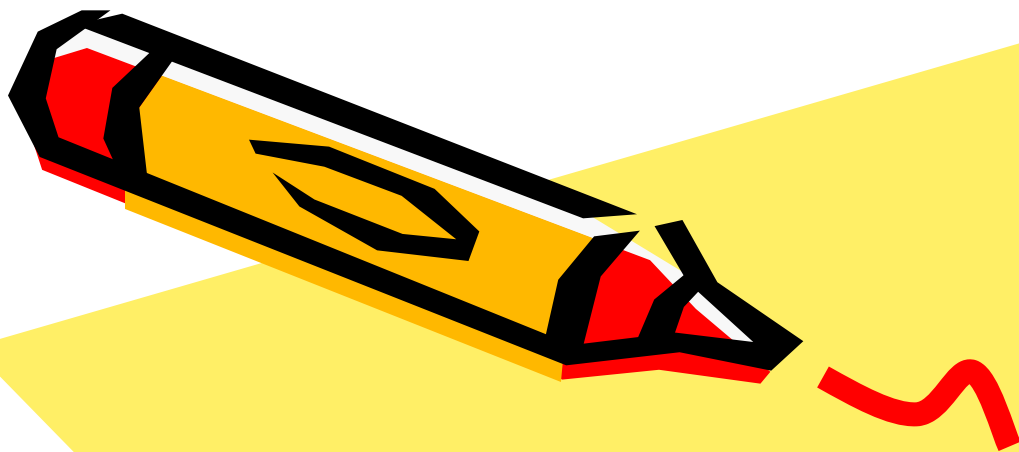
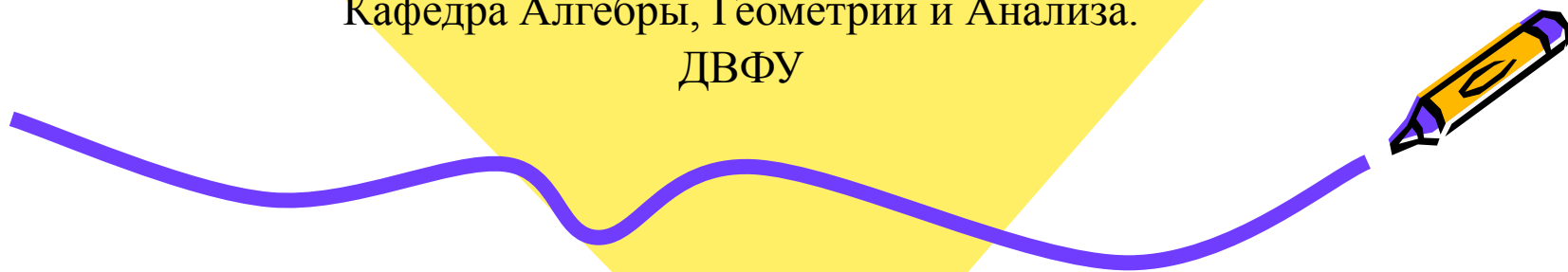




Комплексные числа.

Панарад А.Ю.
Кафедра Алгебры, Геометрии и Анализа.
ДВФУ



ПЛАН:

1. Основные понятия. Формы записи.
2. Действия над комплексными числами:
 - a) Сложение комплексных чисел;
 - b) Вычитание комплексных чисел;
 - c) Умножение комплексных чисел;
 - d) Деление комплексных чисел ;
 - e) Возведение в n -степень;
 - f) Извлечение корней из комплексных чисел.



Основные понятия.

Определение.

Комплексным числом Z называется
выражение вида $z = \alpha + \beta i$,

где α и β - действительные числа, а i - мнимая
единица, и $i^2 = -1$

Например, $Z_1 = 6+2i$ или $Z_2 = 1-5i$.

Число α называется действительной частью
комплексного числа и обозначается $\alpha = \operatorname{Re} z$,
а β - мнимой частью и обозначается $\beta = \operatorname{Im} z$.



Основные понятия.

Два комплексных числа называются равными тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

$$z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i;$$

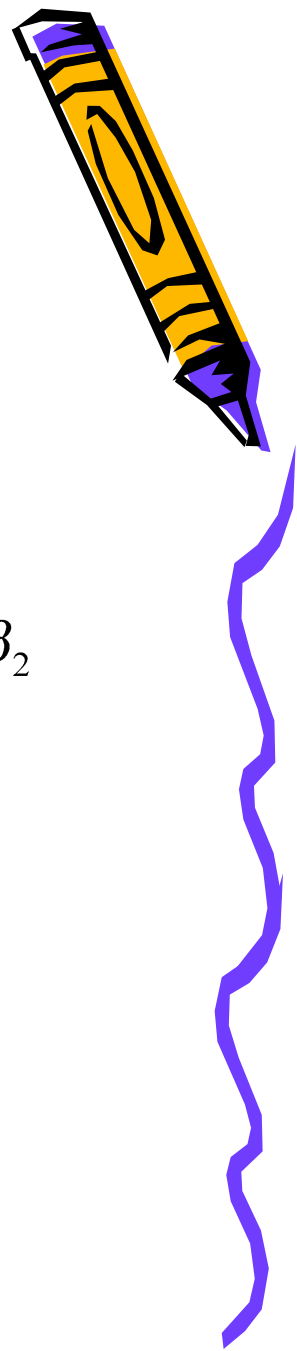
$$z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2; \beta_1 = \beta_2$$

Два комплексных числа, отличающихся лишь знаком мнимой части, называются комплексно-сопряженными.

$$z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$$

$$z_2 = \alpha_2 - \beta_2 i$$



Примеры.

Пример 1.

$$z_1 = 5 + 3i ;$$

$$z_2 = 25/5 + 15/5i$$

$$\alpha = 5 = 25/5$$

$$\beta = 3 = 15/5$$

$$\text{Вывод : } z_1 = z_2$$

Пример 2.

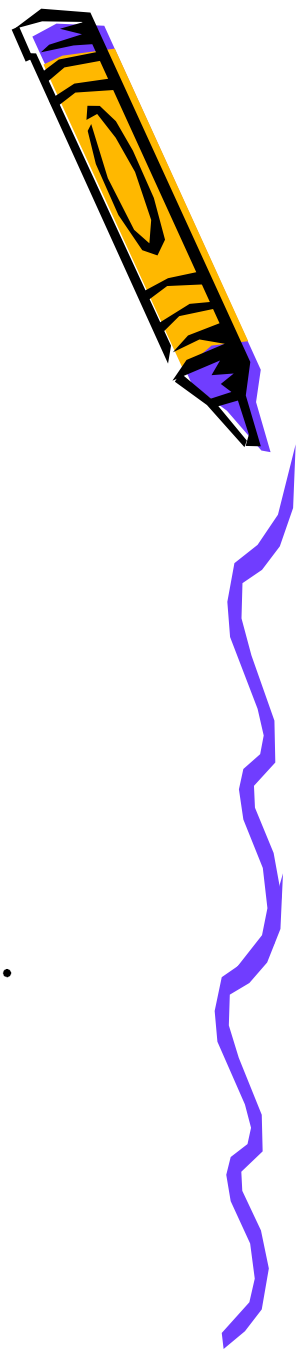
$$z_1 = 5 + 3i ;$$

$$z_2 = 5 - 3i$$

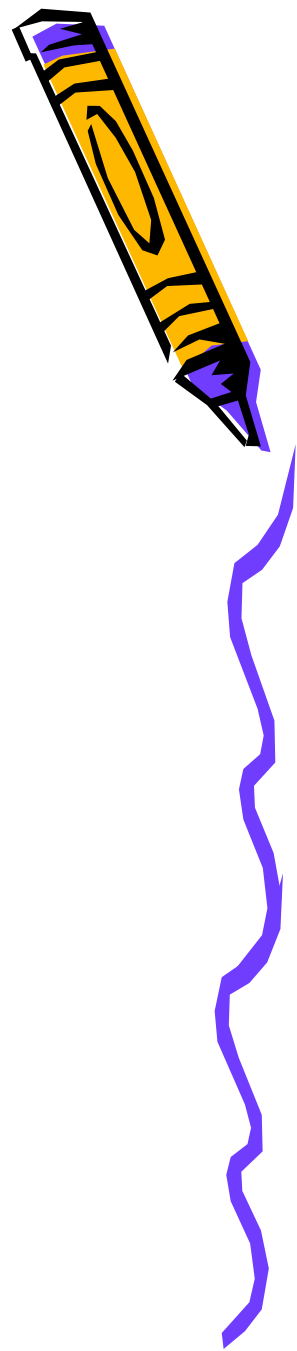
Вывод : z_1 и z_2

комплексно -

сопряженные числа.



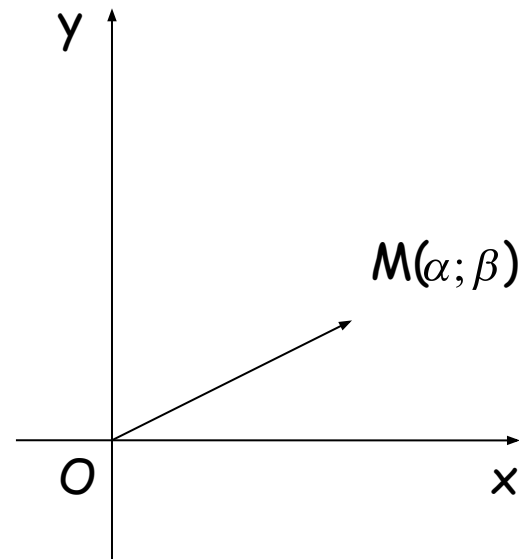
Геометрическое изображение комплексных чисел.



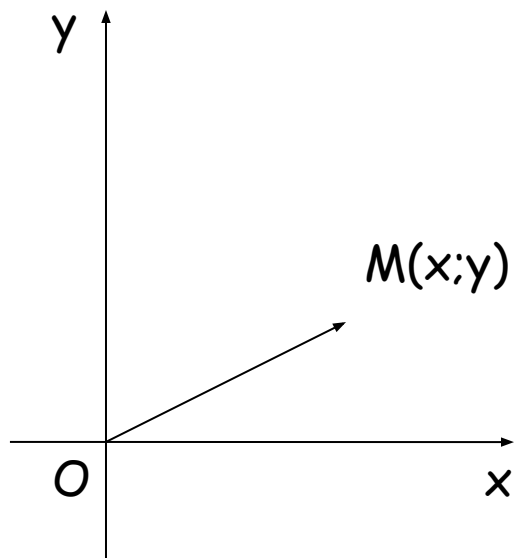
Всякое комплексное число можно изобразить точкой плоскости xOy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

И, наоборот, каждую точку координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа.

$$Z = \alpha + \beta i, M(\alpha, \beta)$$



Геометрическое изображение комплексных чисел.



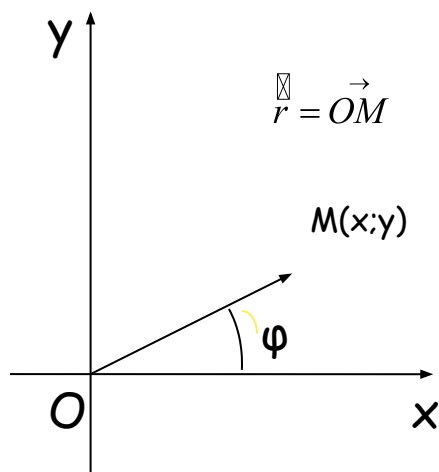
Плоскость, на которой
изображаются
комплексные числа,
называется *комплексной
плоскостью*.

Ось абсцисс Ox называется
действительной осью.

Ось ординат Oy называется
мнимой осью.



Геометрическое изображение комплексных чисел.



Комплексное число можно задавать с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \vec{OM}$.

Длина вектора называется модулем этого числа и обозначается $|Z|$ или r .

Величина угла между положительным направлением оси Oх и вектором $\vec{r}$

называется аргументом этого комплексного числа и обозначается $\text{Arg } Z$ или φ .

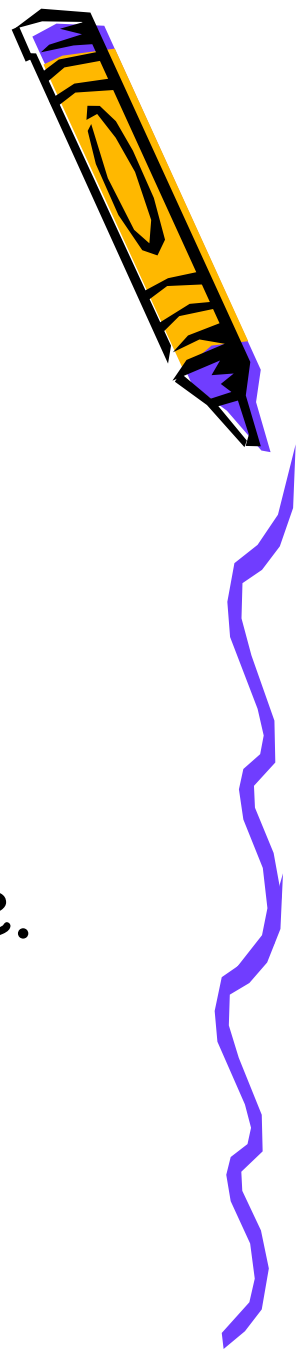
Аргумент комплексного числа определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$.



Формы записи комплексных чисел.

1. Алгебраическая.
2. Тригонометрическая.
3. Показательная.

Любое комплексное число
можно записать в любой форме.



Формы записи комплексных чисел.

Модуль r и аргумент φ можно
рассматривать как полярные
координаты вектора $\vec{r} = OM$

Тогда получаем

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

Комплексное число $z = \alpha + \beta i$
можно записать в виде

$$z = r \cos \varphi + i r \sin \varphi$$

Или $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Запись числа

$$z = \alpha + \beta i$$

называется

алгебраической формой
комплексного числа.

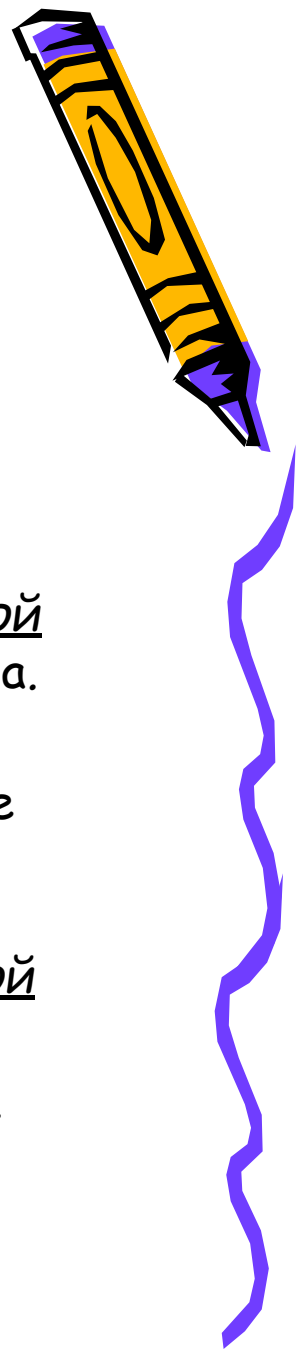
Запись числа z в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

называется

тригонометрической
формой

комплексного числа.



Переход от одной формы к другой.

От алгебраической формы
к тригонометрической

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

Т.к. $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$

То

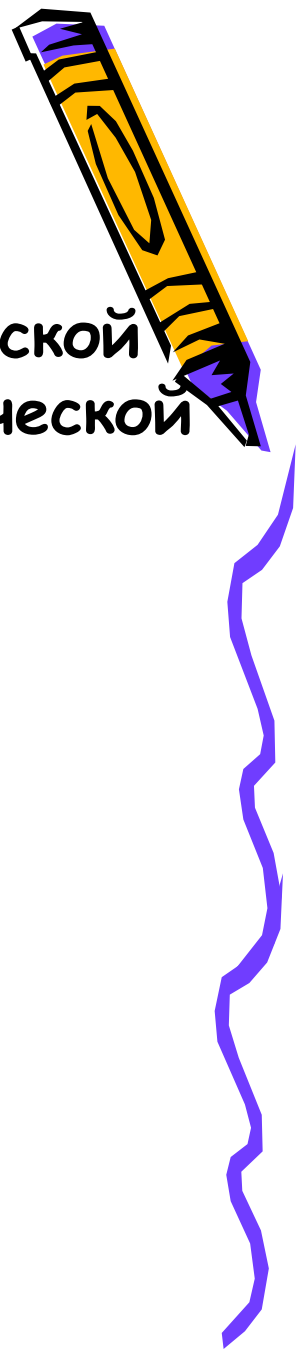
$$\cos \varphi = \cos(\arg z + 2\pi k)$$

$$\sin \varphi = \sin(\arg z)$$

От тригонометрической
формы к алгебраической

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$



При переходе от алгебраической формы
комплексного числа к тригонометрической
достаточно определить главное значение
аргумента, т.е. $\varphi = \arg z$



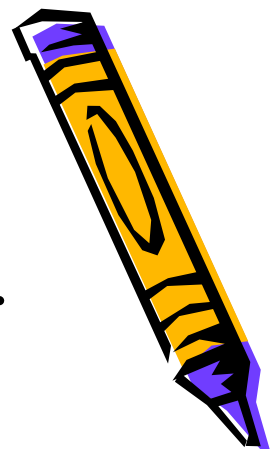
Т.к. $-\pi < \arg z \leq \pi$ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$

то

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{для точек I и IV четвертей;} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & \text{для точек II четверти;} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi & \text{для точек III четверти.} \end{cases}$$



Пример: Комплексное число
изобразить на плоскости и записать в
тригонометрической форме $z = 2 + 2i$



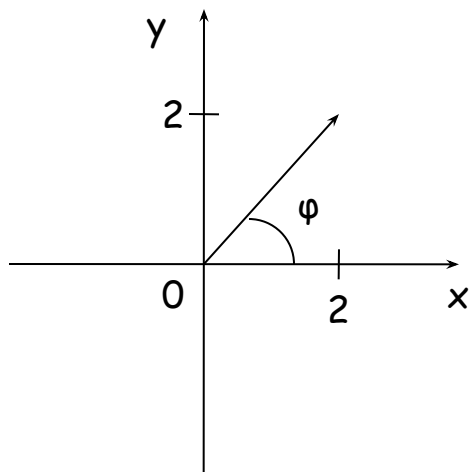
$$x = 2 \quad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = 2 \quad r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

Для I четверти

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{2}{2} = \operatorname{arctg} 1$$

$$\varphi = \arg z = \frac{\pi}{4}$$



$$2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$



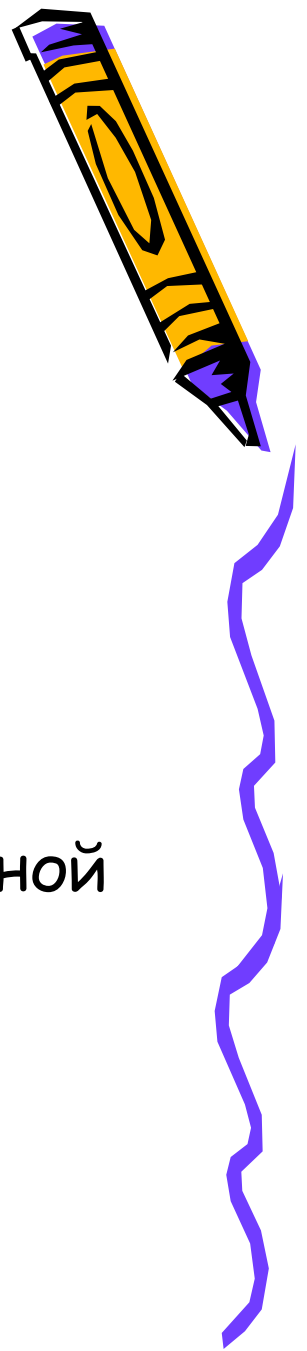
Комплексное число можно
записать в показательной
(или экспонентной) форме

$$z = re^{i\varphi}$$

Где $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$

В силу формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$
функция $e^{i\varphi}$ периодическая с основным
периодом 2π .

Для записи комплексного числа в показательной
форме надо определить главное значение
аргумента и модуль.



2. Действия над комплексными числами

Суммой двух комплексных
чисел

$$z_1 = x_1 + y_1 i$$

$$z_2 = x_2 + y_2 i$$

Называется комплексное
число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

Разностью двух комплексных
чисел

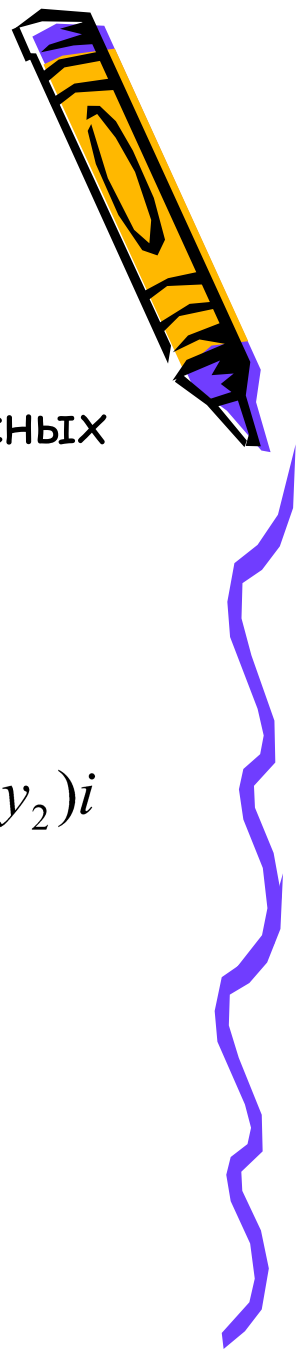
$$z_1 = x_1 + y_1 i$$

$$z_2 = x_2 + y_2 i$$

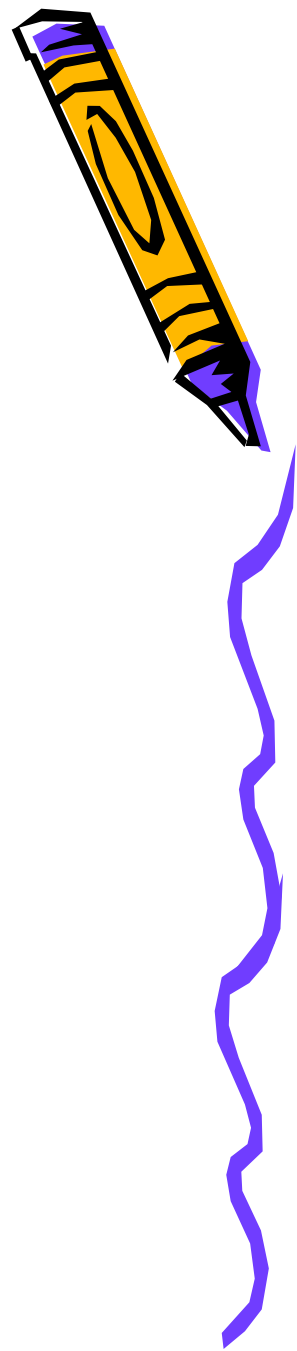
Называется комплексное
число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

Геометрически комплексные числа
складываются и вычитаются, как
векторы.



Сложение (вычитание) комплексных чисел



Примеры:

1. $z_1 = 4 + 2i$

$$z_2 = -5 + 3i$$

$$z_1 + z_2 = (4 - 5) + (2 + 3)i = -1 + 5i$$

2. $z_1 = 3 - 5i$

$$z_2 = 2 - 7i$$

$$z_1 - z_2 = (3 - 2) + (-5 - (-7))i = 1 + 2i$$



Произведение и частное комплексных чисел в алгебраической форме.



Произведением двух
комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + y_1 i$$

$$z_2 = x_2 + y_2 i$$

называется комплексное
число

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i$$

Формула получается путем
перемножения двучленов!

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)$$



Частным двух комплексных
чисел

$$z_1 = x_1 + y_1 i$$

$$z_2 = x_2 + y_2 i$$

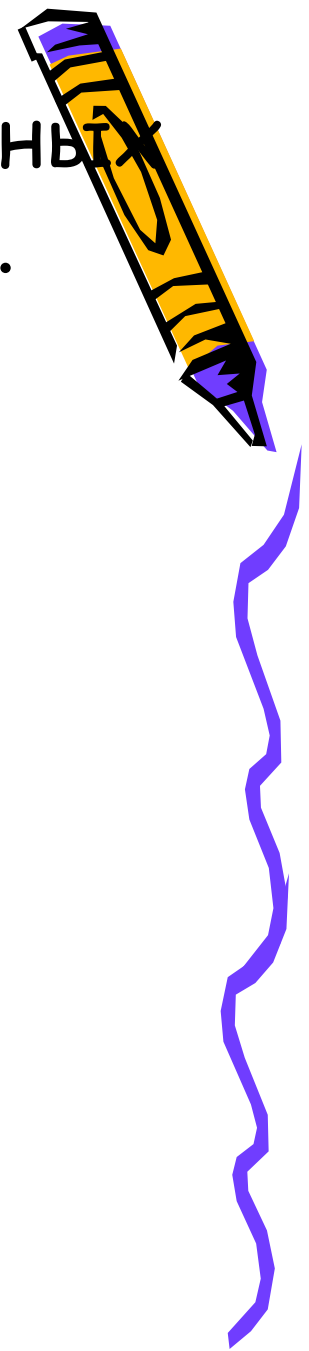
называется комплексное
число

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$$

На практике используют
умножение числителя и
знаменателя на число,
сопряженное
знаменателю!

$$\frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)}$$

Произведение и частное комплексных чисел в алгебраической форме.



Произведение:

$$z_1 = 1 + 2i$$

$$z_2 = 3 + 4i$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (1 + 2i) \cdot (3 + 4i) = \\ &= 1 \cdot 3 + 2i \cdot 3 + 1 \cdot 4i + 2i \cdot 4i = \\ &= 4 + 6i + 4i + 8i^2 = 4 + 10i - 8 = \\ &= -4 + 10i \end{aligned}$$

$$z_1 z_2 = -4 + 10i$$

Частное:

$$z_1 = 1 + 2i$$

$$z_2 = 1 + i$$

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2i}{1 + i} &= \frac{(1 + 2i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \\ &= \frac{1 + 2i - i + 2}{1 + 1} = \frac{3 + i}{2} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

$$i^2 = -1$$



Произведение и частное комплексных чисел в тригонометрической форме.



Произведение чисел

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

Находим по формуле

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

При умножении модули
перемножаются, а
аргументы складываются!

Частное чисел

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

Находим по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

При делении модули
делятся, а аргументы
вычитаются!



Произведение и частное комплексных чисел в тригонометрической форме.



Произведение:

$$z_1 = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = 5(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$z_1 z_2 = 3 \cdot 5 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \pi \right) \right)$$

$$z_1 z_2 = 15 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

Частное:

$$z_1 = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = 5(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \pi \right) \right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5} \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right)$$



Произведение и частное комплексных чисел в показательной форме.

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$$

$$z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

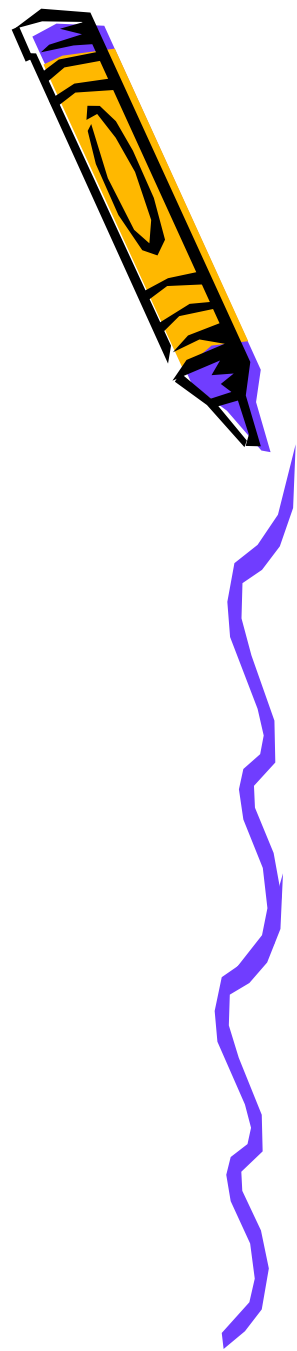
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

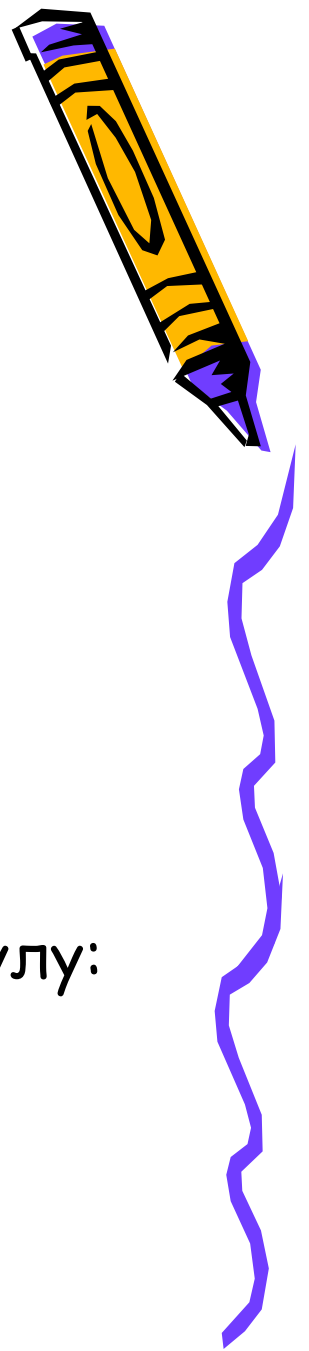
$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_1 z_2 = 6e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$$





Возведение комплексных чисел в степень.

Правило умножения комплексных чисел позволяет возвести число в n -степень:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_n$$

Получим Формулу Муавра:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Для показательной формы используют формулу:

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$



Возведение комплексных чисел в степень.

Пример.

Найти $(1 + \sqrt{3}i)^9$

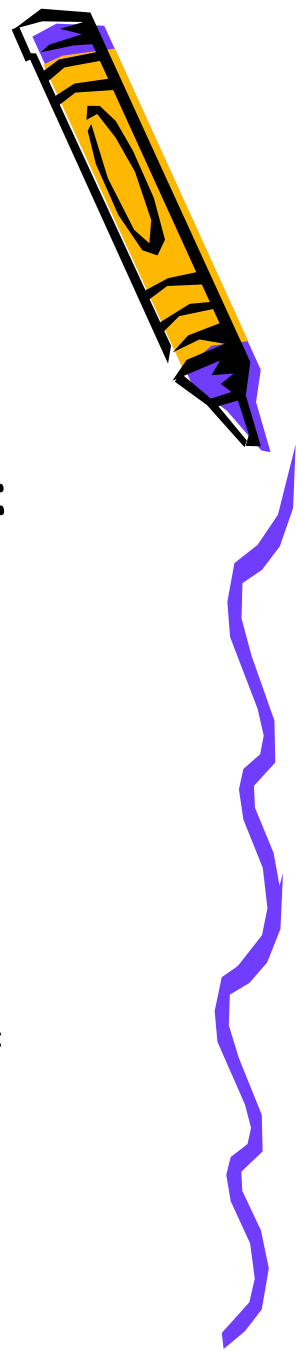
Запишем число в тригонометрической форме:

$$r = \sqrt{1+3} = 2,$$

$$\arg z = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3},$$

$$z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} z^9 &= (1 + \sqrt{3}i)^9 = 2^9 \left(\cos 9 \cdot \frac{\pi}{3} + i \sin 9 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \\ &= 2^9 (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = 2^9 \cdot (-1) = -512. \end{aligned}$$



Извлечение корней из комплексных чисел в тригонометрической форме.



Определение.

Корнем n -й степени из комплексного числа z называется комплексное число ω , удовлетворяющее равенству:

$$\omega^n = z$$

$$\sqrt[n]{z} = \omega$$

Данное действие выполняется над комплексными числами в тригонометрической форме.

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

Получим n различных корней!



Извлечение корней из комплексных чисел.

Пример.

Найти $\sqrt[6]{z}$, если $z = -1$

В тригонометрической форме число имеет вид:

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi$$

Используем формулу: $\sqrt[6]{-1} = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{6}$

Найдем 6 возможных корней, придавая k последовательно значения 0, 1, 2, 3, 4, 5:

$$k = 0, z_1 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 1, z_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$k = 2, z_1 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 3, z_1 = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$k = 4, z_1 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$

$$k = 5, z_1 = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

