Математика
Часть 2

УГТУ-УПИ

2007 г.

Лекция 12

ДУ высших порядков.

1. Задача Коши для уравнения порядка n.

Требуется найти решение ДУ n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}),$$

удовлетворяющего заданным начальным условиям:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \\ .... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Теорема Коши (теорема существования и единственности решения ДУ)

Т

Если в уравнении

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}),$$

функция $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ и её частные

производные по аргументам $y, y', ..., y^{(n-1)}$

непрерывны в области, содержащей точку

$$x = x_0, \ \ y = y_0, \ \ y' = y_0', ..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)},$$

то существует единственное решение $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Частное решение ДУ (решение задачи Коши) может быть найдено из общего решения по заданным начальным условиям, из которых получают систему уравнений для определения постоянных $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0$:

$$\begin{cases} y\left(x_0, c_1^0, ..., c_n^0\right) = y_0, \\ y'\left(x_0, c_1^0, ..., c_n^0\right) = y_0', \\ ...... \\ y^{(n-1)}\left(x_0, c_1^0, ..., c_n^0\right) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Решение задачи Коши ДУ n-го порядка имеет вид:

$$y = \varphi\left(x, c_1^0, ..., c_n^0\right).$$

2. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

I. $y^{(n)} = f(x).$ (правая часть зависит только от x)

Общее решение получается путем n-кратного интегрирования:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)',$$

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + c_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + c_1x + c_2, ...,$$

$$y = \int ... \int f(x)dx...dx + \frac{c_1x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{c_2x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + c_n.$$

Пример.

Найти частное решение ДУ $y''' = e^{2x}$,

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 0.$$

Решение.

$$y'' = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c_1,$$

$$y' = \frac{1}{4} e^{2x} + c_1 x + c_2,$$

$$y = \frac{1}{8} e^{2x} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3.$$

Из начальных условий определяем постоянные

c_1, c_2, c_3 :

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{1}{8} + c_3, \\ -1 = \dfrac{1}{4} + c_2, \\ 0 = \dfrac{1}{2} + c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\dfrac{1}{2}, \\ c_2 = -\dfrac{5}{4}, \\ c_3 = \dfrac{7}{8} \end{cases}$$

Частное решение $$y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}.$$

II. $F\left(x, y^{(k)}, ..., y^{(n)}\right) = 0.$

(нет ***y*** и её производных до **(k-1)-го** порядка)

Подстановка $y^{(k)} = P\left(x\right)$ понижает порядок

уравнения на k :

$$\boxed{1)\ F(x, p, p', ..., p^{(n-k)}) = 0}$$

если $P = P(x, C_1, ..., C_{n-k})$***- общее решение 1),***

то $\boxed{2)\ y^{(k)} = P(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})}$

***- ДУ типа* I.**

***Пример*.**

Найти общее решение ДУ $xy''' + y'' - x - 1 = 0.$

Решение.

Уравнение не содержит $y, y'.$

Подстановка $\boxed{y'' = P(x)}$ $\Rightarrow$ $y''' = \dfrac{dP}{dx}.$

$$P' + \frac{P}{x} = \frac{1}{x} + 1$$ - линейное для функции $P(x)$

Подстановка $\boxed{P(x) = u(x)v(x)}$ $\Rightarrow$

$$P = \frac{x}{2} + 1 + \frac{c_1}{x}, \qquad y'' = \frac{x}{2} + 1 + \frac{c_1}{x},$$

$$y' = \int\left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{c_1}{x}\right)dx + c_2 = \frac{x^2}{4} + x + c_1 \ln|x| + c_2,$$

$$y = \int\left(\frac{x^2}{4} + x + c_1 \ln|x| + c_2\right)dx + c_3,$$

$$y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + c_1 x(\ln x - 1) + c_2 x + c_3.$$

III. $F\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0.$ (Уравнение не содержит x).

Подстановка $y' = P\left(y\right)$

$$y'' = \frac{dP\left(y\right)}{dx} = \frac{dP}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dy}P$$

$$y'' = P'\left(y\right) \cdot P, \qquad y''' = ...$$

понижает порядок уравнения на 1.

***Пример*.**

Найти общее решение ДУ $\left(y'\right)^2 + 2yy'' = 0.$

Решение.

Уравнение явно не содержит x.

Подстановка $y' = P\left(y\right) \Rightarrow y'' = \frac{dP}{dy}P.$

$$P^2 + 2yP'P = 0 \Rightarrow P + 2yP' = 0$$

Возможна потеря решения

$$P\left(y\right) = \frac{dy}{dx} = 0, y = const.$$

$$2yP' = -P, \qquad \frac{dP}{P} = -\frac{dy}{2y},$$

$$\ln|P| = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln c_1, \qquad P = c_1 y^{-\frac{1}{2}} = \frac{c_1}{\sqrt{y}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{\sqrt{y}}, \qquad \sqrt{y}dy = c_1 dx,$$

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = c_1 x + c_2.$$

IV. $\dfrac{d}{dx}G(x,y,y',...,y^{(n-1)})=0$

(Левая часть уравнения представлена в виде полной производной по x от некоторой функции.)

Интегрирование ***понижает порядок*** уравнения на единицу.

Пример.

$$xy''' + y'' - x - 1 = 0, \quad y - ?$$

Решение.

$$(xy'')' = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)' \Rightarrow xy'' = \frac{x^2}{2} + x + c_1,$$

$$y'' = \frac{x}{2} + 1 + \frac{c_1}{x}$$ - ДУ типа I.

$$y' = \frac{x^2}{4} + x + c_1 \ln|x| + c_2,$$

$$y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + c_1 x(\ln x - 1) + c_2 x + c_3.$$

3. <u>Линейные дифференциальные уравнения.</u>

Линейным называется ДУ, содержащее функцию y и её производные в первой степени.

Линейное дифференциальное уравнение называется неоднородным (**НЛДУ**) если оно имеет вид:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=f(x),$$

где $a_i \quad (i=1,2,...,n), \quad f(x)\neq 0$ –

непрерывные функции от x или постоянные.

Линейное ДУ называется однородным **(ОЛДУ)**, если $f(x)=0$.

Рассмотрим ОЛДУ второго порядка:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Пусть $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x)$ - частные решения ДУ.

Два решения ДУ y_1, y_2 называются **линейно независимыми**, если их линейная комбинация $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$ лишь в случае когда $c_1 = c_2 = 0.$

(y_1, y_2**- линейно зависимы** $\Leftrightarrow$ $y_2 = cy_1.$ **)**

Пример.

$y_1 = e^x, \;\; y_2 = 3e^x$ – линейно зависимы,

$y_1 = e^x, \;\; y_2 = e^{-x}$ – линейно независимы.

Для функций $y_1(x),\ y_2(x)$ определитель

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

называется **определителем Вронского.**

Т. Если функции y_1, y_2 линейно зависимы на $[a,b]$, то $W(y_1, y_2) \equiv 0,\ x \in [a,b]$.

Доказательство:

$$y_2 = \lambda y_1 \ \Rightarrow\ y_2' = \lambda y_1',$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0.$$

Т. Если функции y_1, y_2 линейно независимы на $[a,b]$, то $W(y_1, y_2) \neq 0,\ x \in [a,b]$.

Доказательство:

Допустим $W(y_1, y_2) = 0, \quad \Rightarrow y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0.$

Для $y_1 \neq 0:$ $\dfrac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = 0 \quad \Rightarrow$

$\dfrac{y_2}{y_1} = const.$ Противоречие. $\Rightarrow W \neq 0.$

Т. Если y_1, y_2 - линейно независимые частные решения ОЛДУ второго порядка

$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$ то общее решение этого уравнения равно их линейной комбинации:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

c_1, c_2 - произвольные постоянные.

Доказательство:

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0, \quad y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0.$$

Подставим $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ в исходное уравнение:

$$\left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right)'' + a_1 \left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right)' + a_2 \left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right) =$$

$$c_1\left(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1\right) + c_2\left(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2\right) = 0,$$

$\Rightarrow$ $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ – решение ОЛДУ.

Докажем, что при любых начальных условиях

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_0'$$

можно подобрать c_1, c_2 так , чтобы решение

удовлетворяло этим начальным условиям.

Пусть
$$y_1(x_0) = y_{10},\quad y_2(x_0) = y_{20},$$
$$y_1'(x_0) = y_{10}',\ \ y_2'(x_0) = y_{20}'.$$

Подставим начальные условия в $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$:

$$\begin{cases} y_0 = c_1 y_{10} + c_2 y_{20} \\ y_0' = c_1 y_{10}' + c_2 y_{20}' \end{cases} \qquad W(x_0) = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} \neq 0,$$

т.к. y_1, y_2 - линейно независимы. $\Rightarrow$

Система уравнений имеет единственное решение

$$c_1, \; c_2 \; .$$

Любые два линейно независимых частных решения y_1 и y_2 ОЛДУ второго порядка называются **фундаментальной системой решений** этого уравнения.

Общее решение является линейной комбинацией фундаментальной системы решений:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 .$$

Т.

Если известно одно частное решение ОЛДУ второго порядка y_1 ,то второе частное решение, линейно независимое с первым, определяется по формуле

$$\boldsymbol{y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx.}$$