Тема 1. Нарощення та дисконтування грошових сум

Методика складних відсотків

* Формула нарощування за методикою складних відсотків має вигляд

$$FV = PV \times (1+r)^n$$

(9)

* Величину $(1+r)^n$ називають множником нарощування складних відсотків.

* Операцію багаторазового дисконтування за методикою складних відсотків виконують так

$$PV = FV / (1 + r)^n \qquad (9)$$

* **Наприклад,** якщо певна сума через три роки оцінюється як 3 993 грн при річній ставці дохідності 10%, то теперішня (дисконтована) вартість цих грошей становить

$PV = 3\ 993 / (1 + 0.1)^3 = 3\ 993 / 1.331 = 3000.0$ грн.

Приклад 1. Нехай річна ставка дохідності дорівнює r = 8 %. Через скільки років початкова сума збільшиться в два рази. Згідно з формулою (9) маємо

$$FV / PV = (1+r)^n = 2. \qquad (11)$$

Звідси маємо

$$n = \ln 2 / \ln(1+0.08) = 0.693 / 0.077 = 9.00 \text{ років.}$$

Приклад 2. Розглянемо інший приклад. Кількість періодів нарощування n = 6. За якої ставки дохідності початкова сума збільшиться вдвічі. Згідно з «правилом 72-х» маємо

$$r = 72 / 6 = 12.$$

Отже необхідна ставка дохідності становить r = 12 %.

У практиці фінансових розрахунків трапляється ситуація, коли в ролі періоду виступає не рік а місяць, або інший період часу. Наприклад, за річної ставки складних відсотків r нарахування здійснюються щомісяця або щокварталу. В цьому випадку формула обчислення майбутньої вартості набуває вигляду

$$FV = PV \times (1 + r / m)^{n \times m}. \tag{12}$$

Тут n – загальний термін угоди, m – кількість нарахувань відсотків протягом року.

Приклад 3. Вкладник поклав на депозит у банк 1000 грн під 16 % річних. Згідно з угодою складні відсотки повинні нараховуватися щокварталу. Знайдемо суму, яка акумулюється на рахунку через 1 рік.

$$FV = 1000 \times (1 + 0.16 / 4)^4 = 1000 \times 1.04^4 = 1000 \times 1.1699 = 1169.9 \text{ грн.}$$

Отже, при щоквартальному нарахуванні відсотків фактична річна дохідність становить майже 17 %. Якби нарахування здійснювалися один раз, дохідність становила б лише 16 %. Якби нарахування здійснювалися щомісяця (m = 12), ми отримаємо дохідність 17.2 %.

Номінальна та ефективна ставка складних відсотків

Між ефективною та номінальною ставкою існує наступне співвідношення

$$(1+r_e)^n = (1+r/m)^{n \times m}.$$

Звідси отримуємо, що ефективна ставка дохідності дорівнює

$$r_e = (1+r/m)^m - 1. \qquad (13)$$

Приклад. Один банк сплачує своїм клієнтам прибуток зі ставкою 11,5% при піврічному нарахуванні, а інший – 11,4% при щоквартальному нарахуванні. Який банк сплачує вкладникам більший прибуток?

1 банк. $r_e = (1+r/m)^m - 1 = \left(1+\frac{0{,}115}{2}\right)^2 - 1 = 11{,}83\%$

2 банк. $r_e = (1+r/m)^m - 1 = \left(1+\frac{0{,}114}{4}\right)^4 - 1 = 11{,}9\%$

Отже, гроші варто вкладати в другий банк.

Визначення терміну кредиту та величини відсоткової ставки

Термін кредиту. При нарощенні за складною відсотковою ставкою з формули

$FV = PV \times (1+r)^n$ випливає, що $n = \dfrac{\ln(FV/PV)}{\ln(1+r)}$

При дисконтуванні за складною відсотковою ставкою на основі формули $PV = FV/(1+r)^n$

маємо $n = \dfrac{\ln(PV/FV)}{\ln(1-r)}$.

Приклад. Через скільки років капітал збільшиться в 3 рази, якщо річна ставка складає 12%? Проаналізувати випадок нарахування відсотків за простою та складною ставками.

У випадку складних відсотків $3P = P \times (1+r)^n \Rightarrow 3 = 1{,}12^n$

Отже, $n = \dfrac{\ln 3}{\ln 1{,}12} = 9{,}7$, тобто у цьому випадку для збільшення капіталу в 3 рази потрібно 9,7 років.

У випадку простих відсотків $3P = P \times (1+rn) \Rightarrow 3 = 1 + rn \Rightarrow n = \dfrac{2}{r} = \dfrac{2}{0{,}12} = 16{,}7$, тобто в цьому випадку для збільшення капіталу в 3 рази потрібно 16,7 років.

Величина відсоткової ставки. При нарощенні за складною відсотковою ставкою з формули

$FV = PV \times (1+r)^n$ випливає, що $r = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1$.

При дисконтуванні за складною відсотковою ставкою з формули

$PV = FV / (1+r)^n$ випливає, що $r = 1 - \sqrt[n]{\frac{PV}{FV}}$.

Безперервне нарощування та дисконтування.

Розглянемо щоденний компаунд. Для цього фінансові установи, як правило, проводять розрахунки на базі 360 днів, але для більш точних розрахунків можна використовувати 365-денний рік.

З формули $FV = PV \times (1+r)^n$ маємо $$FV = PV \times \left(1+\frac{r}{365}\right)^{365t} \qquad (14)$$

Приклад. 5000 грн вкладено з 9% щоденним компаундом. Який прибуток буде одержано через 4 роки?

За формулою (11) маємо

$$FV = PV \times \left(1+\frac{r}{365}\right)^{365t} = 5000\left(1+\frac{0,09}{365}\right)^{365\cdot 4} = 7166,33.$$

Тоді прибуток становить 7166,33-5000=2166,33 грн.

Майбутня вартість при неперервному компаунді визначається за формулою $FV = PV \times e^{rt}$.

Поточна вартість при неперервному компаунді визначається за формулою $PV = FV \times e^{-rt}$

Ефективна ставка при неперервному компаунді :

$$e^{r-1} = 1+s$$

де r та s - річні ставки відповідно неперервного та що річного компаунда. Отже, $s = e^{r} - 1$.

Приклад. За оцінкою фахівців устаткування лікарні через 5 років потребуватиме ремонту на суму 20000 грн. Адміністрація вирішує покласти гроші в банк за умови 7% річного неперервного компаунда, щоб через 5 років отримати потрібну суму. Яку суму грошей треба виділити з бюджету лікарні тепер?

FV=20000 грн. r=0,07 t=5 років

$$PV = FV \times e^{-rt} = 20000 \cdot e^{-0{,}07 \cdot 5} = 14093{,}76$$

Отже, лікарні необхідно виділити 14093,76 грн.

Врахування податків та інфляції

Позначимо: S – нарощена сума; S'- нарощена сума після виплати податку;
g – ставка податку на прибуток; G – загальна сума податку.

Прості відсотки: $G = (S - P)g = \Pr tg$

$$S' = S - G = P(1 + rt) - \Pr tg = P[1 + (1 - g)rt]$$

Отже, відсоткова ставка фактично скоротилась , замість ставки r застосовується ставка (1-g)r.

Складні відсотки. Існує 2 варіанти: податок нараховується за весь термін фінансової операції одразу або послідовно за кожний період.

Перший випадок: $G = (S - P)g = P[(1+r)^t - 1]g$, відповідно нарощена сума після виплати податку $S' = S - G = P(1+r)^t - P[(1+r)^t - 1]g$, звідки

$$S' = P(1+r)^t(1-g) + Pg.$$

Другий випадок: податок нараховується послідовно за кожен період, наприклад, за рік. Очевидно, що ця величина буде змінною – сума податку зростає зі збільшенням нарощеної суми. Опустимо подальше виведення – приходимо до висновку, що незалежно від методу нарахування податку нарощена сума обчислюється за формулою $S' = P(1+r)^t(1-g) + Pg$.

<u>Отже, метод нарахування не впливає на суму податку, проте для того, хто платить податки, має значення, коли він виплачується.</u>

Приклад. Нехай податок з прибутку становить 25%,

відсоткова ставка становить 20%,

термін нарахування відсотків – 3 роки,

а величина кредиту – 100000 грн.

Визначити розміри податку на прибуток при нарахуванні простих і складних відсотків та нарощену суму після виплати податку.

P=100000 грн; r=0, 2; t=3 роки.

Прості відсотки: $S = P(1+rt) = 100000 \cdot (1+0,2 \cdot 3) = 160000$ грн

$S' = 100000 \cdot [1+3(1-0,25) \cdot 0,2] = 145000$ грн

$G = S - S' = 160000 - 145000 = 15000$ грн

Складні відсотки: $S = P(1+r)^t = 100000 \cdot (1+0,2)^3 = 172800$ грн.

$S' = 100000 \cdot [(1-0,25) \cdot (1+0,2)^3 + 0,25] = 154600$ грн

$G = S - S' = 172800 - 154600 = 18200$ грн

Розміри інфляції можна оцінювати за допомогою різних, тісно пов'язаних між собою показників (індекс споживчих цін, індекс купівельної спроможності грошей, темп інфляції, рівень інфляції, індекс інфляції). Використаємо позначення:

S – Нарощена сума грошей, виміряна за номіналом

S'' – нарощена сума з урахуванням її знецінення

I_p – індекс цін

I – індекс купівельної спроможності цін

h – Темп інфляції

r_h – відсоткова ставка, яка враховує інфляцію (брутто-ставка)

d_h – дисконтна ставка, яка враховує інфляцію (дисконтна брутто-ставка)

Індекс інфляції – показник, який виражає відносну зміну середнього рівня цін у часі. Якщо величина індексу більше за 1 (або 100%), кажуть, що має місце підвищення цін,, а в протилежному випадку (менше 1 або 100%) – їх зниження.

Індекс купівельної спроможності є величиною, оберненою до індексу цін $I = \frac{1}{I_p}$.

Нарощена сума з урахуванням її знецінення: $S'' = S \cdot I$

Темп інфляції – відносний приріст цін за рік або інший період часу, вимірюється, як правило, у %.

$$h = \frac{S'' - S}{S} \cdot 100 = \left(\frac{S''}{S} - 1 \right) \cdot 100 = (I - 1) \cdot 100$$

Якщо h вимірюється у відсотках: $I = \left(1 + \frac{h}{100} \right)$ або $I = 1 + h$, якщо – у коефіцієнтах.

Наприклад, ціни за рік виросли в 1,2 рази.

Індекс купівельної спроможності грошей $I = 1{,}2$,

річний темп інфляції $h = 20\%$,

а індекс цін $I_p = \frac{1}{1{,}2}$

Короткотермінові фінансові операції.

Відсоткова ставка, яка враховує інфляцію (брутто-ставка)

$$r_h = r + h + rth$$

Реальний показник доходності у вигляді відсоткової ставки: $r = \frac{1 + r_h}{1 + h} - 1$.

Дисконтна ставка, яка враховує інфляцію (дисконтна брутто-ставка) $d_h = \frac{h + d}{1 + th}$

Довготермінові фінансові операції.

Відсоткова ставка, яка враховує інфляцію (брутто-ставка)

$$r_h = m\left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)(1 + h)^{\frac{1}{m}} - 1\right]$$

Реальний показник доходності у вигляді відсоткової ставки: $r = \frac{1 + r_h}{1 + h} - 1$.

Складна дисконтна брутто-ставка $d_h = \frac{d + h}{1 + h}$.

Фінансова еквівалентність

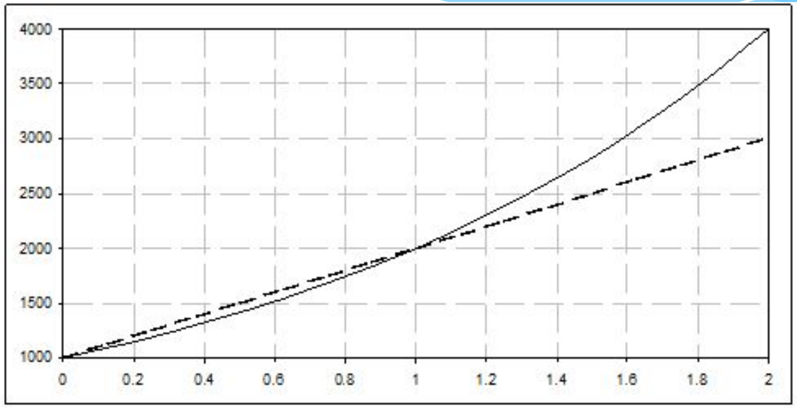
Приклад 1. Треба порівняти, що більше за ставкою складних відсотків $r = 7\%$ - 1 000 грн. сьогодні, чи 2 000 грн. через 8 років.

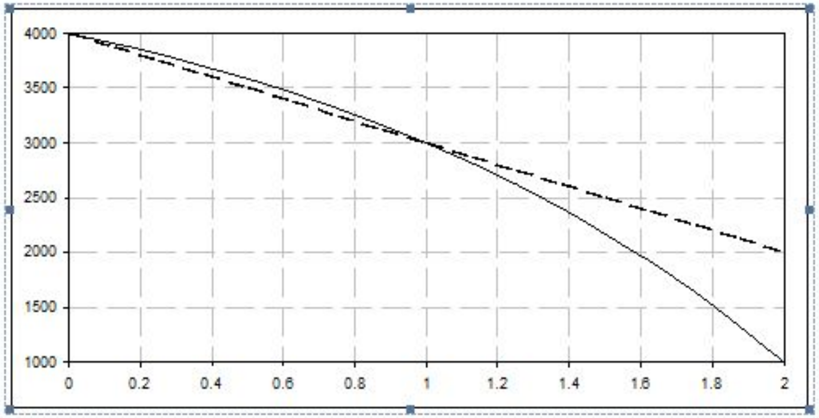
Для коректного порівняння грошових сум, які належать до різних моментів часу, необхідно звести ці вартісні величини до одного моменту часу. Найбільш популярний метод – приведення до теперішнього моменту часу. Для цього виконуємо дисконтування суми 2 000 грн. Згідно з формулою 7 (тема 1) маємо $PV = FV/(1+r)^n = 2000/1.07^8 = 1164$ грн. Отже, при ставці дохідності у 7 %, 2000 грн. через 8 років мають більшу вартість, ніж 1000 грн. сьогодні. Цей же висновок можна отримати іншим методом - використовуючи формулу нарощування складних відсотків $FV = PV \times (1+r)^n = 1000 \times 1.07^8 = 1718$ грн.

Часто ставиться **інша задача**: знайти таку ставку дохідності r, при якій сума 1000 грн. зараз стане еквівалентною сумі 2000 грн. через 8 років. Для розв'язування цієї задачі використовується співвідношення $2000 = 1000 \times (1+r)^8$. Звідси знаходимо ставку r

$$r = \left(\frac{2000}{1000}\right)^{1/8} - 1 = 0.0905.$$

Нарощування грошової суми за методикою простих і складних відсотків





Визначення еквівалентної ставки дохідності при утриманні комісійних

Рівняння еквівалентності матиме вигляд

$$(C - A)\times(1 + y)^n = C\times(1 + r)^n. \qquad (15)$$

З (15) отримуємо

$$\frac{1 + y}{1 + r} = \left(\frac{C}{C - A}\right)^{1/n}. \qquad (16)$$

Звідси маємо для реальної ставки дохідності y вираз

$$y = (1 + r)\times\left(\frac{C}{C - A}\right)^{1/n} - 1. \qquad (17)$$

Приклад 2. Комерційний банк пропонує кредит на наступних умовах:

- обсяг кредиту 5 000 грн.;
- термін кредитування 5 років;
- кредитна ставка складних відсотків 14 % річних;
- кредит погашається одним платежем у кінці терміну;
- у момент видачі кредиту банк отримує комісію у розмірі 5 % від суми кредиту.

Обчислити повну дохідність цієї кредитної операції для банку.

Спочатку розрахуємо величину кредиту, яку повинен повернути позичальник через 5 років, виходячи з того, що основна сума боргу становить 5 000 грн. і на цю суму банк нараховує складні відсотки. За формулою складних відсотків маємо

$$FV = PV \times (1+r)^n = 5000 \times 1.14^5 = 9627.07 \text{ грн.}$$

Тепер розрахуємо суму, яку фактично отримує на руки позичальник $C - A = 5000 - 250 = 4750$ *грн.* Використовуючи формулу (17) визначаємо фактичну ставку дохідності y

$$y = (1+0.14) \times \left(\frac{5000}{5000-250} \right)^{1/5} - 1 = 0.1518.$$

Отже, повна ставка дохідності позики для банку становить 15.18 %.

Слід зауважити, що такий же результат можна одержати, якщо використати фінансову функцію СТАВКА(5; ;-4750; 9627.07). Тут знак «-» означає позичені гроші.

Застосування програмного забезпечення

При виконанні фінансових розрахунків зручно використовувати електронні таблиці MS Excel. При цьому слід знати позначення основних фінансових функцій.

* БС (Ставка, Кпер, Плт, Пс, Тип) – майбутня вартість *FV*;
* ПС (Ставка, Кпер, Плт, Бс, Тип) – теперішня вартість *PV*;
* СТАВКА (Кпер, Плт, Пс, Бс, Тип) – ставка дохідності *r*;
* КПЕР (Ставка, Плт, Пс, Бс, Тип) – кількість періодів *n*;