



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

Часть 1

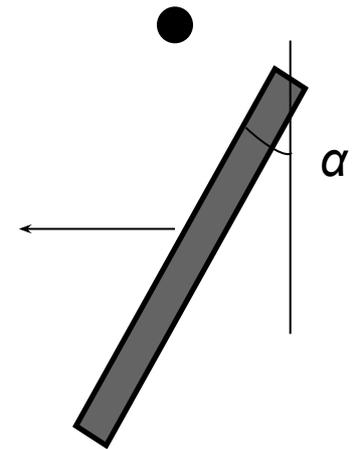
Рабчук Людмила Васильевна

доцент кафедры физики УГАТУ

доцент кафедры физики, математики и информатики ИРО РБ

Задача 1

Массивная плита движется горизонтально со скоростью 5 м/с. Шарик, летящий вертикально, после упругого удара о плиту отскакивает горизонтально в направлении движения плиты (см рис.). Поверхность плиты наклонена к вертикали под углом α , тангенс которого равен 0,4. Найти скорость шарика перед ударом.



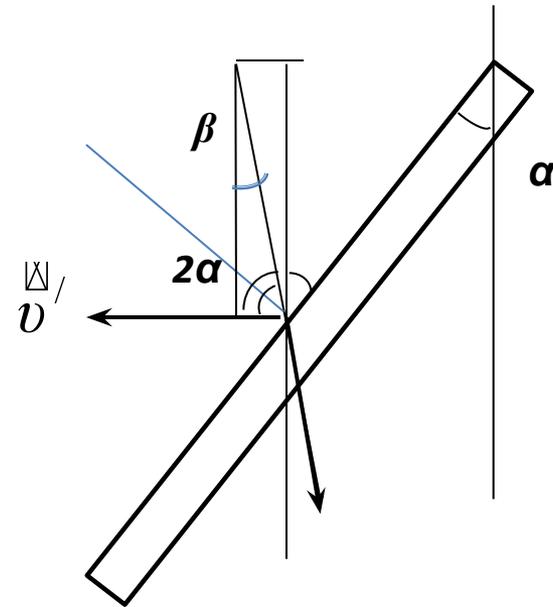
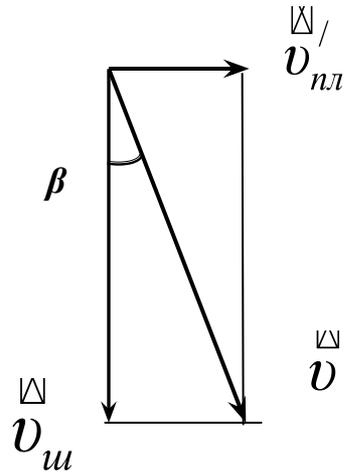
(физтех, заочная олимпиада, 2016 г.)

Дано:

$$v_{пл} = 5 \text{ м/с}$$

$$\text{tg } \alpha = 0,4$$

$$v_{ш} = ?$$



Выберем систему отсчета, связанную с плитой.

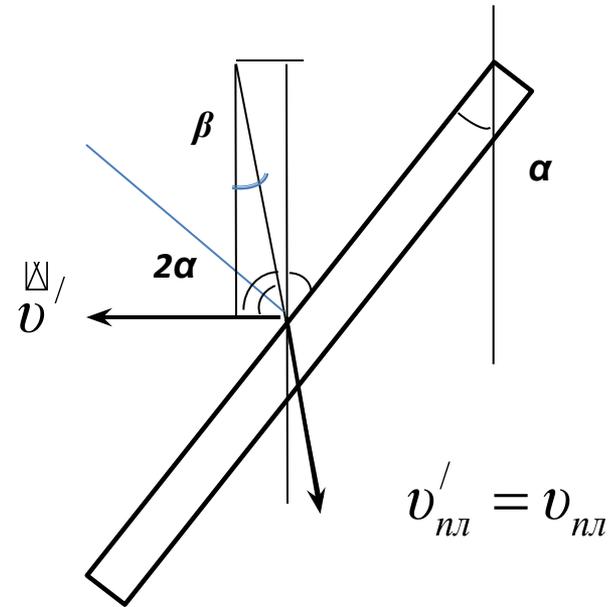
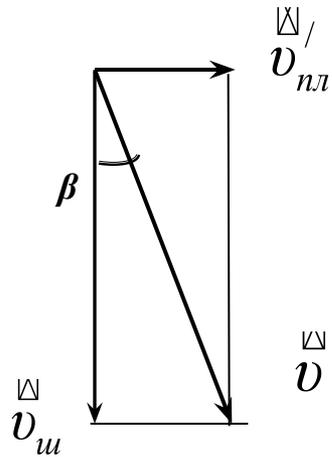
$$v = v_{ш} + v_{пл}$$

$v_{ш}$ - скорость шарика относительно земли в момент удара о плиту

$v_{пл}$ - скорость шарика относительно плиты

v - скорость шарика относительно плиты после удара

v - скорость шарика относительно плиты до удара



$$\beta = 90^\circ - 2\alpha$$

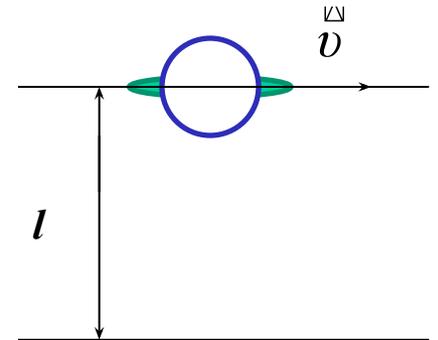
$$\frac{v_u}{v_{nл}'} = \text{ctg}\beta = \text{tg}2\alpha$$

$$v_u = v_{nл} \cdot \text{tg}2\alpha = v_{nл} \cdot \frac{2\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha} = 5 \cdot \frac{2 \cdot 0,4}{1 - 0,4^2} = 4,76 \text{ м/с}$$

Ответ: $v_u = 4,76 \text{ м/с}$

Задача 2

Вертолет летит горизонтально со скоростью $v = 50$ м/с ниже вершины высокого обрыва на расстоянии $l = 200$ м от него, двигаясь параллельно обрыву (см. рисунок, вид сверху). В некоторый момент пилот вертолета производит одиночный выстрел из пушки. Через какое время после выстрела пилот услышит эхо? Скорость звука в воздухе $c = 340$ м/с.



(Всероссийская аэрокосмическая олимпиада, 2011 г.)

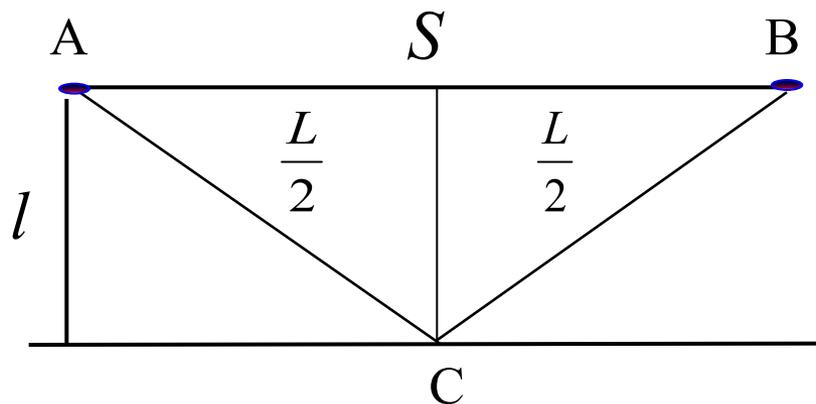
Дано:

$$v = 50 \text{ м/с}$$

$$l = 200 \text{ м}$$

$$c = 340 \text{ м/с}$$

$$t - ?$$



t – время от момента выстрела до момента, когда пилот услышит выстрел

S – расстояние, пролетаемое вертолетом за время *t*

L – расстояние, проходимое волной за время *t*

$$S = v \cdot t \quad (1)$$

$$L = |AC| + |CB| = c \cdot t \quad (2)$$

$$|AC| = |CB|$$

AC – расстояние, проходимое волной от вертолета до края обрыва

CB – расстояние, проходимое волной от края обрыва до вертолета

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{S}{2}\right)^2 + l^2$$

(3)

$$\left[\begin{array}{l} S = v \cdot t \\ \sqrt{S^2 + 4l^2} = c \cdot t \end{array} \right.$$

$$\sqrt{v^2 \cdot t^2 + 4l^2} = c \cdot t \quad v^2 \cdot t^2 + 4l^2 = c^2 \cdot t^2$$

$$t = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2 \cdot 200}{\sqrt{340^2 - 50^2}} = 1,2c$$

Ответ: $t = 1,2 \text{ с}$

Задача 3

Два мячика брошены одновременно из разных точек, расположенных на одной вертикали: мячик, расположенный выше, брошен вертикально вниз с начальной скоростью $v_1 = 2$ м/с, а мячик, расположенный ниже, брошен вертикально вверх с начальной скоростью $v_2 = 7$ м/с. Мячики сталкиваются, пролетев до столкновения (не меняя направления движения) одинаковые расстояния. Определите расстояние между мячиками в момент начала движения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

(Всероссийская аэрокосмическая олимпиада, 2014 г.)

Дано:

$$v_1 = 2 \text{ м/с}$$

$$v_2 = 7 \text{ м/с}$$

$H = ?$

Мячик, брошенный вниз, до встречи со вторым мячом пролетает

$$S_1 = v_1 \cdot t + \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Мячик, брошенный вверх, до встречи с мячом, брошенным вниз, проходит

$$S_2 = v_2 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

По условию :

$$S_1 = S_2 = S$$

$$v_1 \cdot t + \frac{g \cdot t^2}{2} = v_2 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$t = \frac{v_2 - v_1}{g} = \frac{7 - 2}{10} = 0,5 \text{ с}$$

$$H = 2S = 2\left(v_1 \cdot t + \frac{g \cdot t^2}{2}\right) = 2\left(2 \cdot 0,5 + \frac{10 \cdot 0,5^2}{2}\right) = 4,5 \text{ м}$$

Ответ: $H = 4,5 \text{ м}$

Задача 4

В момент времени $t = 0$ с с поверхности земли и с высоты $h = 5$ м одновременно бросили два шарика из пластилина: первый вертикально вверх с начальной скоростью $v_1 = 4$ м/с, а второй горизонтально с начальной скоростью $v_2 = 10$ м/с. Через какое время шарики окажутся на одной высоте? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с².

(Всероссийская аэрокосмическая олимпиада, 2014 г.)

Дано:

$$h = 5 \text{ м}$$

$$v_1 = 4 \text{ м/с}$$

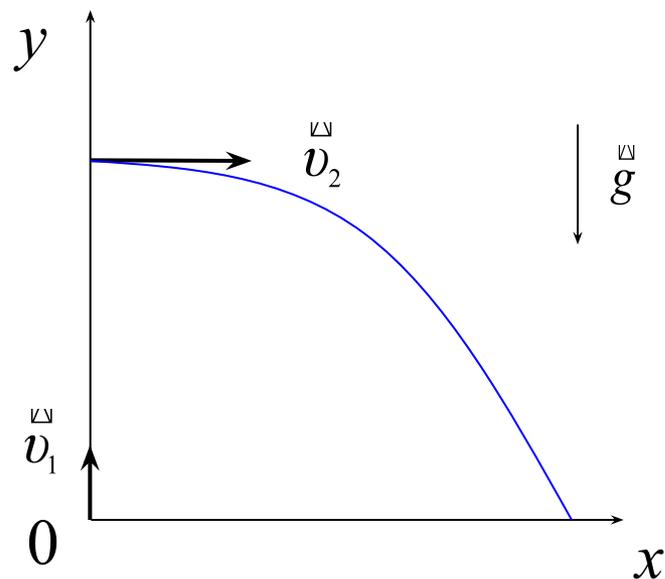
$$v_2 = 10 \text{ м/с}$$

$$t - ?$$

$$y_1 = v_1 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$x_2 = v_2 \cdot t$$

$$y_2 = h - \frac{g \cdot t^2}{2}$$



$$y_1 = y_2 \quad v_1 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = h - \frac{g \cdot t^2}{2} \quad t = \frac{h}{v_1} = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ с} \quad ???$$

$$y_1 = y_2 = v_1 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = 4 \cdot 1,25 - \frac{10 \cdot 1,25^2}{2} = -1,25 \text{ м}$$

Вывод: шарики могут быть на одной высоте только на земле

$$y_1 = 0 = v_1 \cdot t_1 - \frac{g \cdot t_1^2}{2}$$

$$t_1 = \frac{2v_1}{g} = \frac{2 \cdot 4}{10} = 0,8 \text{ с}$$

$$y_2 = 0 = h - \frac{g \cdot t_2^2}{2}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{10}} = 1 \text{ с}$$

Первым на земле окажется шарик, брошенный вертикально, вторым – шарик, брошенный горизонтально. \implies Через 1 с оба шарика будут иметь координату по оси ОУ, равную нулю.

Ответ: $t = 1 \text{ с}$

Задача 5

Колобок, спасаясь от гибели, катился в $n = 2$ раза быстрее, чем бежал за ним хромой волк, при этом расстояние между ними увеличивалось со скоростью $\Delta v = 0,628$ м/с. Бедный колобок каждую секунду утыкался носом в землю. Ему повезло, тропинка была не скользкая. Какого диаметра колобок испекла бабушка?

(Всероссийская аэрокосмическая олимпиада, 2013 г.)

Дано:

$$n = 2$$

$$v_{\text{вращ}} = n v_{\text{в}}$$

$$\Delta v = 0,628 \text{ м/с}$$

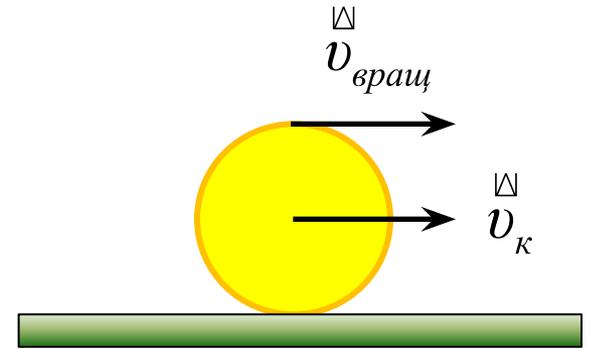
$D - ?$

$v_{\text{вращ}}$ - линейная скорость точек на поверхности колесика относительно его центра

$v_{\text{к}}$ - скорость центра колесика

$$v_{\text{вращ}} = v_{\text{к}}$$

$$v_{\text{к}} = n v_{\text{в}}$$



$$\Delta v = v_{\text{к}} - v_{\text{в}} = v_{\text{к}} - \frac{v_{\text{к}}}{n} = v_{\text{к}} \frac{n-1}{n}$$

$$v_{\text{вращ}} = v_{\text{к}} = \Delta v \frac{n}{n-1}$$

$$\Delta t = 1\text{с}$$

$$\Delta S = v_{\text{вращ}} \Delta t$$

- путь, проходимый колбком

$$\Delta S = \pi \cdot D$$

$$\pi \cdot D = \Delta v \frac{n}{n-1} \Delta t$$

$$D = \Delta v \frac{n}{\pi(n-1)} \Delta t = 0,628 \frac{2}{\pi(2-1)} 1 = 0,4\text{м} = 40\text{см}$$

Ответ: $D = 40 \text{ см}$

Задача 6

Внутри вертикальной цилиндрической трубы с внутренним радиусом $R = 18$ см находится маленький шарик. Шарик толкнули от основания трубы по ее внутренней поверхности, сообщив начальную скорость $v_0 = 10$ м/с, направленную под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Сколько полных оборотов сделает шарик внутри трубы, прежде чем опустится на первоначальный уровень? Трением, размерами шарика и сопротивлением воздуха пренебречь.

(Всероссийская аэрокосмическая олимпиада, 2012 г.)

Дано:

$$R = 0,18 \text{ м}$$

$$v_0 = 10 \text{ м/с}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$N_{\text{полных}} - ?$$

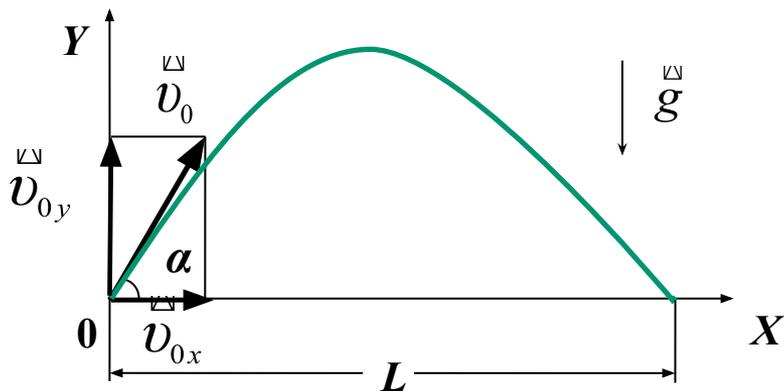
Рассмотрим движение шарика, брошенного со скоростью v_0 с земли под углом α к горизонту.

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$$

$$y = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

В момент удара о землю:

$$0 = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot \tau - \frac{g\tau^2}{2}$$



$$\tau = \frac{2v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

$$L = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot \tau = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

При движении шарика внутри трубы его траектория представляет собой «закрученную» спираль с изменяющимся шагом.

L - расстояние, пройденное шариком за время движения в горизонтальной плоскости

l - расстояние, проходимое в горизонтальной плоскости за каждый оборот шарик

N - число оборотов шарика внутри трубы за время опускания на первоначальный уровень

$$l = 2\pi \cdot R$$

$$N = \frac{L}{l} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g \cdot 2\pi \cdot R} = \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 10 \cdot 6,28 \cdot 0,18} \approx 7,661$$

Ответ: $N_{\text{полных}} = 7$

Задача 7

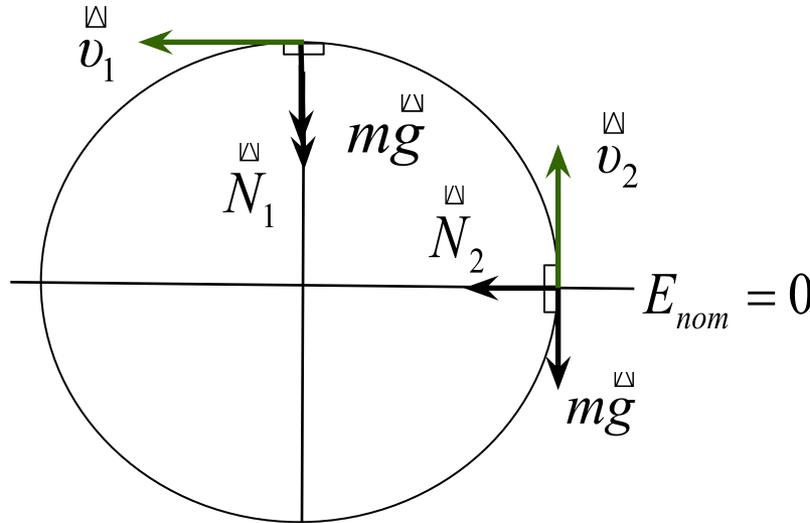
Планер описывает петлю Нестерова (окружность в вертикальной плоскости). При этом в верхней точке петли пилот прижимается к сиденью с силой, равной силе тяжести. Чему равен коэффициент перегрузки (отношение веса пилота к силе тяжести) в момент, когда скорость планера направлена вертикально? Силой сопротивления воздуха пренебречь.

(Всероссийская аэрокосмическая олимпиада, 2013 г.)

Дано:

$$P_1 = mg$$

$$k = \frac{P_2}{mg} \quad - ?$$



$$\frac{mv_1^2}{R} = N_1 + mg = 2mg$$

$$mv_1^2 = 2mgR$$

$$\frac{mv_2^2}{R} = N_2$$

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgR = \frac{mv_2^2}{2}$$

$$\frac{2mgR}{2} + mgR = 2mgR = \frac{mv_2^2}{2}$$

$$v_2^2 = 4gR$$

$$N_2 = \frac{mv_2^2}{R} = \frac{m4gR}{R} = 4mg$$

$$k = \frac{P_2}{mg} = \frac{N_2}{mg} = \frac{4mg}{mg} = 4$$

Ответ: $k = 4$

Задача 8

Предположим, что планета Маленького принца имеет среднюю плотность в $n = 10$ раз большую средней плотности Земли. При каком минимальном радиусе планеты Маленький принц сможет двигаться по ней со скоростью $v = 0,6$ м/с, не рискуя превратиться в ее искусственный спутник? Радиус Земли $R_3 = 6370$ км.

(Всероссийская аэрокосмическая олимпиада, 2013 г.)

Дано:

$$n = 10$$

$$v = 0,6 \text{ м/с}$$

$$R_3 = R = 6370 \text{ км}$$

$$R_{пл} - ?$$

v_1 - первая космическая скорость на планете **???**

$$v < v_1$$

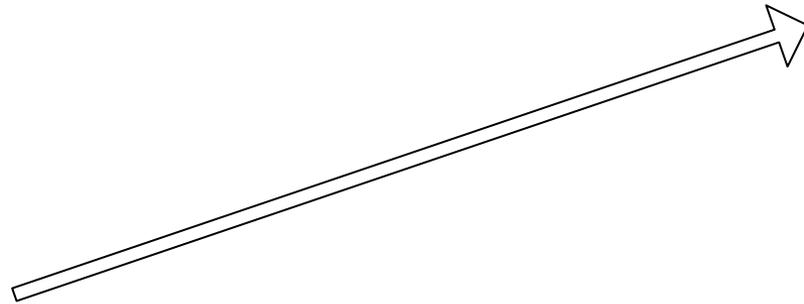
$$m \cdot \frac{v_1^2}{R_{пл}} = G \frac{m \cdot M_{пл}}{R_{пл}^2}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot M_{пл}}{R_{пл}}}$$

$$M_{пл} = \rho_{пл} \cdot V_{пл} = n\rho \cdot V_{пл} = n \cdot \frac{M}{V} V_{пл} = n \cdot \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi R_{пл}^3 = n \cdot M \left(\frac{R_{пл}}{R} \right)^3 \quad (1)$$

$$mg = G \frac{m \cdot M}{R^2}$$

$$M = \frac{gR^2}{G} \quad (2)$$



$$M_{nl} = n \cdot \frac{gR^2}{G} \left(\frac{R_{nl}}{R} \right)^3 = \frac{ngR_{nl}^3}{GR}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot M_{nl}}{R_{nl}}} = \sqrt{\frac{G}{R_{nl}} \cdot \frac{ngR_{nl}^3}{GR}} = \sqrt{\frac{ngR_{nl}^2}{R}}$$

$$v < v_1 \quad v < \sqrt{\frac{ngR_{nl}^2}{R}}$$

$$R_{nl} > v \sqrt{\frac{R}{ng}} \quad R_{\min} \approx v \sqrt{\frac{R}{ng}} = 0,6 \sqrt{\frac{6,37 \cdot 10^6}{10 \cdot 9,8}} \approx 153 \text{ м}$$

Ответ: $R_{\min} \approx 153 \text{ м}$

Задача 9

Тело находится на поверхности Земли на широте $\varphi = 60^\circ$. Во сколько раз вес тела в данном месте Земли отличается от веса этого же тела, находящегося на полюсе? Радиус Земли $R_3 = 6400$ км.

(Всероссийская аэрокосмическая олимпиада, 2013 г.)

Дано:

$$\varphi = 60^\circ$$

$$R = 6400 \text{ км}$$

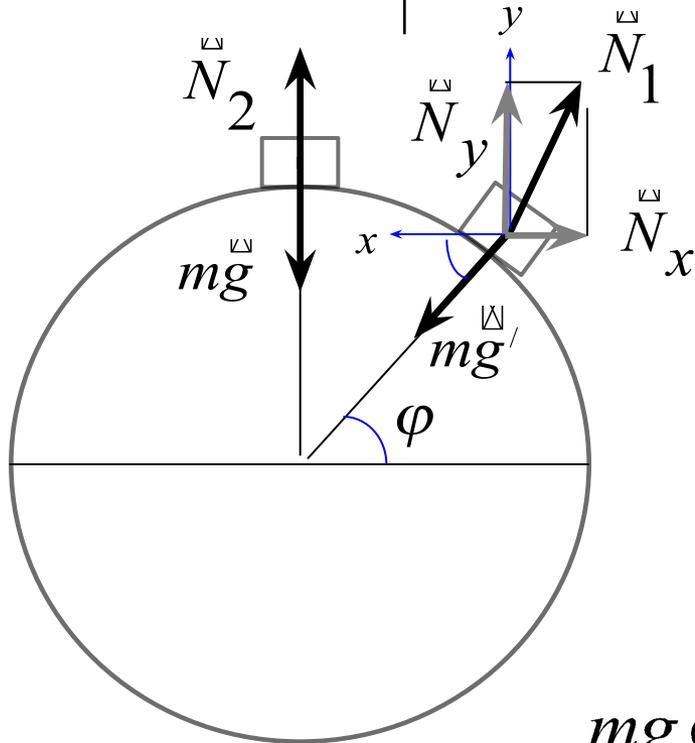
$$n = ?$$

P_1 – вес тела в данном месте Земли

P_2 – вес тела на полюсе

$$n = \frac{P_2}{P_1}$$

???



$$P_2 = N_2 = mg$$

$$P_1 = N_1 = \sqrt{N_x^2 + N_y^2}$$

$$N_y - mg \sin \varphi = 0$$

$$mg \cos \varphi - N_x = m \omega^2 r = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R \cos \varphi$$

$$N_x = mg \cos \varphi - m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R \cos \varphi = m \left(g \cos \varphi - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R \cos \varphi \right)$$

$$N_y = mg \sin \varphi$$

$$P_1 = \sqrt{m^2 \left(g \cos \varphi - \frac{4\pi^2}{T^2} R \cos \varphi \right)^2 + (mg \sin \varphi)^2}$$

$$P_1 = m \sqrt{\left(g \cos \varphi - \frac{4\pi^2}{T^2} R \cos \varphi \right)^2 + (g \sin \varphi)^2}$$

$$P_1 = mg \sqrt{\cos^2 \varphi \left(1 - \frac{4\pi^2}{gT^2} R\right)^2 + \sin^2 \varphi} = mg \sqrt{1 - \frac{8\pi^2}{gT^2} R \left(1 - \frac{2\pi^2}{gT^2} R\right) \cdot \cos^2 \varphi}$$

$$n = \frac{P_2}{P_1} = \frac{mg}{mg \sqrt{1 - \frac{8\pi^2}{gT^2} R \left(1 - \frac{2\pi^2}{gT^2} R\right) \cdot \cos^2 \varphi}} =$$

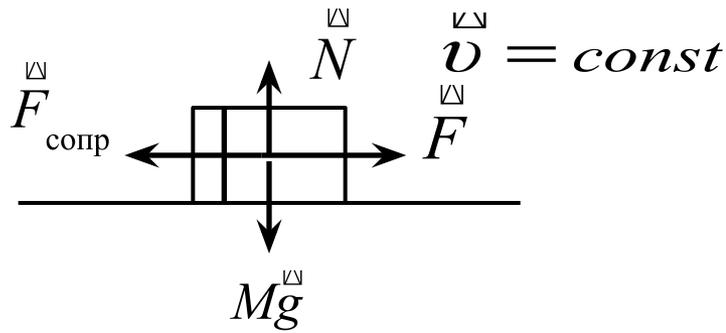
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{8\pi^2}{gT^2} R \left(1 - \frac{2\pi^2}{gT^2} R\right) \cdot \cos^2 \varphi}} \approx 1,00086$$

Ответ: $n \approx 1,00086$

Задача 10

Поезд массы $M = 500$ т шел равномерно по горизонтальному пути. От поезда отцепился последний вагон массы $m = 20$ т. В момент, когда вагон остановился, расстояние между ним и поездом было $S = 500$ м. Какой путь S_1 прошел до остановки вагон? Сопротивление движению пропорционально массе и не зависит от скорости поезда.

(Всероссийская аэрокосмическая олимпиада)

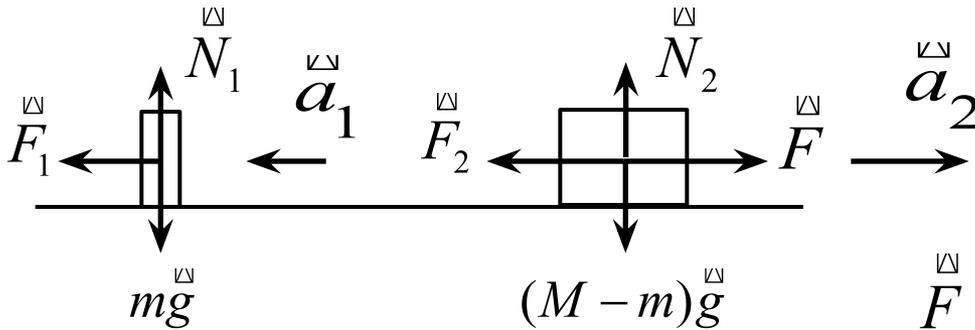


$$\vec{F} + M\vec{g} + \vec{F}_{\text{сопр}} + \vec{N} = 0$$

$$F - F_{\text{сопр}} = 0$$

$$F - kM = 0$$

$$F = kM$$



$$\vec{F}_1 + m\vec{g} + \vec{N}_1 = m\vec{a}_1$$

$$\vec{F} + (M - m)\vec{g} + \vec{F}_2 + \vec{N}_2 = (M - m)\vec{a}_2$$

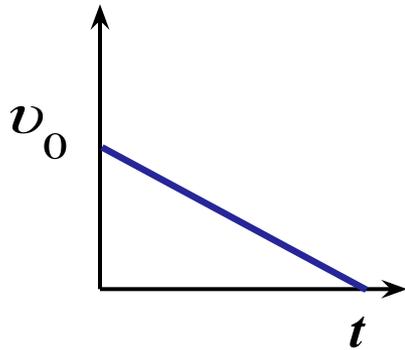
$$F_1 = km = ma_1$$

$$F - k(M - m) = (M - m)a_2$$

$$km = (M - m)a_2$$

$$a_2 = a_1 \frac{m}{M - m}$$

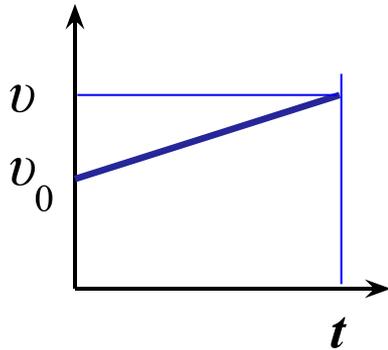
ВАГОН



$$S_1 = \frac{1}{2} v_0 t$$

$$t = t_{\text{ост}} = \frac{v_0}{a_1}$$

поезд
без
вагона



$$S_2 = \frac{v_0 + v}{2} t$$

$$v = v_0 + a_2 t = v_0 + a_2 \frac{v_0}{a_1} = v_0 \left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right) =$$

$$= v_0 \left(1 + \frac{m}{M - m}\right) = v_0 \frac{M}{M - m}$$

$$S_2 = \frac{v_0}{2} t + \frac{M v_0 t}{2(M - m)}$$

$$S = S_2 - S_1 = \frac{M v_0 t}{2(M - m)} = \frac{v_0 t}{2} \frac{M}{M - m} = S_1 \frac{M}{M - m}$$

$$S_1 = S \frac{M - m}{M} = 500 \frac{500 - 20}{500} = 480 \text{ м}$$

Ответ: $S_1 = 480 \text{ м}$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Футболист ударил по мячу, сообщив ему скорость v_0 под углом α к горизонту, и попал в нижний угол ворот. Если бы футболист ударил по мячу в том же месте поля и мяч полетел бы под тем же углом к горизонту, но со скоростью, на 5% большей скорости v_0 , то он попал бы в верхнюю штангу ворот. Найти скорость v_0 , если высота ворот $h = 2$ м, а угол $\alpha = 30^\circ$?

(Всероссийская аэрокосмическая олимпиада, 2013 г.)

Ответ: $v_0 \approx 21$ м/с

Задача 2. Лиса Алиса и кот Базилио, обгладывая курочку, бросали кости в кувшин, в котором сидел Буратино. Алиса и Базилио сидели на равных расстояниях от кувшина и бросали кости с одинаковой высоты, совпадающей с уровнем верхнего края кувшина. Хитрая Алиса затрачивала на бросок минимум энергии, а глуповатый Базилио тратил на бросок в $n = 2$ раза больше энергии, чем Алиса, но оба попадали в кувшин. Под каким углом к горизонту бросал кости Базилио? Сопротивление воздуха не учитывать.

(Всероссийская аэрокосмическая олимпиада, 2013 г.)

Ответ: $\alpha_{\text{Б}} = 15^\circ$ или $\alpha_{\text{Б}} = 75^\circ$

Задача 3. Орбитальная станция движется по круговой орбите радиусом $R = 2 R_3$, где $R_3 = 6370$ км – радиус Земли. Космонавт находится в открытом космосе. Оцените силу, действующую на страховочный трос, к которому пристегнут космонавт, полагая, что он некоторое время находится на максимальном удалении от Земли. Масса космонавта $m = 100$ кг много меньше массы станции, длина троса $l = 100$ м. Силой тяжести троса и гравитационным взаимодействием между станцией и космонавтом пренебречь.

(Всероссийская аэрокосмическая олимпиада, 2014 г.)

Ответ: $T = 5,7 \cdot 10^{-3}$ Н

Задача 4. Шар радиусом $R = 10$ см лежит на дне цилиндрического сосуда, заполненного раствором некоторой соли в воде. Уровень раствора совпадает с вершиной шара. Через некоторое время из-за испарения воды в растворе оказалась погруженной только половина объема шара. На сколько при этом изменилась сила давления шара на дно сосуда? Изменением объема воды, связанным с растворением в ней соли, пренебречь. При испарении воды соль не испаряется и не выпадает в осадок. Плотность чистой воды $\rho = 10^3$ кг/м³. *(Всероссийская аэрокосмическая олимпиада, 2015 г.)*

Ответ: $\Delta P = 20,5$ Н

Благодарю за внимание !

rabtchuk_ludmila@mail.ru