Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ

Институт права и национальной безопасности
Факультет национальной безопасности

Тема № 6

«ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Лекция № 1

профессор Резниченко Александр Васильевич

Москва – 2020

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Основные понятия
2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши
3. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными
4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка
5. Дифференциальные уравнения второго порядка

Литература

1. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов: Учебное пособие. – СПб: Питер, 2016.

2. Ахтямов М.А. Математика для социологов и экономистов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

3. Попов А.М. Сотников В. Н. Высшая математика для экономистов: учебник и практикум для прикладного бакалавриата. – М.: Изд. "Юрайт", 2014.

4. Высшая математика для экономического бакалавриата: Учебник и практикум / Под ред. проф. Кремера Н.Ш. – М.: Изд. "Юрайт", 2016.

ПЕРВЫЙ ВОПРОС

Основные понятия.

Определение.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее искомую функцию некоторой переменной, эту переменную и производные различных порядков данной функции:

$$G(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

где G – некоторая функция от $n+2$ переменных ($n \geq 1$).

Определение.

Если искомая функция зависит от одной переменной, то диф... уравнение называется *обыкновенным* ... уравнение в частных производных ...

... ения первообразной ... для за... $f(x)$ можно рассматривать как задачу о нахождении функции $F(x)$, удовлетворяющую уравнению $F'(x) = f(x)$.

Термин «*дифференциальные уравнения*» ввел **Г.В. Лейбниц**.

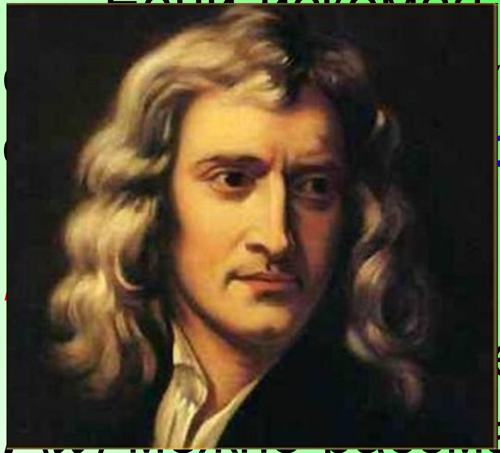
«Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa»

«Полезно решать дифференциальные уравнения»

И. Ньютон

Ньютон ... поставил две задачи:

1. По данному соотношению между *флюентами* определить соотношение между *флюксиями*.
2. По данному уравнению, содержащему *флюксии*, найти соотношение между *флюентами*.



Исаак Ньютон (1643–1727)

Г.В. Лейбниц (1646–1716)

Определение.

Порядок n старшей производной, входящей в уравнение, называется ***порядком*** этого ***дифференциального уравнения***:

$F'(x) = f(x)$ – уравнение первого порядка;

$x^2(y''')^4 - x(y')^5 + 8 = 0$ – уравнение третьего порядка.

Определение.

Дифференциальное уравнение n-го порядка называется ***разрешенным относительно старшей производной***, если оно имеет вид

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \ ..., y^{(n-1)}),$$

где F – некоторая функция от $n+1$ переменной.

Пример.

$y' = 2y + 7x - 2$ – разрешено относительно старшей производной,

$y' + \sin y' - 4y^3 + 3x - 2 = 0$ – нет.

Определение.

Решением дифференциального уравнения

$$G(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

называется такая функция $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$, которая при подстановке ее в уравнение обращает его в тождество.

Пример.

Функция $\boldsymbol{y}$ = sin $\boldsymbol{x}$ есть решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = 0.$$

Пример.

Решить уравнение $y'' = x$.

Решение.

Поскольку $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$, то данное уравнение равносильно $dy' = x dx$.

Выполняя почленное интегрирование получаем $y' = \dfrac{x^2}{2} + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная.

Аналогично, записывая производную как отношение дифференциалов, получаем

$$dy = \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)dx \quad \text{и} \quad \boxed{y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2,}$$

где C_2 – произвольная постоянная.

Замечание.

Решение дифференциального уравнения ***неоднозначно***.

Дифференциальное уравнение задает семейство интегральных кривых на плоскости.

Определение.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется такое его решение

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

которое является функцией переменной x и n произвольных независимых постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, получаемое из общего решения при конкретных числовых значениях этих постоянных.

Пример.

Составить дифференциальное уравнение семейства кривых

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x.$$

Решение.

Дифференцируя заданную функцию находим

$$\boxed{y'' - 2y' + y = 0.}$$

ВТОРОЙ ВОПРОС

Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши

Определение.

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно y', имеет вид:

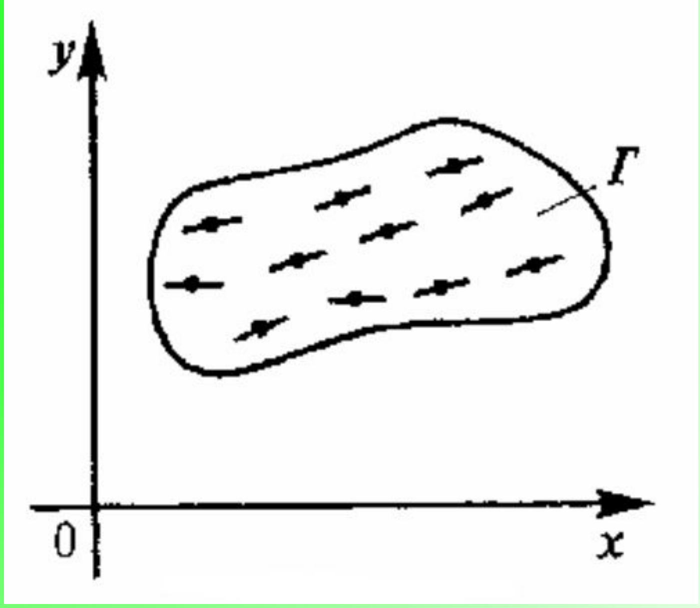
$$y' = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ – некоторая функция двух переменных, определенная и непрерывная на открытом* множестве Γ точек плоскости Oxy.

Геометрический смысл

Уравнение в каждой точке плоскости задает направление $\operatorname{tg}\alpha = f(x, y)$ касательной к интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через эту точку или ***поле направлений.***

Решить уравнение – найти семейство кривых, отвечающих заданному полю направлений.

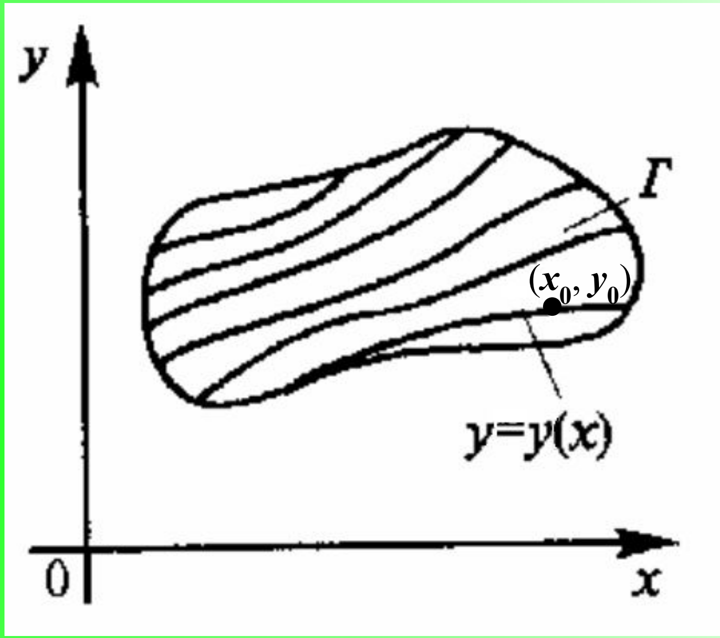


---

* *Множество точек плоскости называется* ***открытым****, если вместе с каждой своей точкой оно содержит и некоторую окрестность этой точки.*

Теорема.

Пусть в дифференциальном уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на открытом множестве Γ координатной плоскости Oxy.



Тогда

1. Для всякой точки (x_0, y_0) множества Γ ***найдется решение*** $y = y(x)$ ***уравнения*** $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y_0 = y(x_0)$.

Геометрический смысл теоремы

Через каждую точку (x_0, y_0) ***множества*** Γ ***проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения*** $y' = f(x, y)$.

Определение.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка на открытом множестве Γ координатной плоскости Oxy называется функция $y = \varphi(x, C)$, зависящая от x и произвольной постоянной C, если:

– она является решением дифференциального уравнения первого порядка при любом значении постоянной C;

– при любых начальных условиях $y_0 = y(x_0)$, $(x_0, y_0) \in \Gamma$, существует единственное значение постоянной $C = C_0$ такое, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет начальным условиям $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$.

Определение.

Частным решением дифференциального функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при определенном значении постоянной $C = C_0$.

Определение.

Решение дифференциального уравнения первого порядка на открытом множестве Γ координатной плоскости Oxy называется ***особым***, если через каждую точку его интегральной кривой проходит, по крайней мере, еще одна интегральная кривая.

ТРЕТИЙ ВОПРОС

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Определение.

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если оно может быть представлено в виде:

$$f(x)dx = g(y)dy \quad \left(\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)\right)$$

или в более общем виде

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0.$$

Определение.

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется **неполным**, если функция f явно зависит либо только от x, либо только от y.

Решение неполных дифференциальных уравнений:

1. Уравнение $\boldsymbol{y'} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ или $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ преобразуем к виду

$dy = f(x)dx,$ откуда его решение $\boxed{y = \int f(x)dx.}$

2. Уравнение $\boldsymbol{y'} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ или $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$ преобразуем к виду

$\dfrac{dy}{f(y)} = dx$ (в силу инвариантности формы дифференциала

переменные $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ равноправны), откуда его решение $\boxed{x = \int \dfrac{dy}{f(y)}.}$

Пример.

Решить уравнение $y' = y.$

Решение.

Общее решение уравнения при $\tilde{C}$ = 0 *дает частное решение* $\boldsymbol{y}$ = 0, *утраченное в процессе преобразований*.

Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

Для решения уравнения следует преобразовать его к виду, в котором дифференциал и функции переменной $\boldsymbol{x}$ *окажутся в одной части равенства, а переменной* $\boldsymbol{y}$ *– в другой, а затем проинтегрировать обе части полученного равенства*:

1. $f(x)dx = g(y)dy \;\Rightarrow\; \int f(x)dx = \int g(y)dy;$

2. $\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y) \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx \;\Rightarrow\; \int \dfrac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx;$

3. $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{M(x)}{P(x)}dx = -\dfrac{Q(y)}{N(y)}dy \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \int \frac{M(x)}{P(x)}dx = -\int \frac{Q(y)}{N(y)}dy.$$

Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

Уравнение вида

$$y' = f(ax + by)$$

где a и b – некоторые числа,
приводятся к **уравнениям с разделяющимися переменными** с помощью замены

$$z = ax + by \quad \text{или} \quad z = ax + by + c,$$

где c – некоторое число.

Пример.

Решить уравнение $(x + 2y)y' = 1.$

Решение.

Положим $z = x + 2y$. Тогда $z' = 1 + 2y'$, откуда $y' = (z' - 1)/2$.

Теперь исходное уравнение имеет вид $z(z' - 1) = 2$, допускающий ***разделение переменных***.

Действительно $z' = \frac{z+2}{z}$ или $\frac{zdz}{z+2} = dx,$ где $z \neq -2$.

Выполняя почленное интегрирование равенства получаем

$$\int \frac{zdz}{z+2} = \int dx \text{ или } x = z - 2\ln|z+2| + C.$$

Поскольку

$$\int \frac{zdz}{z+2} = \int \left(1 - \frac{2}{z+2}\right) dz = \int dz - 2\int \frac{dz}{z+2} = z - 2\ln|z+2| + C.$$

Тогда

$$x = x + 2y - 2\ln|x+2y+2| + C \text{ или } y - 2\ln|x+2y+2| = \widetilde{C},$$

где $\widetilde{C} = -\frac{1}{2}C,$ – **решение дифференциального уравнения**.

Если $z = -2$, *то функция* $y = -1 - \frac{1}{2}x$ *так же является решением исходного уравнения как и вышеуказанная неявная функция.*

ЧЕТВЕРТЫЙ ВОПРОС

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется ***линейным***, если оно имеет вид:

$$y' + f(x)y = g(x),$$

где $f(x)$, $g(x)$ – некоторые непрерывные функции переменной x.

Если функция $g(x)$ тождественно равна нулю, то уравнение называется ***однородным*** *, в противном случае – ***неоднородным***.

Способ решения.

Решение $y = y(x)$ уравнения может быть найдено в виде

$$y = u(x)v(x),$$

где $v = v(x)$ – некоторое частное решение уравнения $v' + f(x)v = 0$,

$u = u(x)$ – решение уравнения $u'v = g(x)$.

Поскольку $y' = u'v + v'u$,

то $u'v + v'u + f(x)uv = g(x)$ или $u'v + u(v' + f(x)v) = g(x)$.

---

* *Линейным дифференциальным уравнением первого порядка* ***без правой части.***

Пример.

Решить уравнение $xy' - 2y = 2x^4$.

Решение.

Разделим левую и правую части уравнения на x:

$$y' - \frac{2}{x}y = 2x^3.$$

Положим $y = u \cdot v$ и тогда $u'v + u(v' - \frac{2}{x}v) = 2x^3$.

1. $v' - \frac{2}{x}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{2}{x}v \Rightarrow \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}$. Частное решение $v = x^2$.

2. $u'v = 2x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow u = x^2 + C$.

Откуда $\boxed{y = uv = (x^2 + C)x^2 = x^4 + Cx^2.}$

Способ решения.

Неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка может быть решено ***методом вариации произвольной постоянной***, при котором сначала находят решение v ***однородного уравнения***.

Это решение (как и любое общее решение дифференциального уравнения первого порядка) зависит от постоянной C ($v = V(x, C)$).

Предполагая затем, что C является функцией переменной x, находят эту функцию $C = C(x)$ из условия, что $y = V(x, C)$ удовлет-ворят исходному уравнению.

Определение.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется ***уравнением Бернулли***, если оно имеет вид:

$$y' + f(x)y = g(x)\cdot y^n,$$

где $n \neq 0, n \neq 1$.

Это уравнение приводится к линейному с помощью подстановки $z = y^{1-n}$.

Пример.

Решить уравнение $xy' - 2y = 2x^4.$

Решение.

Решим однородное уравнение: $xy' - 2y = 0.$

$$y' = \frac{2}{x}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + \tilde{C}.$$

Или $y = Cx^2$, где $C = \pm e^{\tilde{C}}.$

Пусть $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$.

Тогда $x(C'x^2 + 2xC) - 2Cx^2 = 2x^2$ и $C' = 2x \Rightarrow C = x^2 + \hat{C}.$

Откуда решение $\boxed{y = (x^2 + \hat{C})x^2 = x^4 + \hat{C}x^2.}$

ПЯТЫЙ ВОПРОС

Дифференциальные уравнения второго порядка

Определение.

Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение, связывающее искомую функцию некоторой переменной, эту переменную и производные первого и второго порядков данной функции:

$$G(x, y, y', y'') = 0,$$

где $\boldsymbol{G}$ – некоторая функция четырех переменных.

Замечание.

В некоторых случаях решение дифференциального уравнения второго порядка может быть сведено к последовательному решению двух дифференциальных уравнений первого порядка.

Другими словами – ***данное дифференциальное уравнение допускает понижение порядка***.

Случай 1.

Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$y'' = f(x),$$

то оно решается **последовательным интегрированием**.

Случай 2.

Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$G(x, y', y'') = 0,$$

т.е. в запись уравнения не входит искомая функция $y = y(x)$, то **понижение порядка достигается с помощью замены** $z = y'$.

Пример 1.

Решить уравнение $xy'' + y' = 0.$

Решение.

Положим $z = y'.$

Тогда $z' = y''$, и исходное уравнение принимает вид $xz' + z = 0.$

Откуда $\dfrac{dz}{z} = -\dfrac{dx}{x} \Rightarrow z = \dfrac{\tilde{C}}{x}.$

Возвращаясь к первоначальной функции, получаем

$$\boxed{y' = \frac{\tilde{C}}{x} \Rightarrow dy = \frac{\tilde{C}\,dx}{x} \Rightarrow y = \tilde{C}\ln|x| + C.}$$

Пример.

Решить уравнение $2yy'' = (y')^2 + 1.$

Решение.

Положим $z = z(y) = y'$. Тогда $y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'z.$

и исходное уравнение принимает вид: $2yzz' = z^2 + 1.$

Данное уравнение – с разделяющимися переменными:

$$\frac{2zdz}{z^2+1} = \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad z = \pm\sqrt{C_1 y - 1}.$$

Возвращаясь к первоначальной замене $z = y'$, получаем

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx \Rightarrow \ldots \pm\sqrt{C_1 y - 1} = \frac{C_1}{2}(x + C_2) \text{ или } \boxed{C_1 y - 1 = \frac{C_1^2}{4}(x + C_2)^2.}$$

Случай 3.

Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$G(y, y', y'') = 0,$$

то для **понижения порядка** можно за независимую переменную взять y, а за неизвестную функцию $z = z(y) = y'$.

I этап.

Рассмотрим ***линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами***

Определение.

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

где $y = y(x)$ – искомая функция, p и q – вещественные числа, $f(x)$ – заданная непрерывная функция.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется ***однородным***; в противном случае оно называется ***неоднородным***.

Теорема.

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Если $\tilde{y}_1(x)$ и $\tilde{y}_2(x)$ – ***линейно независимые частные решения*** линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, то ***общее решение уравнения*** есть ***линейная комбинация этих частных решений***:

$$y = C_1\tilde{y}_1(x) + C_2\tilde{y}_2(x)$$

Замечание.

Дифференциальному уравнению $y'' + py' + qy = 0$ ставится в соответствие ***характеристическое уравнение***:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

где λ – переменная.

Теорема.

1. Если ***характеристическое уравнение*** $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$ имеет действительные корни λ_1 и λ_2, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то ***общее решение уравнения*** имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2. Если характеристическое уравнение имеет один корень λ (кратности 2), то ***общее решение уравнения*** имеет вид:

$$y(x) = e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x).$$

3. Если характеристическое уравнение имеет комплексные корни $\lambda = \alpha \pm i\beta$, где $\alpha = -p/2$, $\beta = \sqrt{q - p^2/4}$, то ***общее решение уравнения*** имеет вид:

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x),$$

где C_1 и C_2 – некоторые числа.

Пример.

Найти частное решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$ при следующих начальных условиях $y(0) = 3; y'(0) = 4$.

Решение.

Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, получаем его корни: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$.

Тогда общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Постоянные C_1 и C_2 находим для заданных начальных условий, решая систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ C_1 + 2C_2 = 4, \end{cases}$$ откуда $C_1 = 2$, $C_2 = 1$.

Следовательно частное решение $\boxed{\tilde{y} = 2e^x + e^{2x}.}$

Пример.

II *этап.*

Рассмотрим решение ***линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами***.

Первый способ.

Метод вариации произвольных постоянных.

Пусть найдено общее решение $y(x) = C_1\tilde{y}_1(x) + C_2\tilde{y}_2(x)$ соответствующего однородного уравнения.

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1(x)\tilde{y}_1(x) + C_2(x)\tilde{y}_2(x),$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – функции переменной x.

Эти функции могут быть найдены в результате решения системы:

$$\begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1(x) + C_2'(x)\tilde{y}_2(x) = 0, \\ C_1'(x)\tilde{y}_1'(x) + C_2'(x)\tilde{y}_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

Пример.

Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = e^x.$

Решение.

Решение однородного уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0,$ основано на решении характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

корнями которого будут $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2.$

Тогда общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Полагая теперь, что C_1 и C_2 — *функции переменной* x, определим первые производные этих функций решая систему:

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{2x} = 0, \\ C_1' e^x + C_2' 2e^{2x} = e^x. \end{cases}$$ Откуда $C_1' = -1,\ C_2' = e^{-x}.$

Полученные дифференциальные уравнения $C_1' = -1,\ C_2' = e^{-x}$ являются уравнениями с разделяющимися переменными.

Решая их получаем:

$$C_1 = -x + C_3,\ C_2 = -e^{-x} + C_4,$$

где $\boldsymbol{C}_3$ и $\boldsymbol{C}_4$ — некоторые постоянные.

Таким образом, окончательное решение уравнения имеет вид:

$$y = (-x + C_3)e^x + (-e^{-x} + C_4)e^{2x} = C_3e^x + C_4e^{2x} + (-x-1)e^x.$$

Замечание.

Обратите внимание на структуру полученного решения.

Первые два слагаемых — это ***общее решение однородного уравнения***, соответствующего исходному дифференциальному уравнению.

Последнее слагаемое, как нетрудно убедиться, — ***частное решение исходного уравнения***.

Второй способ.

Теорема.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения равно ***сумме общего решения*** соответствующего ***однородного уравнения*** и ***частного решения*** исходного ***неоднородного уравнения***.

При этом вид частного решения устанавливается по виду правой части уравнения, и задача сводится к отысканию коэффициентов этого частного решения.

Вариант 1.

Если $f(x) = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ – многочлен порядка n, то ***частное решение*** ищется в виде

$$\tilde{y}(x) = Q_n(x)x^r,$$

где $Q_n(x)$ – некоторый многочлен порядка n, коэффициенты которого подлежат определению;

r – число корней характеристического уравнения, равных 0.

Пример.

Найти общее решение уравнения $y'' + 3y' = x^2 + x + 2$.

Решение.

Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3\lambda = 0$.

Его корни $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -3$ – действительные и различные.

Следовательно, ***общее решение однородного уравнения*** имеет вид

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-3x}.$$

Частное решение исходного уравнения надо искать в виде

$$\tilde{y}(x) = (Ax^2 + Bx + C) \cdot x$$

поскольку $n = 2$ и $r = 1$.

Для определения коэффициентов A, B и C подставим $\tilde{y}(x)$ в исходное уравнение, имея в виду, что

$$\tilde{y}'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad \tilde{y}''(x) = 6Ax + 2B.$$

Получаем

$$6\boldsymbol{Ax} + 2\boldsymbol{B} + 9\boldsymbol{Ax}^2 + 6\boldsymbol{Bx} + 3\boldsymbol{C} = \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x} + 2.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях $\boldsymbol{x}$ в обеих частях равенства, получим систему трех уравнений для трех неизвестных:

$$\begin{cases} 9A = 1, \\ 6A + 6B = 1, \\ 2B + 3C = 2. \end{cases}$$

Ее решением являются числа $\boldsymbol{A} = 1/9$, $\boldsymbol{B} = 1/18$, $\boldsymbol{C} = 17/27$.

И так, ***общее решение исходного линейного неодно-родного дифференциального уравнения***:

$$y_{общ}(x) = \tilde{y}(x) + y(x) = \frac{x}{54}(6x^2 + 3x + 34) + C_1 + C_2 e^{-3x}.$$

Вариант 2.

Если $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, то **частное решение** ищется в виде

$$\widetilde{y}(x) = Q_n(x)x^r e^{\alpha x},$$

где $Q_n(x)$ – многочлен той же степени, что и $P_n(x)$;

r – число корней характеристического уравнения, равных α.

Здесь, как и в первом варианте, подлежат определению коэффициенты многочлена $Q_n(x)$.

Замечание.

Если неоднородность $f(x)$ исходного уравнения имеет вид:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x),$$

и $u_i(x)$ – частные решения уравнений $y'' + py' + qy = f_i(x)\ \forall i = 1 \div n.$

то $u(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)$ – **частное решение исходного уравнения**.

Вариант 3.

Если $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$, где a, b и β – известные числа, то **частное решение** ищется в виде

$$\widetilde{y}(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)x^r,$$

где A и B – подлежащие определению коэффициенты;

r – число корней характеристического уравнения, равных $i\beta$.

Благодарю за внимание, лекция окончена!