

# 1. КИНЕМАТИКА

## 1.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**Кинематикой** называют раздел механики, изучающий способы (не причины!) описания движений и связь между величинами, характеризующими эти движения.

### *МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ:*

**Материальная точка (МТ)** – любой объект, формой и размерами которого в данной задаче (в данных условиях) можно пренебречь;

**Набор конечного числа материальных точек** – достаточно общая модель произвольной механической системы.

**Абсолютно твёрдое тело (АТТ)** – тело, форма и размеры которого при наличии тех воздействий, что описаны в условиях задачи, могут считаться неизменными. АТТ можно рассматривать как набор материальных точек с неизменными расстояниями между ними.

Тело отсчёта, жёстко связанная с ним система координат и часы образуют **систему отсчёта (СО)**.

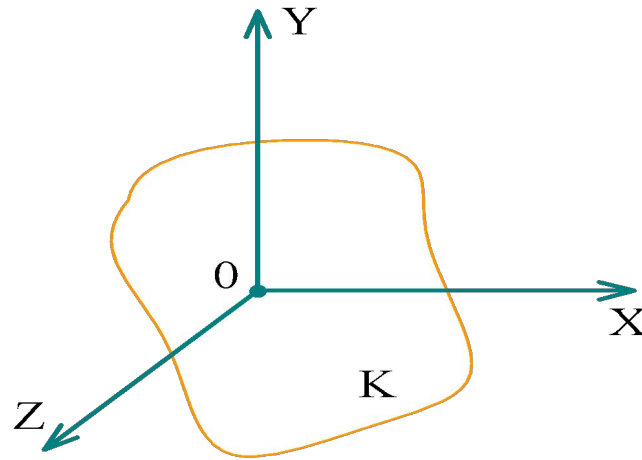


Рис. 1. 1

$O$  – начало координат (начало отсчёта);  $K$  – название системы отсчёта. Положение МТ в пространстве в определённый момент времени задаётся тремя её координатами (например, декартовыми,) или радиус-вектором :

$$r_x = x, r_y = y, r_z = z. \quad (1.1)$$

При движении МТ её координаты становятся функциями времени:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \quad (1.2 \text{ а, б, в})$$

Аналогично,

$$\overset{\vee}{r} = \overset{\vee}{r}(t). \quad (1.3)$$

**Закон движения** МТ– правило, по которому можно определить её положение в любой момент времени.

**P.S.** Закон движения (1.2 а, б, в) можно рассматривать как уравнения траектории, заданной в параметрическом виде (в роли параметра  $t$ ).

# ОСНОВНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ДВИЖЕНИЕ МТ (m)

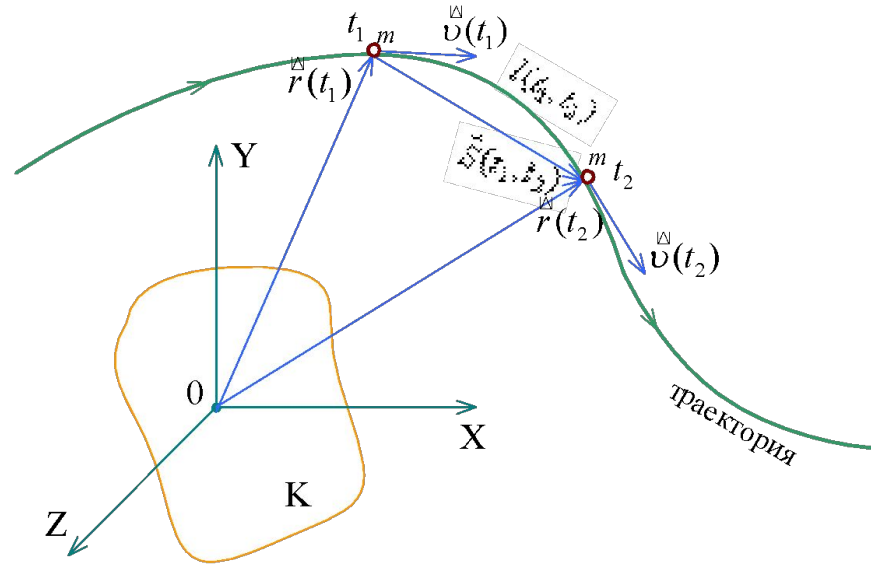


Рис.1.2

- радиус-вектор в момент  $t_1$ ,  $r(t_2)$  – радиус-вектор в момент  $t_2$ ,
- $s(t_1, t_2)$  – перемещение за промежуток времени  $(t_1, t_2)$
- $l(t_1, t_2)$  – путь за  $(t_1, t_2)$  (длина отрезка траектории),
- $v(t_1)$  – мгновенная скорость в момент времени  $t_1$ ,
- $v(t_2)$  – мгновенная скорость в момент  $t_2$ .

**PS.** Векторы скорости  $\vec{v}(t_1)$  и  $\vec{v}(t_2)$  – касательные к траектории.

Очевидно:

$$\vec{s}(t_1, t_2) = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \equiv \Delta \vec{r} \quad . \quad (1.4)$$

При малых  $\Delta t \equiv t_2 - t_1$  очевидно, что

$$|\vec{s}(t_1, t_2)| \approx l(t_1, t_2) \quad . \quad (1.5)$$

**Средняя скорость**

$$\vec{v}_{cp}(t_1, t_2) \equiv \frac{\vec{s}(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} \equiv \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad . \quad (1.6)$$

**Мгновенная скорость**

$$\vec{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{cp}(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad . \quad (1.7 \text{ а})$$

**PS.** Другой вид математической записи («точка» обозначает производную по времени)

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}} \quad . \quad (1.7 \text{ б})$$

**Средняя путевая скорость**

$$v_{cp}^{(\text{п})} \equiv \frac{l(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} \equiv \frac{\Delta l}{\Delta t} \quad , \quad (1.8)$$

$\Delta l \equiv l(t_2, t_1)$  – путь, пройденный за  $\Delta t \equiv t_2 - t_1$ . При  $\Delta t \rightarrow 0$  получаем:

**Мгновенная путевая скорость (при  $\Delta t \rightarrow 0$ ):**

$$v^{(\boxtimes)} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} \quad (1.9)$$

Или

$$v^{(\boxtimes)} \equiv \frac{dl}{dt} \quad (1.10)$$

Из (1.5), (1.6), (1.7а), (1.8) и (1.9), следует, что мгновенная путевая скорость совпадает с модулем вектора мгновенной скорости  $|v^{\boxtimes}| \equiv v$  (подумать!):

$$v^{(\boxtimes)} = \dot{v} \quad (1.11)$$

**Среднее ускорение за промежуток времени  $(t_1, t_2)$  :**

$$a_{cp}^{\boxtimes}(t_1, t_2) \equiv \frac{v^{\boxtimes}(t_2) - v^{\boxtimes}(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (1.12)$$

**Мгновенное ускорение (в момент  $t$ ):**

$$a(t) \equiv \frac{dv^{\boxtimes}}{dt} \quad (1.13)$$

Очевидно:

$$a \equiv \frac{v^{\boxtimes}}{t} \quad (1.14)$$

**PS.1** Если закон движения задан, например, известна зависимость  $r^{\boxtimes}(t)$ , то мы имеем о движении **полную информацию**, и все величины, определённые равенствами (1.6) – (1.14) легко вычисляются, точно так же, как и их проекции на декартовы оси.

**PS.2** Переход  $r^{\boxtimes}(t) \rightarrow v^{\boxtimes}(t)$  и  $v^{\boxtimes}(t) \rightarrow a^{\boxtimes}(t)$  выполняется с помощью дифференцирования.

Обратно:  $\overset{\boxminus}{v}(t) \rightarrow \overset{\boxminus}{r}(t)$ ,  $\overset{\boxminus}{a}(t) \rightarrow \overset{\boxminus}{v}(t)$  выполняется с помощью интегрирования.

Чтобы найти  $\overset{\boxminus}{r}(t)$  по заданной  $\overset{\boxminus}{v}(t)$ , необходимо знать начальное значение  $\overset{\boxminus}{r}_0 \equiv \overset{\boxminus}{r}(0)$

$$\overset{\boxminus}{r}(t) = \overset{\boxminus}{r}(0) + \int_0^t \overset{\boxminus}{v}(t') dt' = \overset{\boxminus}{r}_0 + \int_0^t \overset{\boxminus}{v}(t') dt' \quad (1.15)$$

Аналогично:

$$\overset{\boxminus}{v}(t) = \overset{\boxminus}{v}(0) + \int_0^t \overset{\boxminus}{a}(t') dt' = \overset{\boxminus}{v}_0 + \int_0^t \overset{\boxminus}{a}(t') dt' \quad (1.16)$$

### Пример 1.

Пусть МТ движется с  $\overset{\boxminus}{a} = const$ . Тогда с помощью (1.16) можно найти

$$\overset{\boxminus}{v} = \overset{\boxminus}{v}_0 + at \quad (1.17)$$

Интегрируя ещё раз, получаем закон движения:

$$\overset{\boxminus}{r}(t) = \overset{\boxminus}{r}_0 + \overset{\boxminus}{v}_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (1.18)$$

Это равенства, связывающие кинематические величины в общем случае, т.е. при произвольном движении МТ.

**Пример 2.** (из школьной жизни!). Прямолинейное равноускоренное движение.

$$2as = v^2 - v_0^2;$$

$$s = v_0 t + at^2/2;$$

$$v = v_0 + at;$$

$$a = const.$$

Очевидно, что  $v = s'(t); \quad (1.19)$

$$a = v'(t) = s''(t).$$

Векторные равенства можно записать в проекциях на оси координат:

$$(v_x)_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (1.20a, б) \quad v_x = \frac{dx}{dt}$$
$$(a_x)_{cp} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \quad (1.21a, б) \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t') dt' \quad (1.22)$$

$$v_x(t) = v_{0x} + \int_0^t a_x(t') dt' \quad (1.23)$$

и т.д.

## 1.2. КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ. УСКОРЕНИЕ ПРИ КРИВОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ: ТАНГЕНЦИАЛЬНОЕ И НОРМАЛЬНОЕ УСКОРЕНИЯ.

Итак 
$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}}$$

Очевидно, при криволинейном движении ускорение материальной точки отлично от нуля, т.к. вектор скорости изменяется по величине и по направлению.

Представим вектор скорости МТ в виде

$$(1.24) \quad \vec{v} = v\vec{\tau}$$

где

$$|\vec{\tau}| = 1 \quad (1.25)$$

т.е.  $\vec{\tau}$  – единичный вектор, направленный по скорости  $\vec{v}$ .

Продифференцируем уравнение (1.24),:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Обозначим:

$$\vec{a}_\tau \equiv \frac{dv}{dt}\vec{\tau} \quad (1.27)$$

$$\vec{a}_n \equiv v\frac{d\vec{\tau}}{dt} \quad (1.28)$$



Тогда:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \quad (1.29)$$

Первое слагаемое в (1.29)  $\vec{a}_\tau$  – **касательное** или **тангенциальное** ускорение:

при  $\vec{a}_\tau \uparrow \uparrow \vec{v} \quad \left(\frac{dv}{dt} > 0\right)$

при  $\vec{a}_\tau \uparrow \downarrow \vec{v} \quad \left(\frac{dv}{dt} < 0\right)$

Второе слагаемое -  $\vec{a}_n$  называется **нормальной составляющей**,

она нормальна, т.е. перпендикулярна, к вектору скорости (см. ниже!).

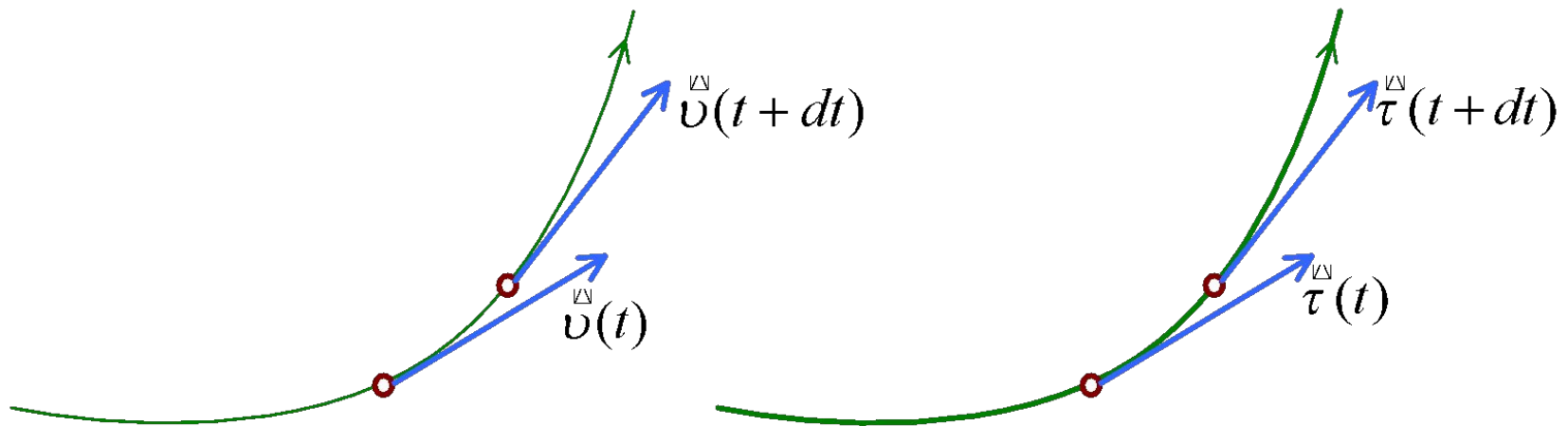


Рис.1.3

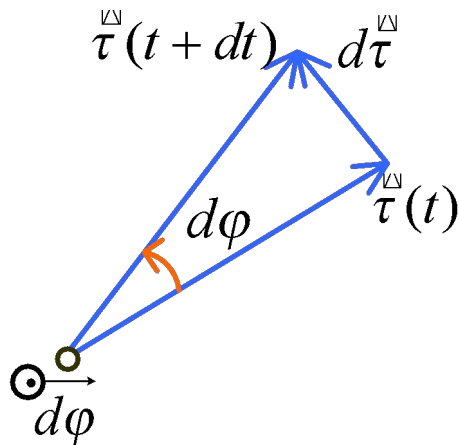


Рис.1.4

Можно считать:

$$d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}(t) \quad (1.31)$$

Рассматривая этот треугольник как бесконечно малый сектор, имеем

$$\frac{|d\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|} = |d\varphi| \quad (1.32)$$

Но  $|\vec{\tau}| = 1$ . Отсюда

$$|d\vec{\tau}| = |d\varphi| \quad (1.33)$$

Если ввести бесконечно малый вектор поворота  $\vec{d\varphi}$ , направление которого указано на рисунке 1.4 – «к нам», – то будем иметь с учётом (1.31) и (1.33):

$$d\tau^{\boxtimes} = \left[ \vec{d\varphi}, \tau^{\boxtimes} \right] \quad (1.34)$$

Таким образом, (см. (1.31), (1.28)),

$$(1.35) \quad \mathbf{a}_n^{\boxtimes} \perp \mathbf{v}^{\boxtimes}$$

Следовательно, равенство (1.29) – разложение вектора ускорения на две взаимно перпендикулярные составляющие.

Далее,  $\mathbf{a}_n^{\boxtimes}$  можно представить в виде

$$\mathbf{a}_n^{\boxtimes} = v \left[ \frac{\vec{d\varphi}}{dt}, \tau^{\boxtimes} \right] = \left[ \frac{\vec{d\varphi}}{dt}, v \right] \quad (1.36)$$

Направления  $\mathbf{a}_\tau^{\boxtimes}$ ,  $\mathbf{a}_n^{\boxtimes}$ ,  $\mathbf{a}^{\boxtimes}$  в случае  $dv/dt > 0$  показаны на рисунке 1.5.

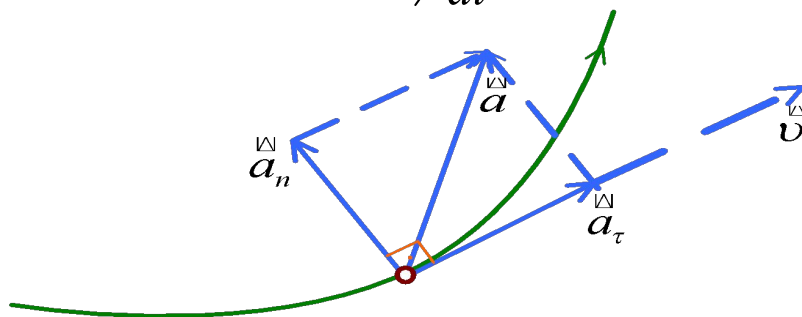


Рис.1.5

Если считать малый отрезок криволинейной траектории частью окружности, то величина

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

называется **вектором угловой скорости**.

Вектор  $\vec{\omega}$  определяет как направление поворота, так и величину угла поворота радиуса-вектора за единицу времени.

Направление движения МТ по окружности и направление  $\vec{\omega}$  связаны **правилом буравчика**.

### 1.3 НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ И УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМИ И УГЛОВЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ. РАДИУС КРИВИЗНЫ ПЛОСКОЙ ТРАЕКТОРИИ.

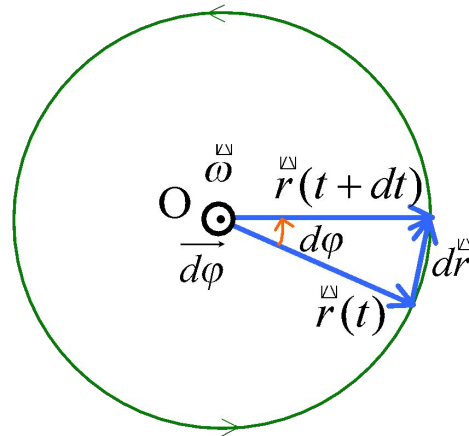


Рис.1.6

Рассмотрим окружность радиуса  $r$ , по которой движется материальная точка (рис.1.6).

**PS.**  $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t) \neq const$  При движении против часовой стрелки  $\vec{\omega}$  направлена «к нам», по часовой – «от нас».

За время  $dt$  радиус-вектор  $\vec{r}$  изменится на  $d\vec{r}$ : от значения  $\vec{r}(t)$  до значения  $\vec{r}(t+dt)$ . Используя аналогию треугольников, построенных из векторов, которые показаны на рис. 1.4 и 1.6, нетрудно получить равенство, аналогичное соотношению (1.34):

$$d\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{d\phi}{r} \\ d\phi \end{bmatrix} \vec{r}$$

Поделив обе части (1.40) на  $dt$ , будем иметь

$$\dot{v} = \left[ \dot{\omega}, r \right]$$

Дифференцируя (1.41), находим ускорение:

$$a = \left[ \frac{d\omega}{dt}, r \right] + [\omega, v]$$

Второе слагаемое в (1.42) ( см. (1.36) ) есть нормальное ускорение:

$$[\omega, v] = a_n$$

Тогда первое, очевидно, равно  $a_\tau$ :

$$a_\tau = \left[ \frac{d\omega}{dt}, r \right]$$

Введём новое определение: **угловым ускорением** МТ назовём величину

$$\varepsilon \equiv \frac{d\omega}{dt}$$

Теперь ускорение её запишется с учётом (1.41) в виде

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{r}]] \quad (1.46)$$

Двойное векторное произведение в (1.46) вычислим по известной математической формуле

$$[\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}) \quad (1.47)$$

что даёт

$$[\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{r}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega}, \vec{\omega}) \quad (1.48)$$

Учитывая, что  $\vec{\omega} \perp \vec{r}$  получаем:

$$[\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{r}]] = -\vec{\omega}^2 \vec{r} \quad (1.49)$$

Таким образом, в разложении (1.29)

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

слагаемые имеют вид:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] \quad \vec{a}_n = -\vec{\omega}^2 \vec{r} \quad (1.50 \text{ а, б})$$

Очевидно, нормальная составляющая ускорения – это хорошо известно из школьного курса **центростремительное ускорение**.

Ускорение материальной точки, движущейся по окружности, называют также **полным ускорением**.

Рассмотрим аналогию между ускоренными прямолинейным и криволинейным движениями (на примере МТ, движущейся по окружности).

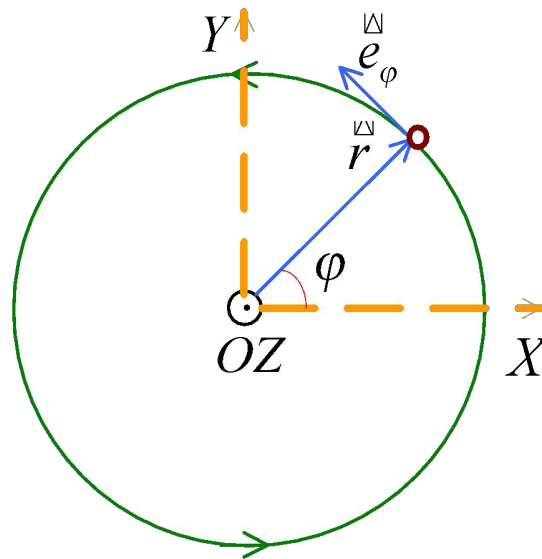


Рис.1.7

Ось  $OZ$  направлена «к нам»,  $\overset{\curvearrowright}{e}_\varphi$  – единичный вектор, указывающий направление отсчёта положительных углов, которое связано с направлением  $OZ$  правилом буравчика

Для движения вдоль оси  $OX$  имеем

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.51a, б)$$



Для движения по окружности:

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} \quad \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (1.52 \text{ а, б})$$

Равнопеременное движение вдоль оси описывается равенствами:

$$a_x = \text{const} \quad (1.53 \text{ а})$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad (1.53 \text{ б})$$

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2} \quad (1.53 \text{ в})$$

$$\Delta x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2} \quad (1.53 \text{ г})$$

Равнопеременное движение по окружности:

$$\varepsilon_z = \text{const} \quad (1.54 \text{ а})$$

$$\varepsilon_z = \text{const} \quad (1.54 \text{ б})$$

$$\omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z t \quad (1.54 \text{ в})$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2} \quad (1.54 \text{ г})$$

где  $\Delta\varphi$  – угловое перемещение материальной точки.

$\Delta\varphi$

Таблица соответствия линейных и угловых величин

линейные	$\vec{dr}$	$\vec{v}$	$\vec{a}_\tau$	$x$	$v_x$	$a_x$
угловые	$\vec{d\phi}$	$\vec{\omega}$	$\vec{\varepsilon}$	$\phi$	$\omega_z$	$\varepsilon_z$

Уравнения, связывающие линейные и угловые переменные, характеризующие движение МТ по окружности ( $|\vec{r}| = R$ ):

$$\vec{dr} = [\vec{d\phi}, r] \quad ; \quad |\vec{dr}| = |\vec{d\phi}| \cdot R \quad (1.55 \text{ а, б})$$

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, r] \quad ; \quad v = \omega R \quad (1.56 \text{ а, б, в}) \quad v = \omega_z R$$

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, r] \quad ; \quad a_\tau = \varepsilon R \quad (1.57 \text{ а, б, в}) \quad a_\tau = \varepsilon_z R$$

Здесь  $v_\phi, a_\phi$  – проекции скорости и ускорения на вектор  $\vec{e}_\phi$ ,

$$|\vec{v}| = v \quad ; \quad |\vec{a}_\tau| = a_\tau \quad (1.58 \text{ а, б})$$

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r} \quad ; \quad a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \quad (1.59 \text{ а, б})$$

Малую окрестность точки плоской криволинейной траектории материальной точки можно рассматривать как малую дугу некоторой окружности. Радиус этой окружности – **радиус кривизны траектории** в окрестности данной точки,  $R_{кр}$ . Эта величина удовлетворяет равенству аналогичному (1.59 б).

$$a_n = \frac{v^2}{R_{кр}} \quad (1.60)$$