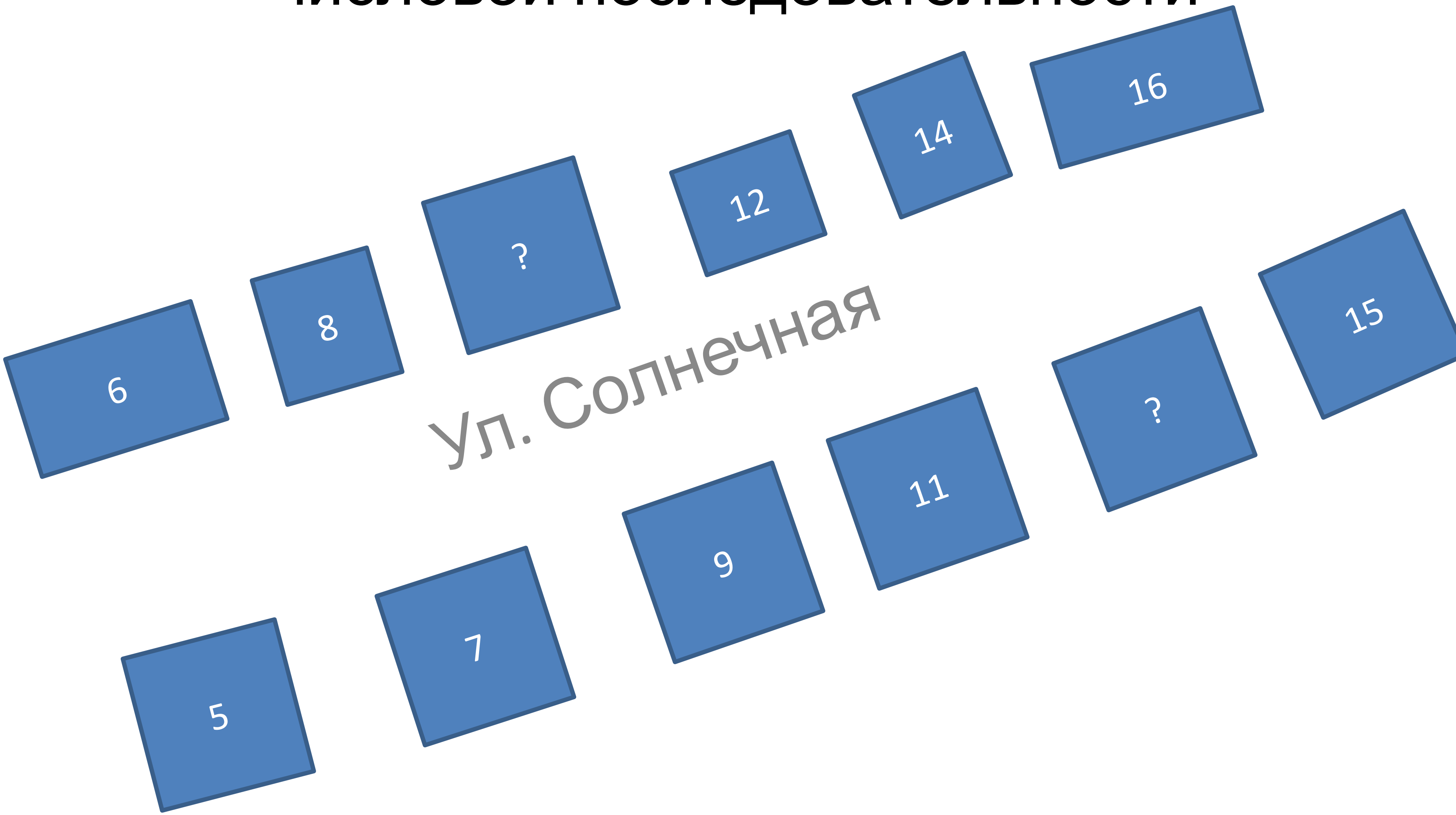
Арифметическая и геометрическая прогрессии

Лекция 1.Последовательность

Нумерация домов на улице как пример числовой последовательности



Последовательности

Номера домов на улице образуют последовательность целых чисел. Улица города имеет две стороны.

На одной стороне улицы стоят дома с четными номерами, а на другой – с нечетными. Запишем последовательность номеров домов нечетной стороны улицы:

1, 3, 5, 7, 9, 11, …...в общем виде обозначим последовательность так: $\{a_n\}$,

Запишем последовательность номеров домов четной стороны улицы:

2, 4, 6, 8, 10, 12, ……в общем виде обозначим последовательность так: $\{b_n\}$

Мы записали по 6 членов каждой последовательности. Каждый член последовательности имеет свой номер.

Чему равен третий член последовательности $\{a_n\}$? Ответ: a_3 = ….

Примеры последовательностей

Последовательность положительных четных чисел:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ………

Последовательность положительных нечетных чисел:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, …………

Последовательность квадратов целых чисел:

1, 4, 9, 16, 25, 36, ………..

Добавьте к каждой последовательности еще по 5 чисел

Примеры последовательностей

Пример 1. Последовательность дробей $c = \frac{1}{n+1}$ выглядит так:

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5}\ \ldots\ldots\ldots$$

Чему равен 13-й член данной последовательности? Ответ: $c_{13} =$ …….

Найдите 17-й, 21-ый, 99-ый члены данной последовательности.

Последовательности часто задают с помощью формулы n – ного члена последовательности. Индекс n обозначает номер члена последовательности.

Пример 2. Последовательность задана формулой: $y_n = n^2 - 3n$

Подставляя в формулу вместо n натуральные числа 1, 2, 3 и т.д., получим значения для членов последовательности:

$y_1 = 1 - 3 = -2$; $y_2 = 4 - 6 = -2$; $y_3 = 9 - 9 = 0$;

Вычислите самостоятельно члены y_4, y_5, y_6

Вопросы для закрепления

Какой член последовательности a_1 , a_2 , a_3 ……. ,

1) следует за членом a_{99} , a_{200} , a_n , a_{n-1} , a_{n+1} , a_{2n}

Ответ: …… , ……. , …… , ……, ………, ……..

2) предшествует члену a_{71} , a_{100} , a_{n-2} , a_{n+3} , a_{3n}

Ответ: ………, …..., ……, ………, ………,

Последовательности бывают возрастающие и убывающие.

Если $a_{n+1} > a_n$ для любого номера n, то такая последовательность называется возрастающей

Если $a_{n+1} < a_n$ для любого номера n, то такая последовательность называется убывающей.

Последовательности бывают бесконечные и ограниченные.

РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА

Мы рассмотрели примеры последовательностей, заданных формулами n-ного члена.

Иногда последовательности задают по-другому:

каждый следующий член последовательности выражают через предыдущий, например: $a_1 = 5$ $a_{n+1} = a_n^2 + 5$

Найдем первые 4 члена последовательности:

$a_1=5$;

$a_2 = 5^2+5=30$;

$a_3= 30^2+5=905$;

$a_4= 905^2+5=819030$

Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия – это последовательность $\{a_n\}$, заданная таким образом:

$$a_1 = a; \quad a_{n+1} = a_n + d, n \in N$$

Арифметическая прогрессия – это последовательность, каждый элемент которой, кроме первого, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d.

Это число d называют РАЗНОСТЬ арифметической прогрессии.

ПРИМЕРЫ:

$2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots \quad a_1 = 2;\ a_{n+1} = a_n + 3;\ \ d = 3;$

$17, 14, 11, 8, 5, 2, -1, -4 \ldots \quad a_1 = 17; a_{n+1} = a_n + (-3); d = -3;$

$8, 8, 8, 8, \ldots, 8, \ldots \quad a_1 = 8;\ a_{n+1} = a_n + 0;\ \ d = 0;$

Если арифметическую прогрессию оборвать на каком-то k - м элементе, получим конечную арифметическую прогрессию $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$.

Назовите способ задания арифметической прогрессии.

Свойства арифметической прогрессии

1. Пусть $\{a_n\}$ - арифметическая прогрессия; тогда ее n - й элемент можно задать формулой

$$a_n = a_1 + d \cdot (n-1).$$

Доказательство:
Вспомним определение арифметической прогрессии:

$$a_1 = a\ , \qquad a_{n+1} = a_n + d \qquad (1)$$

Найдем разность двух соседних членов прогрессии – перенесем a_n из правой части
выражения в левую со знаком минус, и получим равенство:

$$a_{n+1} - a_n = d \qquad (2)$$

Это равенство должно выполняться для любого значения n.
Выразим a_n и a_{n+1} через формулу n-ного члена и проверим, будет ли выполняться
равенство (2)

$$a_{n+1} = a_1 + d\,(n+1-1) = a_1 + dn\ ; \quad a_n = a_1 + d\,(n-1)$$

Найдем разность членов a_{n+1} и a_n

$$a_{n+1} - a_n = a_1 + d_n - a_1 - d\,(n-1) = a_1 + dn - a_1 - dn + d = d \qquad (3)$$