ТРИГОНОМЕТРИЯ

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Рекомендации.

Выполнение преобразований тригонометрических выражений рекомендуется начинать с анализа структуры данного выражения и составления плана действий. Иногда могут быть полезны следующие рекомендации:

1.Если выражение содержит разные тригонометрические функции одного аргумента, то попробуйте все функции выразить через одну или две функции. При этом тангенс и котангенс угла чаще всего выражают через синус и косинус этого же угла;

2.Если в выражение входят тригонометрические функции от разных аргументов, то попытайтесь свести все функции к одному аргументу;

3.Формулы приведения могут быть полезны для выражения тригонометрической функции через кофункцию;

4. Не забывайте о формулах сокращенного умножения - они могут иногда помочь в преобразовании тригонометрического выражения;

5. Если в выражении нет нужного слагаемого, то его можно прибавить и сразу же вычесть. Иногда полезно какое - то слагаемое представить в виде суммы двух или нескольких слагаемых. Наконец, единицу бывает полезным представить в виде:

$$1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$$

6. Если в выражении нет нужного множителя, то на него можно умножить и сразу же разделить данное выражение (при условии, что этот множитель отличен от нуля);

7. Попробуйте применить метод введения вспомогательного угла. В простейших случаях он сводится к замене чисел $\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{3};\sqrt{3};1$

тригонометрическими функциями соответствующих углов;

8. Если в выражение входят степени тригонометрических функций, то можно обратиться к преобразованиям, понижающим степени;

9. Если данное выражение является однородным многочленом n-ой степени относительно $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$

то преобразование можно выполнять путем вынесения за скобки $\cos^n\alpha$ и $\sin^n\alpha$

Тождественные преобразования тригонометрических выражений опираются на следующие основные формулы:

- *Формулы приведения.*
- *Формулы для тригонометрических функций одного и того же аргумента.*
- *Формулы сложения аргументов.*
- *Формулы двойного угла.*
- *Формулы половинного аргумента.*
- *Формулы преобразования суммы(разности) тригонометрических функций в произведение.*
- *Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму(разность).*

$$\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$ctg(-\frac{\pi}{6}) = -ctg\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

$$\cos(-45^0) = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg(-60^0) = -tg\,60^0 = -\sqrt{3}$$

$$\sin 405^0 = \sin(360^0 + 45^0) = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(-765^0) = -\sin 765^0 = -\sin(2\cdot 360^0 + 45^0) = -\sin 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\frac{17\pi}{4} = tg(\frac{16\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = tg(4\pi + \frac{\pi}{4}) = tg\frac{\pi}{4} = 1$$

$$ctg(-\frac{13\pi}{6}) = -ctg(\frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = -ctg(2\pi + \frac{\pi}{6}) = -ctg\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

$$\cos(-\frac{25\pi}{6}) = \cos\frac{25\pi}{6} = \cos(\frac{24\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Если функция стоит в четной степени, то можно не обращать внимание на четверть и не стоит определять знак функции, а только посмотреть меняем ли на кофункцию.

$$\cos^2(270^0-\alpha)=\sin^2\alpha$$

В случае, если аргумент записан в виде (α-π)

$$\sin(\alpha-\pi)=\sin(-(\pi-\alpha))=-\sin(\pi-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha-90^0)=\cos(-(90^0-\alpha))=\cos(90^0-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\frac{\cos(\alpha-2\pi)\cdot\cos^2(270^0+\alpha)}{tg(\alpha-\pi)\cdot\sin(90^0+\alpha)}=$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos(\alpha-2\pi)=\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha \\ \ldots-\alpha)=-tg(\pi-\alpha)=tg\alpha \\ \sin(90^0+\alpha)=\cos\alpha\end{array}\right]$$

$$=\frac{\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha}{tg\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{tg\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{1}\div\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha}=\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

Основные тригонометрические тождества

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

2. $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

3. $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot ctg\alpha=1$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{ctg\alpha};\quad \mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{1}{tg\alpha}$$

4. $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

5. $1+c\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Основные тригонометрические тождества

Пример 1.

Вычислить tgα, зная что $\sin\alpha = -\frac{3}{5}, \;\; \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - (-\frac{3}{5})^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25};$$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$ или $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$,

так как по условию $\alpha \in$ III четверти,

а $\cos\alpha < 0$ в III четверти,

то берем $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$,

тогда $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{5} \div (-\frac{4}{5}) = \frac{3}{4}$

Основные тригонометрические тождества

Пример 2. Вычислить $\dfrac{4\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha-3\cos\alpha}$, *если* $tg\alpha=4$.

$$\frac{\dfrac{4\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{3\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{4\mathrm{tg}\alpha-1}{\mathrm{tg}\alpha-3}=\frac{4\cdot4-1}{4-3}=\frac{16-1}{1}=15$$

Примечание: если будет известно значение ctgα, то необходимо разделить на sinα .

Основные тригонометрические тождества

Пример 3. Найти cos2α, если tgα=1/2.

Используем формулу:

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^2}{1 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \div \frac{5}{4} = \frac{3}{5}$$

Основные тригонометрические тождества

Пример 4. Найти tgα, если известно, что $\cos 2\alpha = -\dfrac{5}{13}$ *и α∈III четверти.*

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} = -\frac{5}{13}$$

$$-5 \cdot \left(1 + tg^2\alpha\right) = 13 \cdot \left(1 - tg^2\alpha\right)$$

$$-5 - 5tg^2\alpha = 13 - 13tg^2\alpha$$

$$-5tg^2\alpha + 13tg^2\alpha = 13 + 5$$

$$8tg^2\alpha = 18$$

$$tg^2\alpha = \frac{18}{8}$$

$$tg^2\alpha = \frac{9}{4}$$

$$tg\alpha = \pm\frac{3}{2}$$

Так как tgα в третьей четверти принимает положительные значения, то

$$tg\alpha = \frac{3}{2}$$

Основные тригонометрические тождества

Пример 5. Вычислить sinα, если $\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=1{,}4$.

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=1{,}4^2$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1{,}96$$

$$(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2})-\sin 2\cdot\frac{\alpha}{2}=1{,}96$$

$$1-\sin\alpha=1{,}96-1$$

$$-\sin\alpha=0{,}96$$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

Пример 1. Вычислить $\cos 18° \cdot \cos 12° - \sin 18° \cdot \sin 12°$

$$\cos 18° \cdot \cos 12° - \sin 18° \cdot \sin 12° = \cos(18° + 12°) =$$

$$= \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Формулы сложения

Пример 2. Вычислить $\sin\frac{3\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{3\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$

$$\sin\frac{3\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{3\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\sin(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{12})=$$

$$=\sin\frac{10\pi}{12}=\sin\frac{5\pi}{6}=\sin(\frac{6\pi}{6}-\frac{\pi}{6})=$$

$$=\sin(\pi-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

Формулы сложения

Пример 3. Упростить: $\dfrac{\cos 4\alpha \cos \alpha + \sin 4\alpha \sin \alpha}{\sin 3\alpha}$

$$\frac{\cos 4\alpha \cos \alpha + \sin 4\alpha \sin \alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{\cos(4\alpha - \alpha)}{\sin 3\alpha} =$$

$$\frac{\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha} = ctg 3\alpha$$

Формулы сложения

Пример 4. Упростить: $$\frac{tgx + tg(\frac{\pi}{6} - x)}{1 - tgx \times tg(\frac{\pi}{6} - x)}$$

$$\frac{tgx + tg(\frac{\pi}{6} - x)}{1 - tgx \times tg(\frac{\pi}{6} - x)} = tg(x + (\frac{\pi}{6} - x)) =$$

$$tg(x + \frac{\pi}{6} - x) = tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Формулы сложения

Пример 5. Упростить: $$\frac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=1$$

Формулы сложения

Пример 6. $\sin\alpha = -\dfrac{5}{13}, \quad \cos\beta = \dfrac{3}{5}; \quad \alpha, \beta \in \text{IV четверти}$

Найти: sin(α+β).

Применим формулу sin(α+β)=sinα cosβ+cosα sinβ

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha, \cos^2\alpha = 1 - (-\frac{5}{13})^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}; \quad \cos\alpha = \pm\frac{12}{13}$$

$$\textit{ò .ê.} \quad \alpha \in \textit{IV÷åòâåðòè} \quad \cos\alpha = \frac{12}{13}$$

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta, \sin^2\beta = 1 - (\frac{3}{5})^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}; \quad \sin\beta = \pm\frac{4}{5}$$

$$\textit{ò .ê.} \quad \beta \in \textit{IV÷åòâåðòè} \quad \sin\beta = -\frac{4}{5}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5} + \frac{12}{13}\cdot(-\frac{4}{5}) = -\frac{3}{13} + (-\frac{48}{65}) = -\frac{15+48}{65} = -\frac{63}{65}$$

Пример 7. Вычислить tgβ, если tgα=1 , tg(α-β)=-2

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha \cdot tg\beta}$$

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha \cdot tg\beta} = -2$$

$$\frac{1 - \mathrm{tg}\beta}{1 + tg\beta} = -2$$

$$1 - \mathrm{tg}\beta = -2 \cdot (1 + tg\beta)$$

$$1 - \mathrm{tg}\beta = -2 - 2 \cdot tg\beta$$

$$-\mathrm{tg}\beta + 2 \cdot tg\beta = -2 - 1$$

$$\mathrm{tg}\beta = -3$$

Формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Примеры:

$$\sin 4x = 2\sin 2x \cdot \cos 2x$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$2\sin 10^0 \cdot \cos 10^0 = \sin 20^0$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Примеры:

$$\cos 100^0 = \cos^2 50^0 - \sin^2 50^0$$

$$\cos 8\alpha = \cos^2 4\alpha - \sin^2 4\alpha$$

$$\cos^2 25^0 - \sin^2 25^0 = \cos 50^0$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$ctg 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{2tg\alpha}$$

$$tg 120^0 = \frac{2tg 60^0}{1 - tg^2 60^0}$$

Формулы двойного угла

Упростить:

$$\frac{\sin 80^0}{2\cos 40^0}=\frac{2\sin 40^0\cos 40^0}{2\cos 40^0}=\sin 40^0$$

$$(\cos\frac{\alpha}{8}-\sin\frac{\alpha}{8})(\cos\frac{\alpha}{8}+\sin\frac{\alpha}{8})=\cos^2\frac{\alpha}{8}-\sin^2\frac{\alpha}{8}=\cos 2\cdot\frac{\alpha}{8}=\cos\frac{\alpha}{4}$$

$$\sin 75^0\cdot\cos 75^0=\frac{2}{2}\sin 75^0\cdot\cos 75^0=\frac{1}{2}\sin 150^0=\frac{1}{2}\sin(180^0-30^0)=\frac{1}{2}\sin 30^0=\frac{1}{4}$$

$$\sin\alpha\cos^3\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha=\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha=$$

$$=\frac{2}{2}\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha=\frac{1}{4}\sin 4\alpha$$

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

Пример 1.

$$\frac{\cos 50^\circ - \cos 10^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{-2\sin\dfrac{50^\circ - 10^\circ}{2}\sin\dfrac{50^\circ + 10^\circ}{2}}{\sin 20^\circ} =$$

$$= -\frac{2\sin 20^\circ \sin 30^\circ}{\sin 20^\circ} = -2\sin 30^\circ = -2\cdot\frac{1}{2.} = -1$$

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

Пример 2.

$$\cos 2\alpha + \cos 8\alpha = 2\cos\frac{2\alpha + 8\alpha}{2} \cdot \cos\frac{2\alpha - 8\alpha}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{10\alpha}{2} \cdot \cos\frac{(-6\alpha)}{2} = 2\cos 5\alpha \cdot \cos(-3\alpha) =$$

$$= 2\cos 5\alpha \cos 3\alpha$$

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

Пример 3.

$$\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{12}=2\sin\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}}{2}=2\sin\frac{\frac{2\pi}{12}}{2}\cos\frac{\frac{4\pi}{12}}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{2}=\quad 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{12}$$

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

Пример 4.

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x =$$

$$= (\sin x + \sin 3x) + (\sin 2x + \sin 4x) =$$

$$= 2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2} + 2\sin\frac{2x+4x}{2}\cos\frac{2x-4x}{2} =$$

$$= 2\sin 2x\cos x + 2\sin 3x\cos x = 2\cos x\cdot(\sin 2x + \sin 3x) =$$

$$= 2\cos x\cdot 2\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos(-\frac{x}{2}) = \ 4\cos x\cdot\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$$

Вычислить:

$$tg20^0 + tg40^0 + tg60^0 + ... + tg160^0 + tg180^0 =$$

$$(tg20^0 + tg160^0) + (tg40^0 + tg140^0) + (tg60^0 + tg120^0) + (tg80^0 + tg100^0) + tg180^0 =$$

$$\frac{\sin(20^0 + 160^0)}{\cos 20^0 \cdot \cos 160^0} + \frac{\sin(40^0 + 140^0)}{\cos 40^0 \cdot \cos 140^0} + \frac{\sin(60^0 + 120^0)}{\cos 60^0 \cdot \cos 120^0} + \frac{\sin(80^0 + 100^0)}{\cos 80^0 \cdot \cos 100^0} + tg180^0 = 0$$

Вычислить: $\cos 0+\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\ldots+\cos\frac{6\pi}{7}$.

$$\cos 0+\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\ldots+\cos\frac{6\pi}{7}= 1+(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7})+$$

$$+(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7})+(\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7})=$$

Воспользуемся формулой: $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\cos\frac{\pi}{2}=0$$

Получим:

$$1+2\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{5\pi}{14}+2\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{3\pi}{14}+2\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{14}=1$$

Вычислить: $\sin 9^0 + \sin 49^0 + \ldots + \sin 289^0 + \sin 329^0$

При выполнении задания можно воспользоваться формулой из учебника М.Л.Галицкого «Сборник задач по алгебре 8 – 9 класс»

Пусть (a_n) *– арифметическая прогрессия с разностью d и* $S_n = \sin a_1 + \sin a_2 + \ldots + \sin a_n.$

$$S_n = \frac{\sin\frac{dn}{2}\cdot\sin(a_1 + \frac{d(n-1)}{2})}{\sin\frac{d}{2}}$$

В нашем случае $a_1 = 9^0$, $d = 40^0$, $n = 9$, *следовательно:*

$$S_9 = \frac{\sin\frac{40^0\cdot 9}{2}\cdot\sin(9^0 + \frac{40^0\cdot 8}{2})}{\sin\frac{40^0}{2}} = \frac{\sin 180^0\cdot\sin 169^0}{\sin 20^0} = 0$$

$т.к.\ \sin 180^0 = 0$

$$S_n = \cos a_1 + \cos a_2 + \ldots + \cos a_n.$$

$$S_n = \frac{\sin\frac{dn}{2} \cdot \cos\left(a_1 + \frac{d(n-1)}{2}\right)}{\sin\frac{d}{2}}$$

$$\frac{\sin 8\alpha+\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha+\sin 12\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 10\alpha+\cos 11\alpha+\cos 12\alpha}$$

Вычислите его значение, если $tg 5\alpha = 1/8$.

$$\sin 8\alpha+\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha+\sin 12\alpha=\frac{\sin\frac{5\alpha}{2}\sin(8\alpha+\frac{4\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{5\alpha}{2}\cdot\sin 10\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 10\alpha+\cos 11\alpha+\cos 12\alpha=\frac{\sin\frac{5\alpha}{2}\cos(8\alpha+\frac{4\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{5\alpha}{2}\cdot\cos 10\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\sin\frac{5\alpha}{2}\cdot\sin 10\alpha}{\sin\frac{5\alpha}{2}\cdot\cos 10\alpha}=tg 10\alpha=\frac{2tg 5\alpha}{1-tg^2 5\alpha}=\frac{2\cdot 1/8}{1-1/64}=\frac{1\cdot 64}{4\cdot 63}=\frac{16}{63}$$

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Вычислить:

$$\cos\frac{\pi}{36}+\cos\frac{2\pi}{36}+\cos\frac{3\pi}{36}+\ldots+\cos\frac{35\pi}{36}=$$

$$=\frac{\sin\dfrac{\frac{35\pi}{36}}{2}\cdot\cos\dfrac{\frac{36\pi}{36}}{2}}{\sin\dfrac{\pi}{72}}=\frac{\sin\dfrac{35\pi}{72}\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}}{\sin\dfrac{\pi}{72}}=0$$

Вычислить: $\dfrac{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin 17\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos 17\alpha}=$

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin 17\alpha=\frac{\sin\dfrac{17\alpha}{2}\sin\dfrac{18\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\dfrac{17\alpha}{2}\cdot\sin 9\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos 17\alpha=\frac{\sin\dfrac{17\alpha}{2}\cos\dfrac{18\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\dfrac{17\alpha}{2}\cdot\cos 9\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin 17\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos 17\alpha}=\frac{\sin\dfrac{17\alpha}{2}\cdot\sin 9\alpha}{\sin\dfrac{17\alpha}{2}\cdot\cos 9\alpha}=tg 9\alpha$$

Вычислите значение выражения

$$\frac{\cos 11\alpha + 3\cos 9\alpha + 3\cos 7\alpha + \cos 5\alpha}{\cos 8\alpha}$$ **если** $$\cos\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\cos 11\alpha + 3(\cos 9\alpha + \cos 7\alpha) + \cos 5\alpha}{\cos 8\alpha} =$$

$$= \frac{2\cos 8\alpha \cdot \cos 3\alpha + 6\cos 8\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos 8\alpha} =$$

$$= \frac{2\cos 8\alpha(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha)}{\cos 8\alpha} =$$

$$= 2(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos\alpha) =$$

$$8\cos^3\alpha = 8\cdot\frac{1}{27} = \frac{8}{27}$$

Формулы понижения степени

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$$

I способ

Вычислить: $125\cdot(\cos^8\alpha-\sin^8\alpha),\quad \textit{åñëè}\ \cos 2\alpha=0{,}8.$

$$125\cdot(\cos^8\alpha-\sin^8\alpha)=125\cdot(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha)=$$

$$125\cdot(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\cdot(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)=$$

$$125\cdot\cos 2\alpha\cdot(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)=125\cdot 0{,}8\cdot(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)=$$

$$100\cdot[(\frac{1+\cos 2\alpha}{2})^2+(\frac{1-\cos 2\alpha}{2})^2]=100\cdot[(\frac{1+0.8}{2})^2+(\frac{1-0.8}{2})^2]=$$

$$=100\cdot(0{,}9^2+0{,}1^2)=100\cdot(0{,}81+0{,}01)=100\cdot 0{,}82=82$$

II способ

Вычислить $125\cdot(\cos^8\alpha-\sin^8\alpha)$, *åñëè* $\cos 2\alpha=0{,}8$

$$125\cdot(\cos^8\alpha-\sin^8\alpha)=125\cdot(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)\cdot(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha)=$$

$$125\cdot(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\cdot(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)=$$

$$125\cdot\cos 2\alpha\cdot(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)=125\cdot 0{,}8\cdot(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)=$$

$$100\cdot(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)=$$

$$=100\cdot[(\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^4\alpha)-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha]=$$

$$=100\cdot[(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha]=$$

$$=100\cdot(1-\frac{4\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{2})=100\cdot(1-\frac{\sin^2 2\alpha}{2})=$$

$$=100\cdot(1-\frac{1-\cos^2 2\alpha}{2})=100\cdot(\frac{2-1+0{,}64}{2})=100\cdot 0{,}82=82$$

Формулы преобразования произведений в суммы или разности

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

Формулы преобразования произведений в суммы или разности

Пример: $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x =$

$$= \frac{1}{2}[\cos(x-3x) - \cos(x+3x)] + \frac{1}{2}[\cos(4x-8x) - \cos(4x+8x)] =$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(-2x) - \cos 4x] + \frac{1}{2}[\cos(-4x) - \cos 12x] =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x + \cos 4x - \cos 12x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 12x) =$$

$$= \frac{1}{2}(-2\sin\frac{2x-12x}{2}\sin\frac{2x+12x}{2}) = -\sin(-5x)\sin 7x =$$

$$= \sin 5x \sin 7x$$

Доказать тождество: $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

$$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)\cdot$$

$$\cdot(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)=\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\sin^2\beta\cdot\cos^2\alpha=$$

$$\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-\sin^2\beta(1-\sin^2\alpha)=$$

$$\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\sin^2\beta\sin^2\alpha=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

1 способ

$$\sin^2(\frac{\alpha}{2}+2\beta)-\sin^2(\frac{\alpha}{2}-2\beta)=$$

$$=\sin(\frac{\alpha}{2}+2\beta+\frac{\alpha}{2}-2\beta)\cdot\sin(\frac{\alpha}{2}+2\beta-\frac{\alpha}{2}+2\beta)=$$

$$=\sin\alpha\cdot\sin 4\beta$$

Применили формулу

$$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

2 способ

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+2\beta\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right)=$$

$$\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}+2\beta\right)-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right)\right)\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}+2\beta\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right)\right)=$$

$$=2\sin\frac{\frac{\alpha}{2}+2\beta-\frac{\alpha}{2}+2\beta}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\alpha}{2}+2\beta+\frac{\alpha}{2}-2\beta}{2}\cdot$$

$$\cdot 2\sin\frac{\frac{\alpha}{2}+2\beta+\frac{\alpha}{2}-2\beta}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\alpha}{2}+2\beta-\frac{\alpha}{2}+2\beta}{2}=$$

$$=2\sin 2\beta\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos 2\beta=\sin 4\beta\cdot\sin\alpha$$

3 способ

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+2\beta\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right)=$$

$$=\frac{1-\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}+2\beta\right)}{2}-\frac{1-\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right)}{2}=$$

$$=\frac{1-\cos(\alpha+4\beta)-1+\cos(\alpha-4\beta)}{2}=\frac{\cos(\alpha-4\beta)-\cos(\alpha+4\beta)}{2}=$$

$$=\frac{-2\sin\frac{\alpha-4\beta+\alpha+4\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-4\beta-\alpha-4\beta}{2}}{2}=$$

$$=-\sin\alpha\cdot\sin(-4\beta)=\sin\alpha\cdot\sin 4\beta$$

$$\sin^2(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2})-\sin^2(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2})=$$

$$=\sin(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2})\cdot\sin(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2})=$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\alpha$$

Упростите

$$\cos 2\alpha + 2\sin(\alpha + 30°) \cdot \sin(\alpha - 30°) =$$

$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2(\sin^2\alpha - \sin^2 30°) =$$

$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha - \frac{1}{2} =$$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Доказать тождество: $\sin\alpha \cdot \sin(60^0-\alpha)\cdot \sin(60^0+\alpha)=\dfrac{1}{4}\sin 3\alpha$

$$\sin\alpha \cdot \sin(60^0-\alpha)\cdot \sin(60^0+\alpha)=\sin\alpha\cdot(\sin^2 60^0-\sin^2\alpha)=$$

$$\sin\alpha\cdot(\frac{3}{4}-\sin^2\alpha)= \ \frac{1}{4}(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)= \ \frac{1}{4}\sin 3\alpha$$

Аналогично доказываются тождества:

$$\cos\alpha\cdot\cos(60^0-\alpha)\cdot\cos(60^0+\alpha)=\frac{1}{4}\cos 3\alpha$$

$$tg\alpha\cdot tg(60^0-\alpha)\cdot tg(60^0+\alpha)=tg3\alpha$$

$$ctg\alpha\cdot ctg(60^0-\alpha)\cdot ctg(60^0+\alpha)=ctg3\alpha$$

Пользуясь этими тождествами легко доказать, что:

$$\sin 20^0\cdot\sin 40^0\cdot\sin 80^0=\frac{1}{4}\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\cos 10^0\cdot\cos 50^0\cdot\cos 70^0=\frac{1}{4}\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$tg6^0\cdot tg54^0\cdot tg66^0=tg18^0$$

Вычислить:

$$tg20^0 \cdot tg40^0 \cdot tg60^0 \cdot tg80^0 = (tg20^0 \cdot tg40^0 \cdot tg80^0) \cdot tg60^0 = tg60^0 \cdot tg60^0 =$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$$

Второй способ:

$$tg20^0 \cdot tg40^0 \cdot tg60^0 \cdot tg80^0 = \frac{\sin 20^0 \cdot \sin 40^0 \cdot \sin 80^0}{\cos 20^0 \cdot \cos 40^0 \cdot \cos 80^0} \cdot \sqrt{3} =$$

$$\frac{2\sin 10^0 \cos 10^0 \cdot 2\sin 20^0 \cos 20^0 \cdot 2\sin 40^0 \cos 40^0}{\cos 20^0 \cdot \cos 40^0 \cdot \cos(90^0 - 10^0)} \cdot \sqrt{3} =$$

$$8\sqrt{3}\cos 10^0 \cdot \sin 20^0 \sin 40^0 = 8\sqrt{3}\cos 10^0 \cdot \frac{1}{2}(\cos 20^0 - \cos 60^0) =$$

$$8\sqrt{3}\cos 10^0 \cdot (\frac{1}{2}\cos 20^0 - \frac{1}{4}) = 4\sqrt{3}\cos 10^0 \cdot \cos 20^0 - 2\sqrt{3}\cos 10^0 =$$

$$4\sqrt{3}(\frac{1}{2}(\cos 30^0 + \cos 10^0)) - 2\sqrt{3}\cos 10^0 = 4\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\cos 10^0) - 2\sqrt{3}\cos 10^0 =$$

$$3 + 2\sqrt{3}\cos 10^0 - 2\sqrt{3}\cos 10^0 = 3$$

Вычислить: $\cos 12^0 \cdot \cos 24^0 \cdot \cos 36^0 \cdot \cos 48^0 \cdot \cos 60^0 \cdot \cos 72^0 \cdot \cos 84^0$

$$\cos 24^0 \cdot \cos 36^0 \cdot \cos 84^0 = \frac{1}{4}\cos 72^0$$

$$\cos 12^0 \cdot \cos 48^0 \cdot \cos 72^0 = \frac{1}{4}\cos 36^0$$

$$\cos 12^0 \cdot \cos 24^0 \cdot \cos 36^0 \cdot \cos 48^0 \cdot \cos 60^0 \cdot \cos 72^0 \cdot \cos 84^0 =$$

$$\frac{1}{4}\cos 72^0 \cdot \frac{1}{4}\cos 36^0 \cdot \cos 60^0 = \frac{1}{16}\cos 72^0 \cdot \cos 36^0 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\frac{\cos 72^0 \cdot \cos 36^0}{32} = \frac{\cos 72^0 \cdot 2\cos 36^0 \sin 36^0}{2 \cdot 32 \sin 36^0} = \frac{\cos 72^0 \cdot \sin 72^0}{64 \sin 36^0} =$$

$$\frac{\sin 144^0}{128 \sin 36^0} = \frac{\sin(180^0 - 36^0)}{128 \sin 36^0} = \frac{\sin 36^0}{128 \sin 36^0} = \frac{1}{128}$$

Вычислить: $\cos 12^0 \cdot \cos 24^0 \cdot \cos 36^0 \cdot \cos 48^0 \cdot \cos 60^0 \cdot \cos 72^0 \cdot \cos 84^0$

$$\cos 12^0 \cdot \cos 24^0 \cdot \cos 36^0 \cdot \cos 48^0 \cdot \cos 60^0 \cdot \cos 72^0 \cdot \cos 84^0 =$$

$$= \frac{2\sin 12^0 \cos 12^0}{2\sin 12^0} \cdot \cos 24^0 \cdot \frac{2\sin 36^0 \cos 36^0}{2\sin 36^0} \cdot \cos 48^0 \cdot \cos 72^0 \cos(90^0 - 6^0) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sin 24^0 \cdot \cos 24^0 \cdot 2 \cdot \sin 72^0 \cdot \cos 72^0 \cdot \cos 48^0 \cdot \sin 6^0}{4 \cdot 8 \cdot \sin 12^0 \sin 36^0} =$$

$$= \frac{2\sin 48^0 \cdot \cos 48^0 \cdot \sin 144^0 \cdot \sin 6^0}{2 \cdot 32 \cdot \sin 12^0 \cdot \sin 36^0} = \frac{\sin 96^0 \cdot \sin 36^0 \cdot \sin 6^0}{64 \cdot \sin 12^0 \cdot \sin 36^\circ} =$$

$$= \frac{2\cos 6^0 \cdot \sin 6^0}{2 \cdot 64 \cdot \sin 12^0} = \frac{\sin 12^0}{128 \cdot \sin 12^0} = \frac{1}{128}$$

Примеры преобразований тригонометрических выражений часто встречающиеся или имеющие необычный подход в решении

Пример1:

$$\cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0 = \frac{2\sin 20^0 \cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0}{2\sin 20^0} = \frac{2\sin 80^0 \cos 80^0}{2\cdot 4\sin 20^0} =$$

$$= \frac{\sin 160^0}{8\sin 20^0} = \frac{\sin(180^0 - 20^0)}{8\sin 20^0} = \frac{\sin 20^0}{8\sin 20^0} = \frac{1}{8}$$

Способ 2

$$\cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0 = \frac{1}{4}\cos 60^\circ = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Применили формулу

$$\cos\alpha \cdot \cos(60^\circ - \alpha)\cdot\cos(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$$

Пример 2:

$$tg1^0 tg3^0 tg5^0 ... tg89^0 =$$

$$tg89^0 = tg(90^0 - 1^0) = ctg1^0$$

$$tg87^0 = tg(90^0 - 3^0) = ctg3^0$$

$$tg85^0 = tg(90^0 - 5^0) = ctg5^0$$

и т.д., кроме этого:

$$tg47^0 = tg(90^0 - 43^0) = ctg43^0$$

умножим:

$$tg1^0 \cdot tg89^0 = tg1^0 \cdot ctg1^0 = 1$$

все попарные произведения дают 1, а $tg45^0=1$. следовательно все выражение равно 1.

Вычислить:

$$\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cdot \cos 2 = \frac{1+\cos 6}{2} + \frac{1+\cos 2}{2} - \frac{1}{2}(\cos 6 + \cos 2) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2 - \frac{1}{2}\cos 6 - \frac{1}{2}\cos 2 = 1$$

Преобразовать в произведение.

$$2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)-1=$$

$$=2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sqrt{3}\sin\alpha-1=$$

$$=2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sqrt{3}\sin\alpha-\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sqrt{3}\sin\alpha=$$

$$=-\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha\right)=$$

$$=2(\sin\alpha\cdot\cos 30^\circ-\cos\alpha\cdot\sin 30^\circ)=2\sin(\alpha-30^\circ)$$

Вычислить: $\sin\left(arctg\,\dfrac{3}{4} + arcctg\,\dfrac{4}{3}\right).$

Воспользуемся формулами перехода от одной обратной тригонометрической функции к другой:

$$arctg\,x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = arcctg\,\frac{1}{x}$$

$$\textit{åñëè}\ 0 < x < +\infty,$$

$$\textit{тогда}\quad arctg\,\frac{3}{4} = arcctg\,\frac{4}{3},\ \textit{получим}\ \sin\left(2arctg\,\frac{3}{4}\right)$$

$$arctg\,\frac{3}{4} = \arcsin\frac{3/4}{\sqrt{1+9/16}} = \arcsin\frac{3}{4} \div \frac{5}{4} = \arcsin\frac{3}{5}$$

$$\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right),\ \textit{ïóñòü}\quad \arcsin\frac{3}{5} = \alpha,\ \text{òîãäà}\ \ \sin\alpha = \frac{3}{5},\ \cos\alpha = \frac{4}{5},\ \alpha \in I \div\text{åòâ.}$$

$$\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

Используемая литература

- А. Н. Шыныбеков «Алгебра и начала анализа». Алматы «Атамура» 2006 г.
- М. Л. Галицкий «Сборник задач по алгебре 8-9». Москва «Просвещение» 2005 г.
- Яремчук Ф.П, Рудченко П.А. «Алгебра и элементарные функции». Киев «Наукова думка» 1987 г.
- Цыпкин А. Г, Пинский А.И. «Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы». Москва «Наука» 1983 г.
- И.П. Рустюмова, С.Т. Рустюмова «Пособие для подготовки к ЕНТ по математике». Алматы 2010 г.
- Сборники тестов по математике 2003-2011 гг.