення зберігається;
- ✓ при переміщенні прямі переходять у прямі, промені – в промені, відрізки – у відрізки;
- ✓ внаслідок переміщення зберігаються кути між променями.



Дві фігури називаються **рівними**, якщо вони суміщаються переміщенням

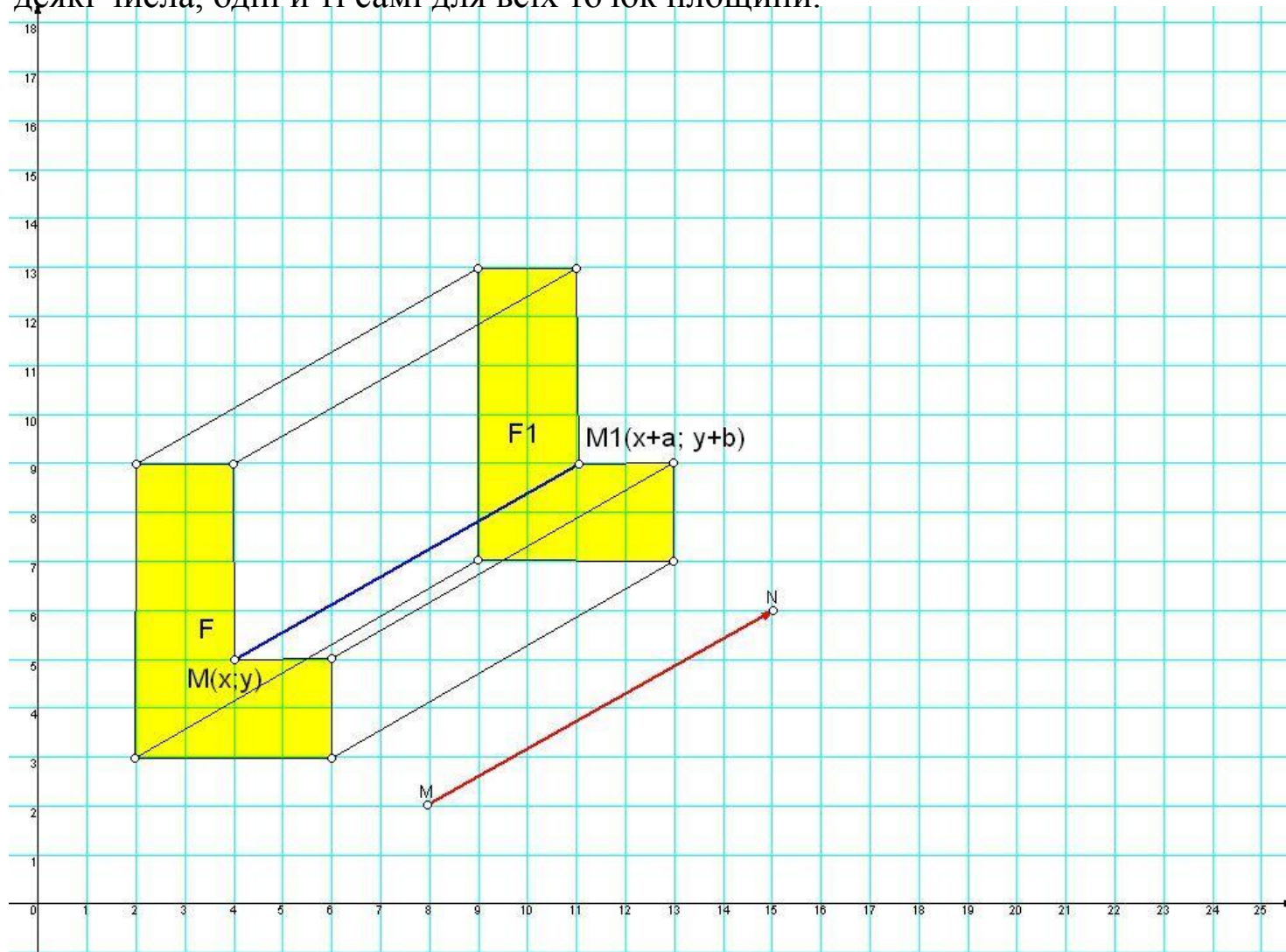
Паралельним перенесенням фігури F у напрямі променя OA на відстань a називається таке перетворення фігури F у фігуру F' , внаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F' так, що промені XX' і OA співнапрямлені і $XX' = a$



У прямокутній системі координат **паралельне перенесення**, яке переводить точку $(x; y)$ в точку $(x_1; y_1)$, задається формулами $x_1 = x + a$; $y_1 = y + b$, де a і b – деякі числа, одні й ті самі для всіх точок площини.

Основна властивість паралельного перенесення:
паралельне перенесення є переміщенням

У прямокутній системі координат **паралельне перенесення**, яке переводить точку $(x;y)$ в точку $(x_1; y_1)$, задається формулами $x_1=x+a$; $y_1=y+b$, де a і b – деякі числа, одні й ті самі для всіх точок площини.

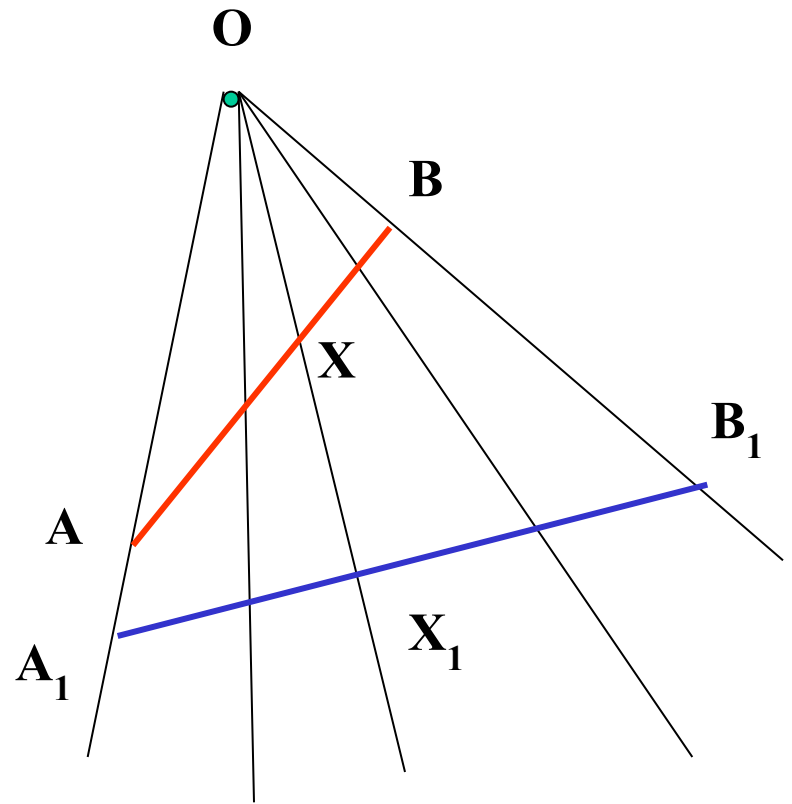
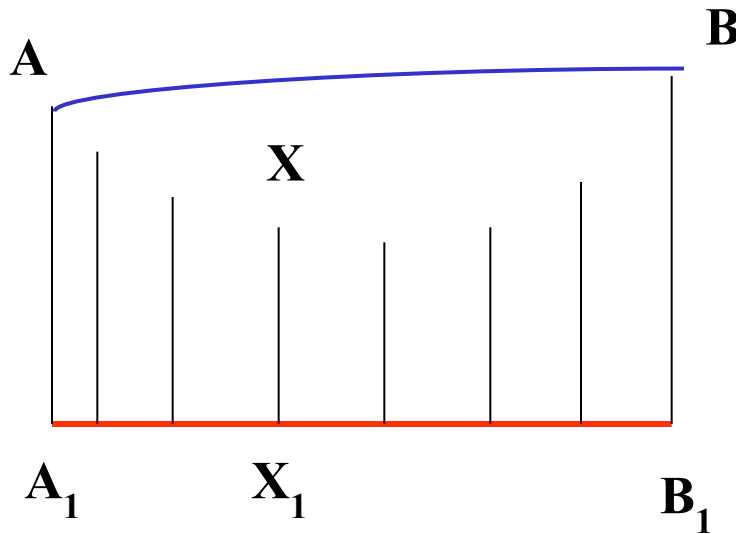


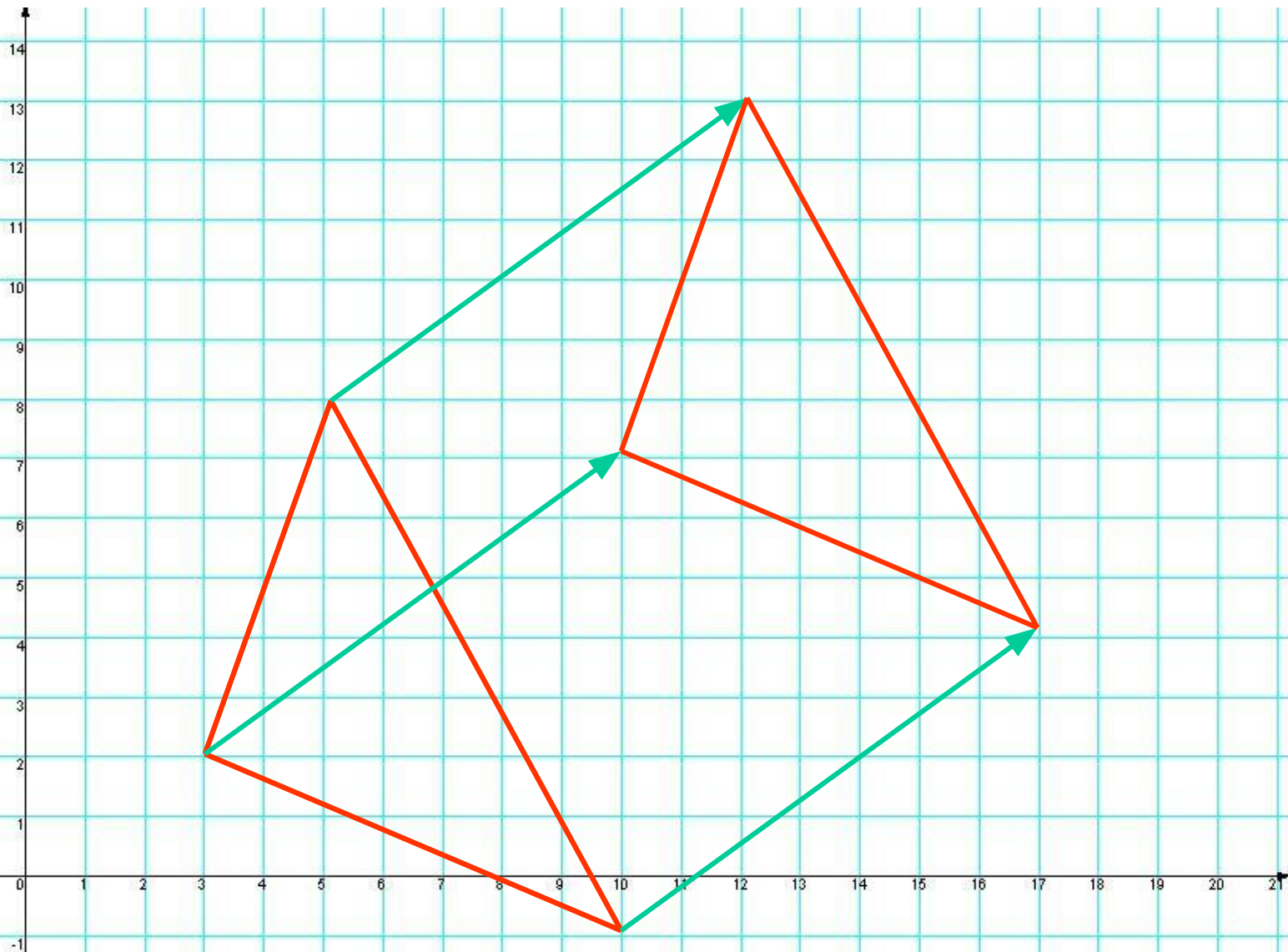
Основна властивість паралельного перенесення: паралельне перенесення є переміщенням

Перетворенням фігури F у фігуру F' називається така відповідність, при якій:

- 1) кожній точці фігури F відповідає єдина точка фігури F' ;
- 2) кожній точці фігури F' відповідає деяка точка фігури F ;
- 3) різним точкам фігури F відповідають різні точки фігури F' .

Фігура F' називається образом фігури F для даного перетворення.

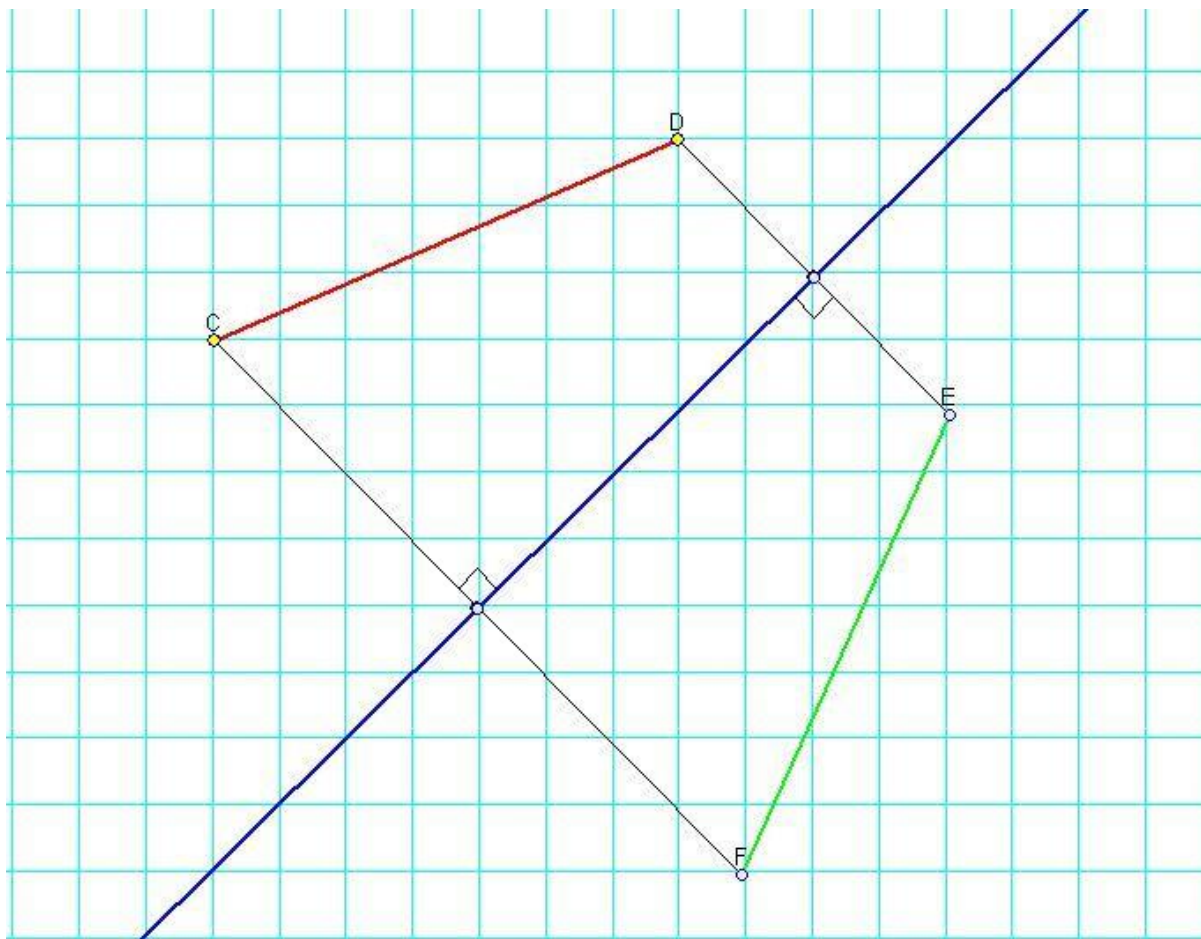




При паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну пряму (або в себе); промінь переходить у співнаправлений промінь.

При паралельному перенесенні точки переміщуються вздовж паралельних прямих (або однієї прямої) на ту саму відстань

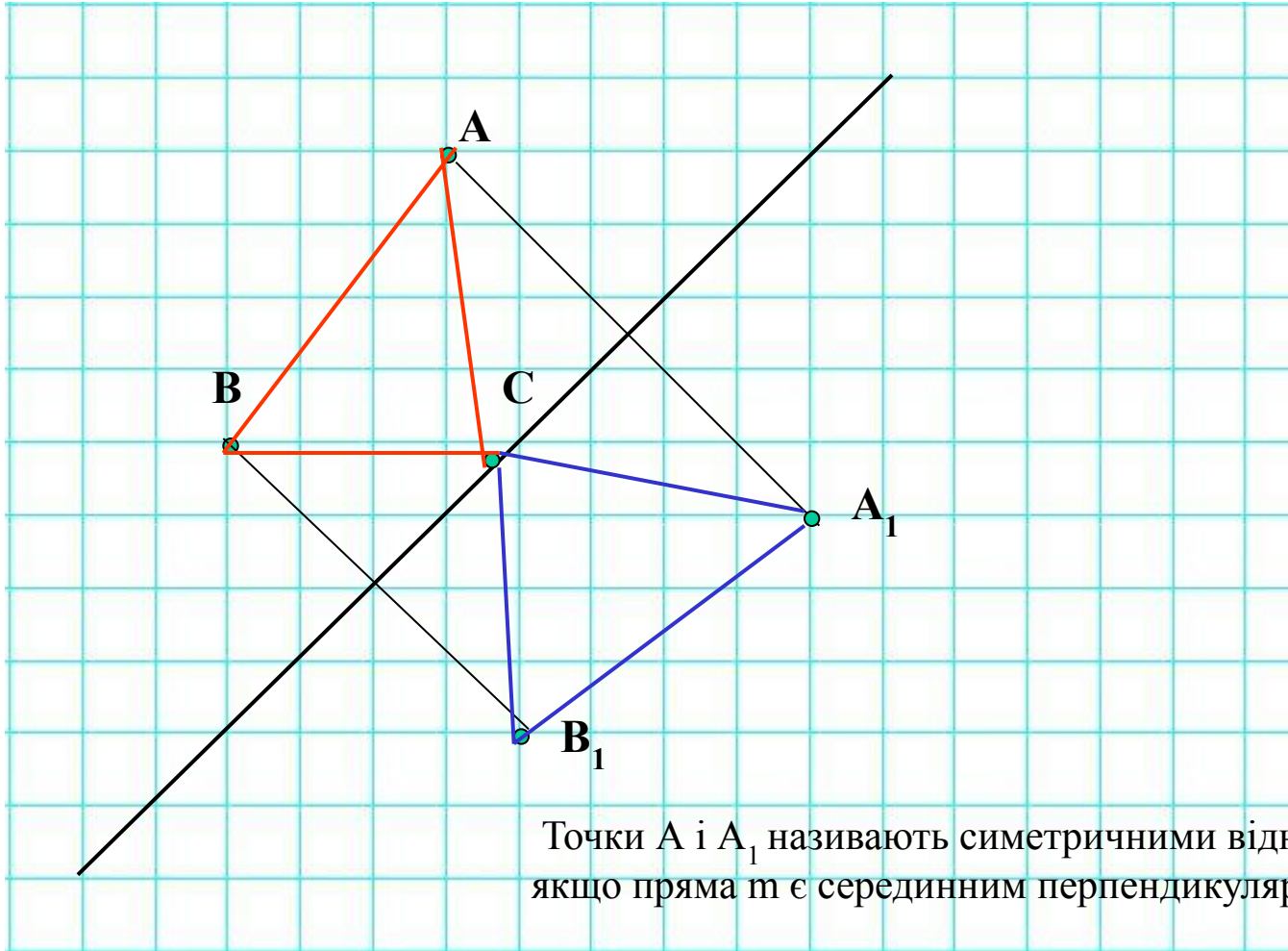
Перетворенням симетрії (осьовою симетрією) відносно прямої m називають таке перетворення фігури F у фігуру F_1 , внаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1 , симетричну X відносно прямої m .



Основна властивість осьової симетрії:
Осьова симетрія є переміщенням

Осьова симетрія перетворює пряму на пряму; відрізок - на відрізок; багатокутник на рівний йому багатокутник.

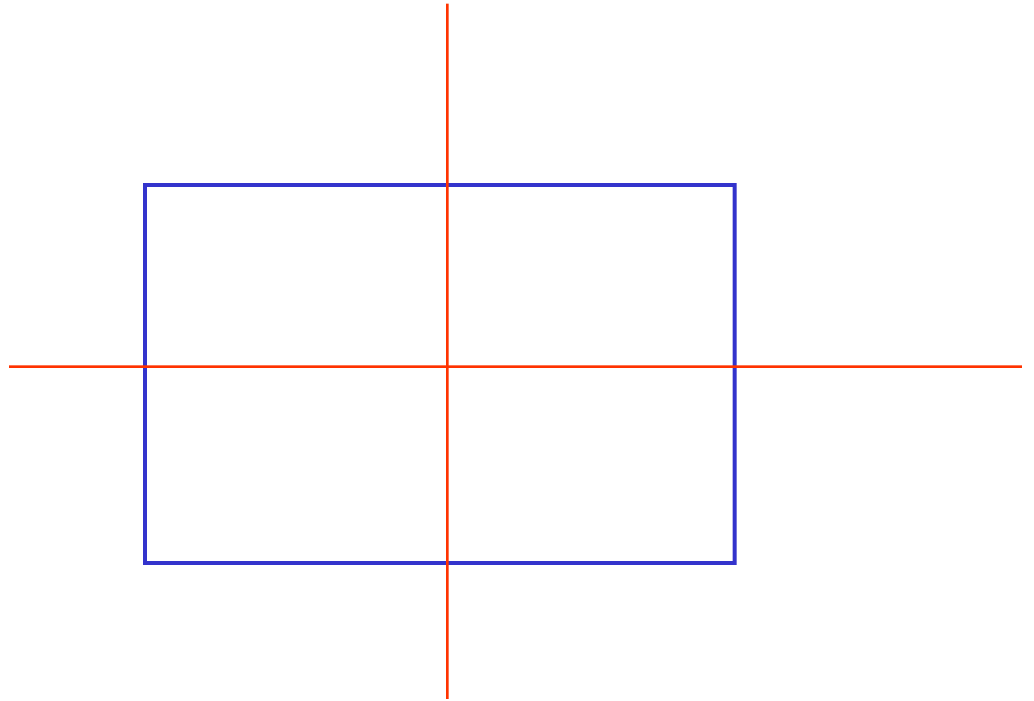
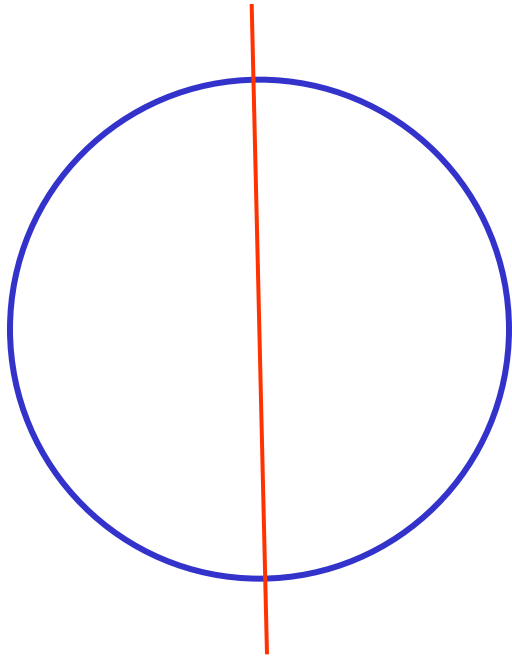
Точки, що належать осі симетрії, відображаються самі на себе.



Основна властивість осьової симетрії:

Осьова симетрія є переміщенням

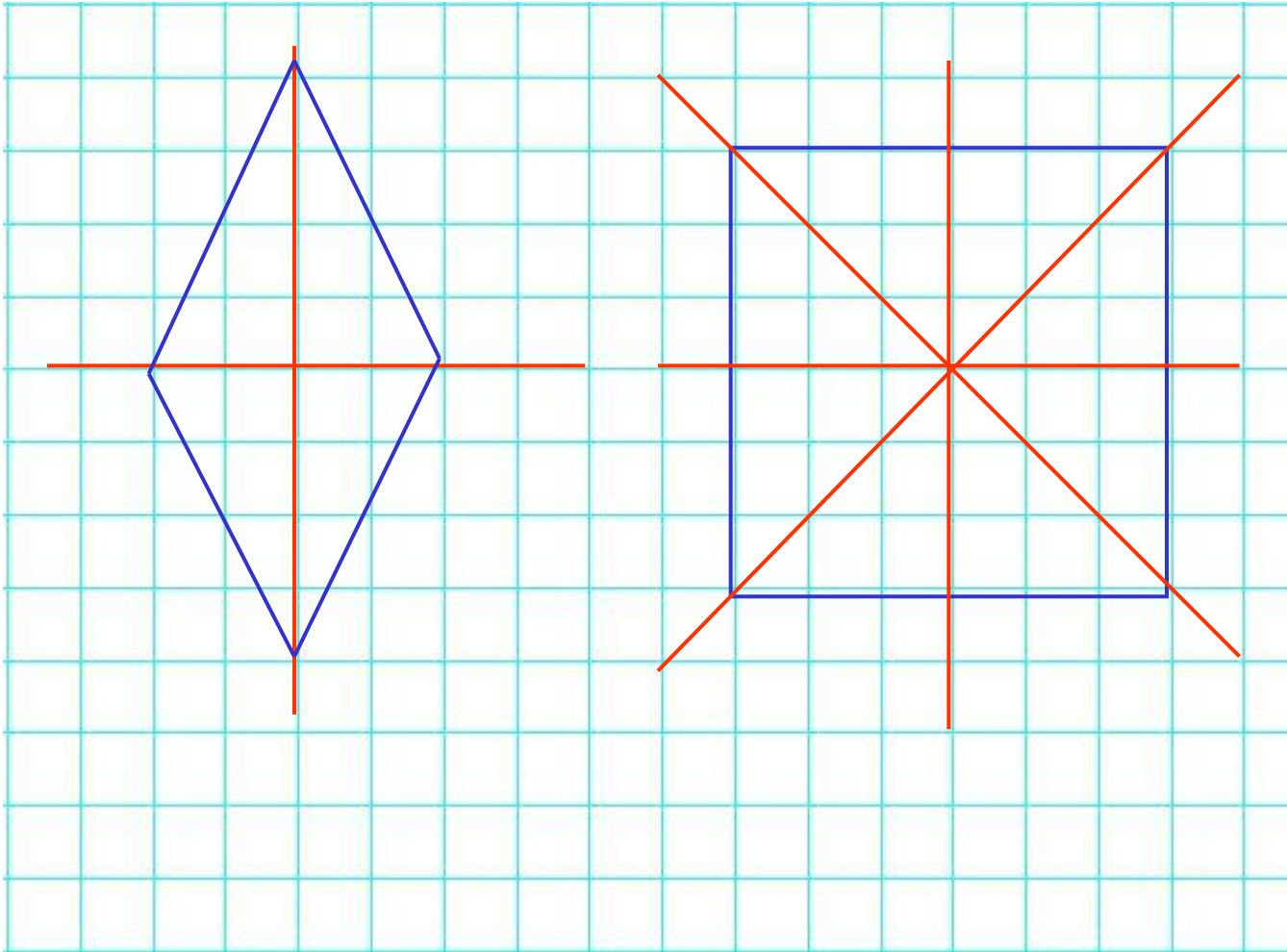
Якщо перетворення симетрії відносно прямої m переводить фігуру F у себе, то така фігура називається симетричною відносно прямої m , а сама пряма m – віссю симетрії фігури F .



Скільки осей симетрії має коло?

Скільки осей симетрії має прямокутник?

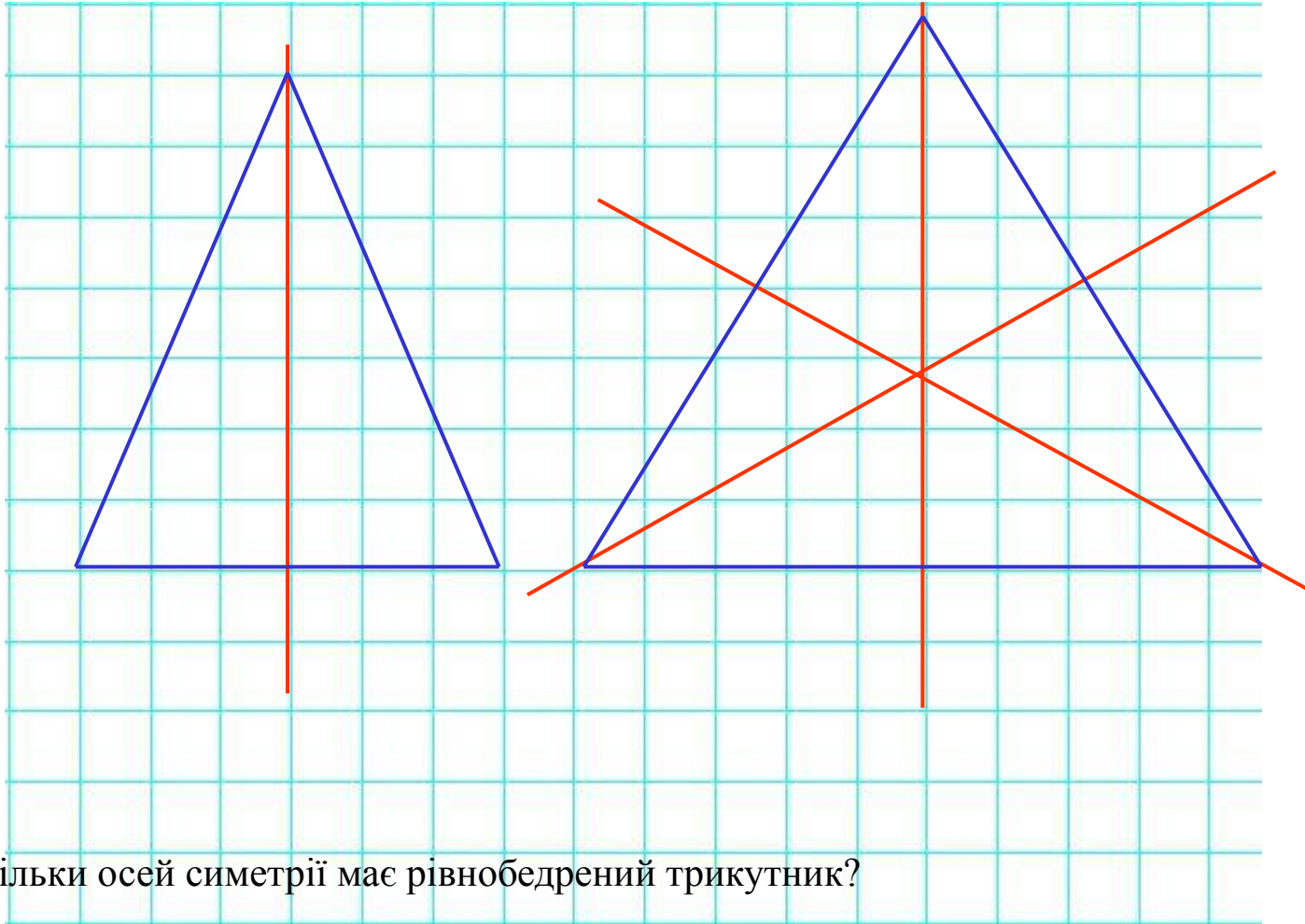
Якщо перетворення симетрії відносно прямої m переводить фігуру F у себе, то така фігура називається симетричною відносно прямої m , а сама пряма m – віссю симетрії фігури F .



Скільки осей симетрії має ромб?

Скільки осей симетрії має квадрат?

Якщо перетворення симетрії відносно прямої m переводить фігуру F у себе, то така фігура називається симетричною відносно прямої m , а сама пряма m – віссю симетрії фігури F .

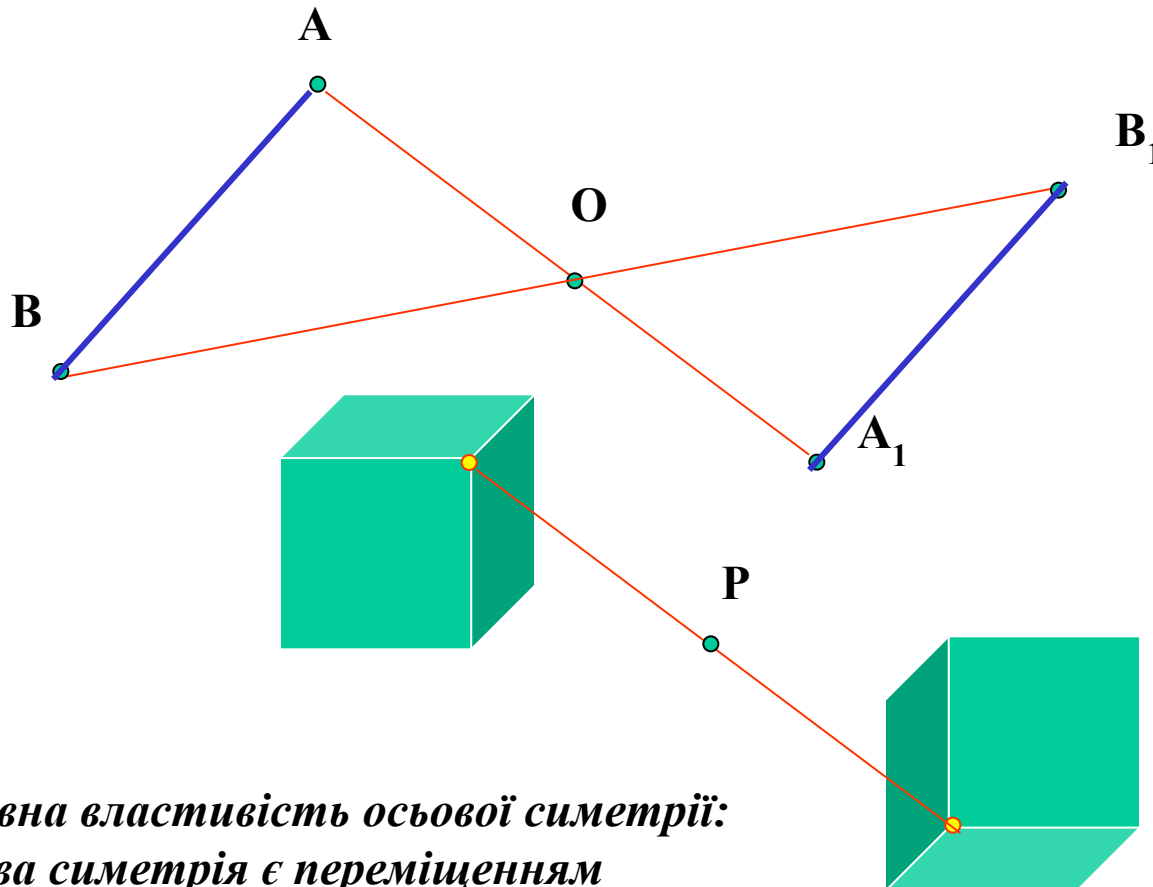


Скільки осей симетрії має рівнобедрений трикутник?

Скільки осей симетрії має рівносторонній трикутник?

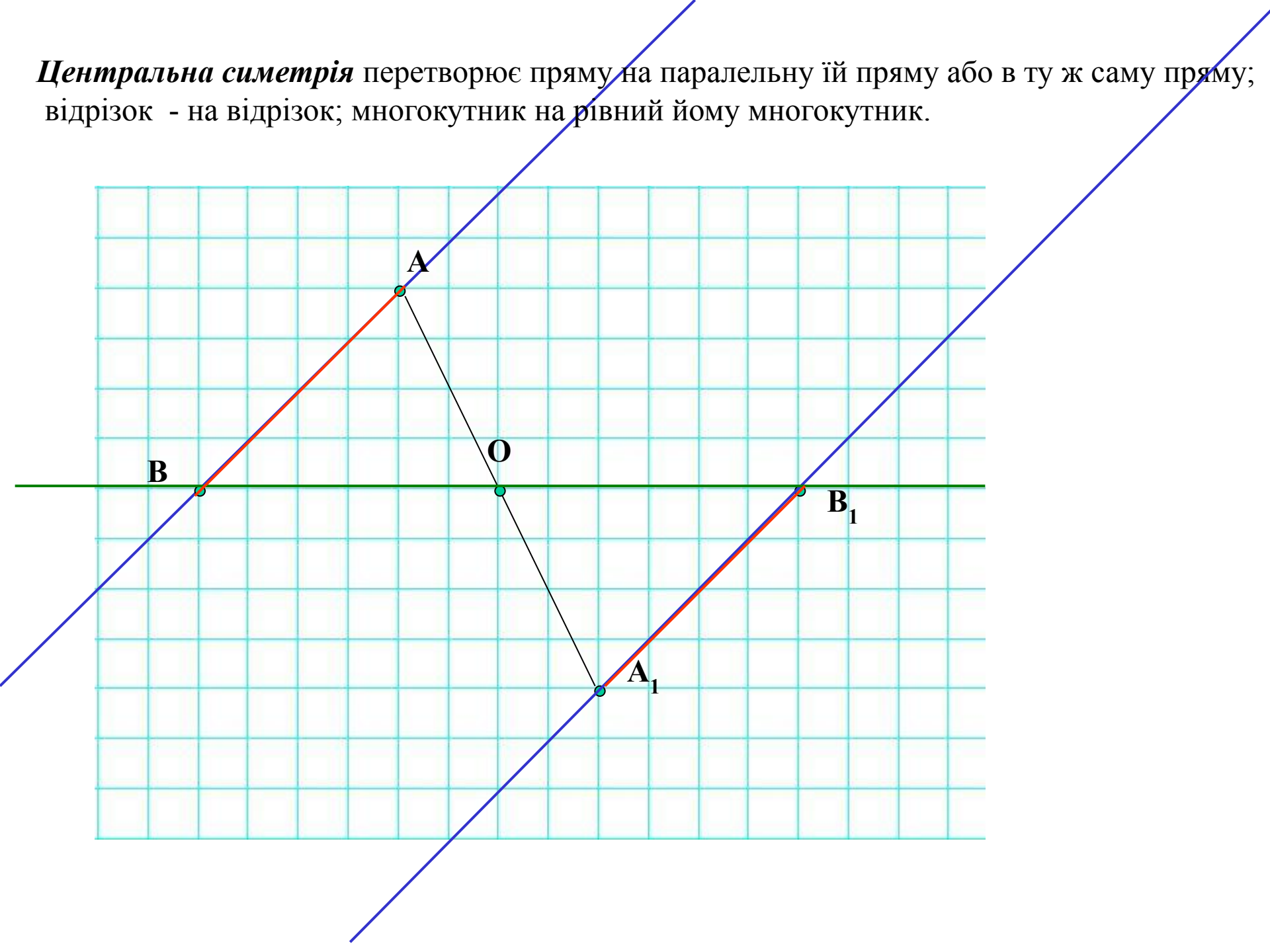
Точки A і A_1 називають *симетричними відносно точки O* , якщо точка O є серединою відрізка AA_1 .

Перетворенням симетрії (центральною симетрією) відносно точки O називається таке перетворення фігури F у фігуру F_1 , внаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1 , симетричну X відносно точки O .



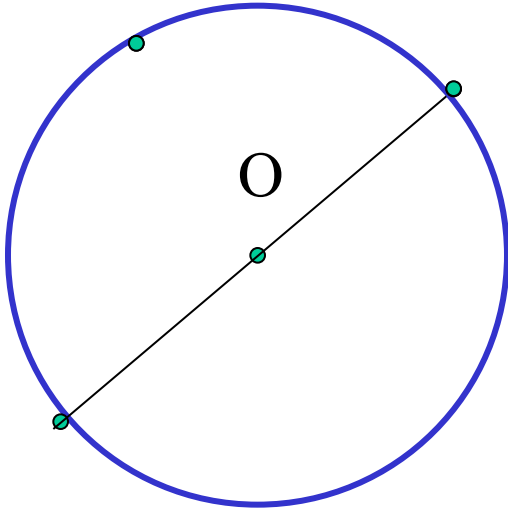
*Основна властивість осьової симетрії:
Осьова симетрія є переміщенням*

Центральна симетрія перетворює пряму на паралельну їй пряму або в ту ж саму пряму;
відрізок - на відрізок; многокутник на рівний йому многокутник.

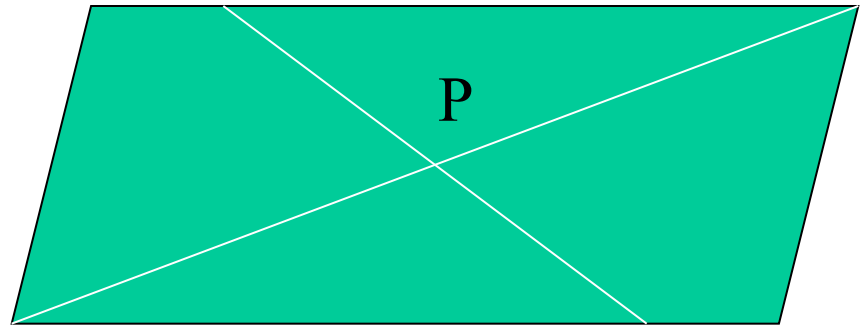


Фігуру називають *симетричною відносно точки* O , якщо для кожної точки даної фігури точка, симетрична їй відносно точки O , також належить цій фігурі.

Якщо перетворення симетрії відносно точки O переводить фігуру F у себе, то така фігура називається *центрально-симетричною*, а точка O – центром симетрії фігури F .



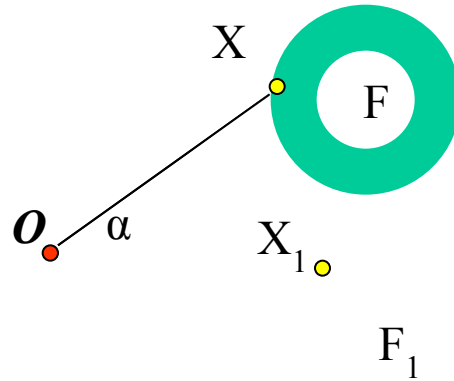
Центр кола є його центром симетрії



Точка перетину діагоналей паралелограма є його центром симетрії

Поворотом фігури F **навколо точки** O **на кут** α називається перетворення фігури F у фігуру F_1 , внаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1 так, що $OX_1 = OX$ і $\angle XOX_1 = \alpha$.

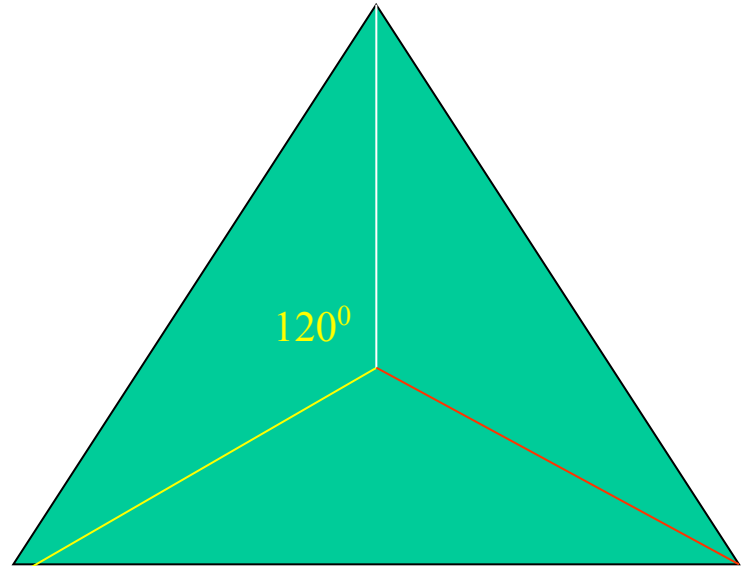
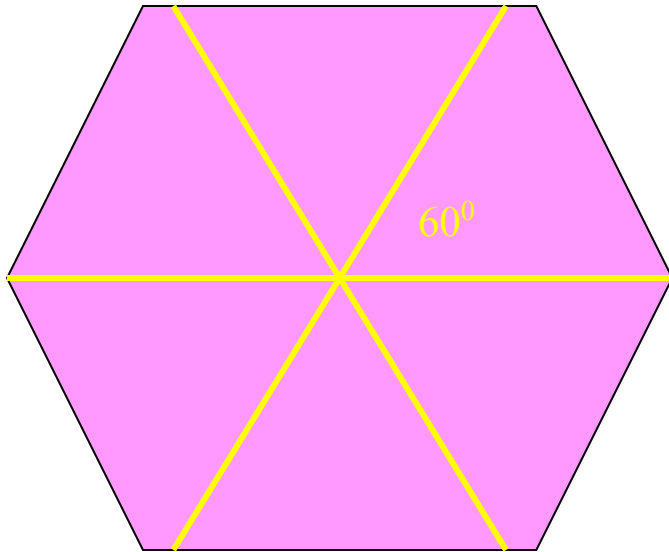
Точку O називають центром повороту, а кут α – кутом повороту.



Основна властивість повороту: поворот є переміщенням.

Тобто якщо фігура F_1 – образ фігури F при повороті, то $F = F_1$

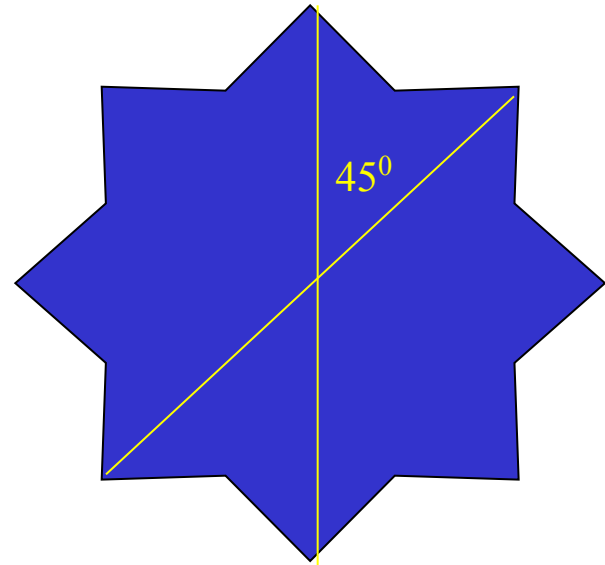
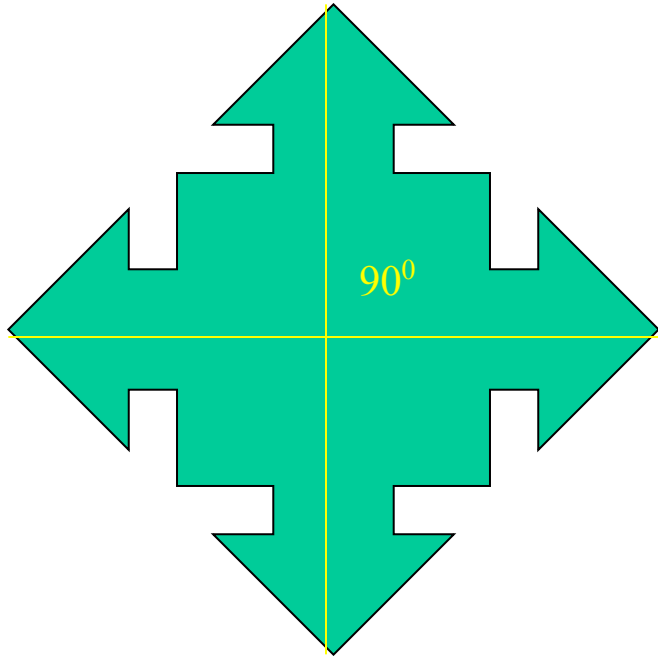
Якщо внаслідок повороту навколо деякої точки O фігура F переходить у себе, то кажуть, що ця фігура має *поворотну симетрію* (або *симетрію обертання*).



Правильний шестикутник переходить у себе при поворотах на кути кратні 60°

Правильний трикутник переходить у себе при поворотах на кути кратні 120°

Якщо внаслідок повороту навколо деякої точки O фігура F переходить у себе, то кажуть, що ця фігура має *поворотну симетрію* (або *симетрію обертання*).

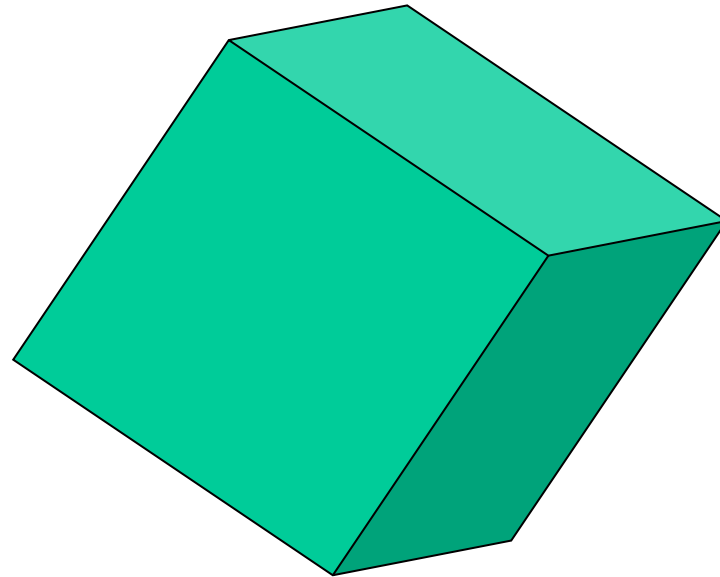
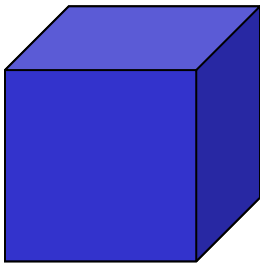


Фігура, що має дві осі симетрії, переходить у себе при поворотах на кути кратні 90°

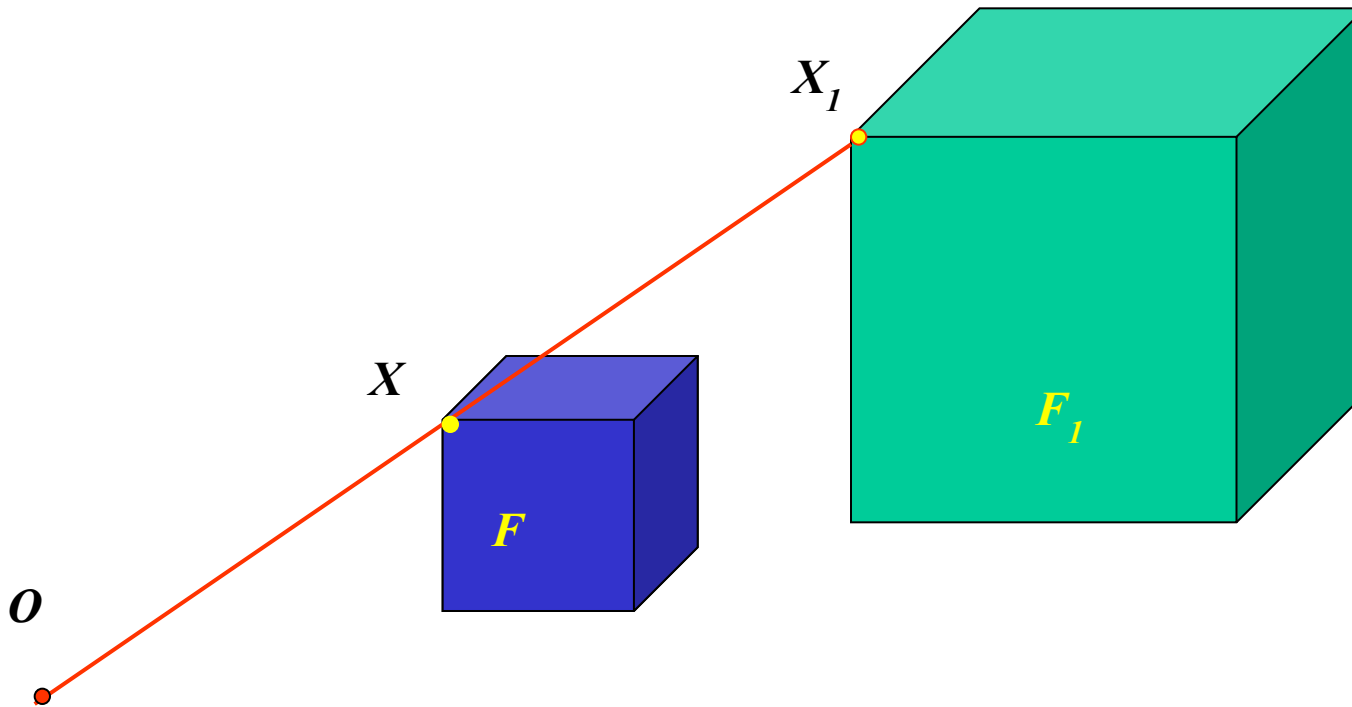
Фігура переходить сама в себе при поворотах на кути кратні 45°

Перетворенням подібності (подібністю) називається таке перетворення фігури F у фігуру F_1 , внаслідок якого відстані між точками змінюються в тому самому відношенні k ($k > 0$). Число $k > 0$ називають **коефіцієнтом подібності**.

Дві фігури називаються **подібними**, якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності.



Гомотетією з центром O називається таке перетворення фігури F у фігуру F_1 , внаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1 так, що точка X_1 лежить на промені OX і $OX_1 = kOX$ (k – фіксоване додатне число). Відстані між точками змінюються в тому самому відношенні k ($k > 0$). Число $k > 0$ називають **коефіцієнтом гомотетії**, а самі фігури F і F_1 – гомотетичними

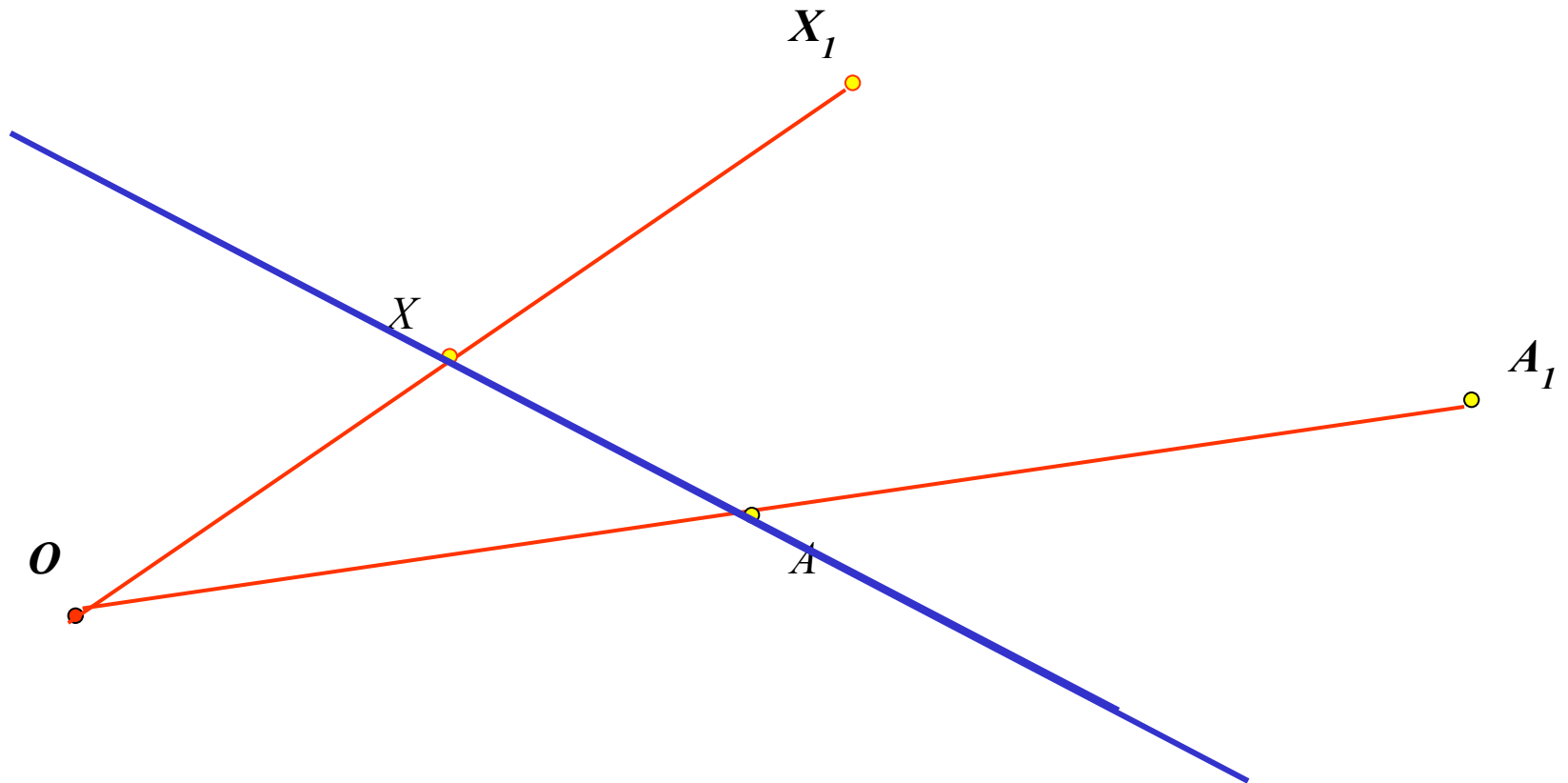


Основна властивість гомотетії: гомотетія є перетворенням подібності.

При гомотетії:

□ образом прямої є пряма;

□ образом відрізка є відрізок;

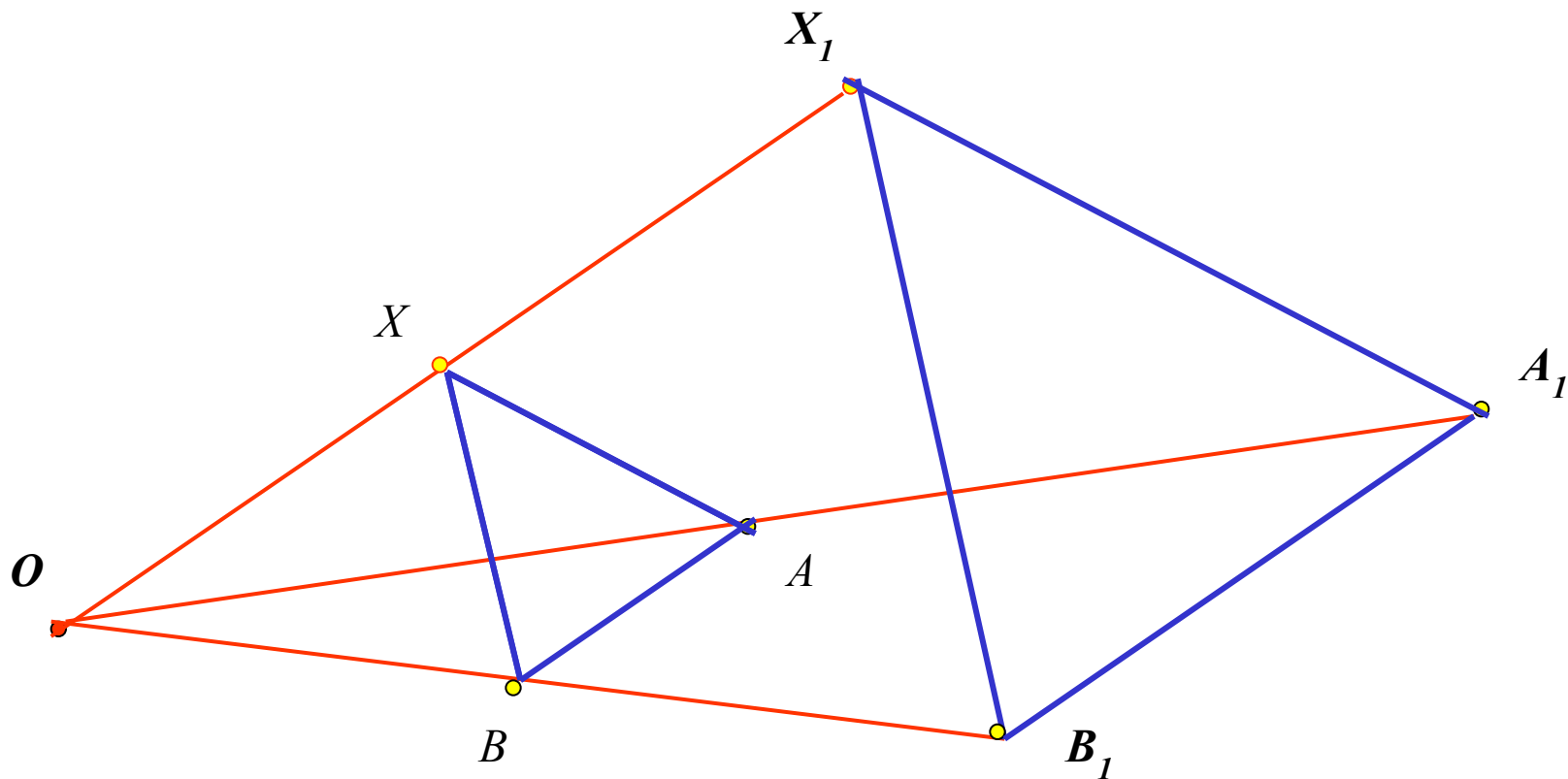


При гомотетії:

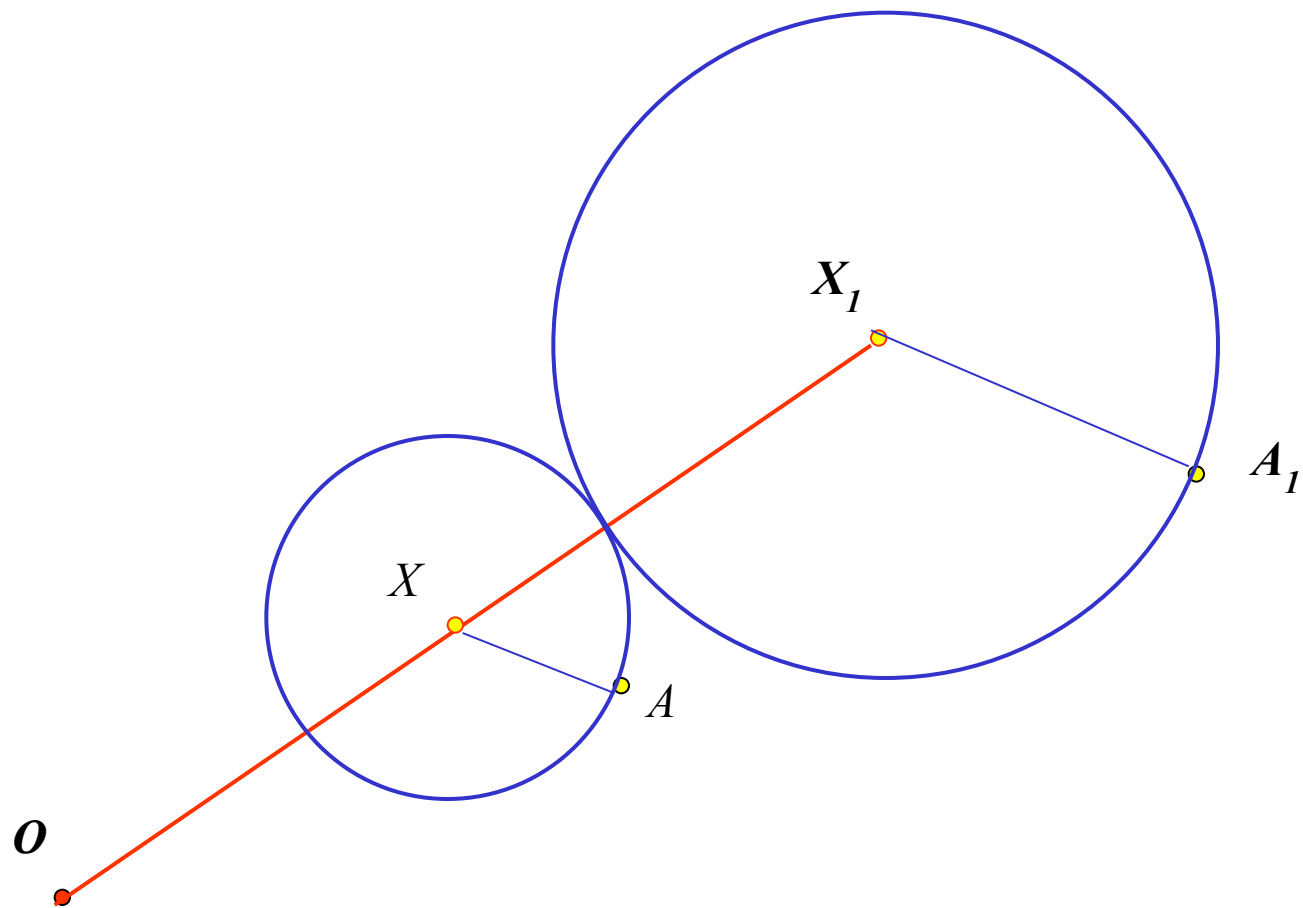
□ Образом кута є кут, який дорівнює даному;

□ Образом трикутника є трикутник, подібний даному;

□ Площа многокутника змінюється в k^2 разів, де k – коефіцієнт гомотетії.



При гомотетії образом кола є коло



Дві фігури називаються подібними, якщо одну з них можна отримати з іншої в результаті композиції двох перетворень: гомотетії і руху

Гомотетія – окремий випадок перетворення подібності

Подібність = гомотетія + рух

