Раздел 3

ОСНОВЫ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

Понятие принадлежности

Пусть U есть множество (универсальное множество), A – подмножество U: $A \subset U$.

Тот факт, что элемент x множества U есть элемент подмножества A, или, как еще говорят, принадлежит A, обычно обозначают с помощью символа $\in$: $x \in A$.

Для выражения этой принадлежности можно использовать и другое понятие –*характеристическую функцию* $\mu_A(x)$, значения которой указывают, является ли (да или нет) x элементом A:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A \\ 0, \text{ если } x \notin A \end{cases}.$$

Пример

Пример 2.1. Рассмотрим конечное множество из пяти элементов $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ и пусть $A=\{x_2,x_3,x_5\}$.

Выпишем для каждого элемента из U степень его принадлежности множеству A:

$$\mu_A(x_1)=0,\ \mu_A(x_2)=1,\ \mu_A(x_3)=1,\ \mu_A(x_4)=0,\ \mu_A(x_5)=1.$$

Это позволяет представить A через все элементы множества E, сопроводив каждый из них значением его функции принадлежности:

$$A=\{(x_1,\ 0),\ (x_2,\ 1),\ (x_3,\ 1),\ (x_4,\ 0),\ (x_5,\ 1)\}.$$

Понятие нечеткого подмножества

Рассмотрим подмножество A множества U, определенное в примере 2.1. Каждый из пяти элементов U или принадлежит или не принадлежит A. Характеристическая функция принимает только значения 0 или 1.

Представим теперь, что характеристическая функция может принимать любое значение в интервале [0, 1]. В соответствии с этим элемент x_i множества U может не принадлежать A ($\mu_A=0$), может быть элементом A в небольшой степени (μ_A близко к 0), может более или менее принадлежать A (μ_A ни слишком близко к 0, ни слишком близко к 1), может в значительной степени быть элементом A (μ_A близко к 1) или, наконец, может быть элементом A (μ_A=1). Таким образом, понятие принадлежности получает интересное обобщение, приводящее как это мы увидим, к очень полезным результатам.

Математический объект, определяемый выражением:

$$\tilde{A} = \{(x_1|0,2),\ (x_2|0),\ (x_3|0,3),\ (x_4|1),\ (x_5|0,8)\}$$

где x_i – элемент универсального множества U, а число после вертикальной черты дает значение характеристической функции на этом элементе, будем называть нечетким подмножеством множества U и обозначать $\tilde{A} \subset U$.

Определение нечеткого множества

Определение 2.1: Пусть E есть множество, счетное или нет, и x – элемент E. Тогда нечетким подмножеством A множества E называется множество упорядоченных пар

$$\{(x,\mu_A(x))\},\ \ \forall x \in E,$$

где $\mu_A(x)$ – степень принадлежности x в A.

Таким образом, если $\mu_A(x)$ принимает свои значения во множестве значений M функции принадлежности или, иначе говоря, во множестве принадлежностей, то можно сказать, что x принимает значение в M посредством функции $\mu_A(x)$. Таким образом,

$$x \underset{\mu_A}{\longrightarrow} M\ .$$

Эта функция также называется *функцией принадлежности*.

Определение нечеткого множества

Обычно множество M значений функции принадлежности это множество значений из интервала [0,1]. Учитывая это, приведем определение нечеткого подмножества данного Л. Заде и названого нечетким множеством типа 1 (обычные нечеткие множества).

Определение 2.2: Нечеткое подмножество A универсального множества U характеризуется *функцией принадлежности* $\mu_A: U \rightarrow [0,1]$, которая ставит в соответствие каждому элементу $x \in U$ число $\mu_A(x)$ из интервала [0,1], характеризующее *степень принадлежности* элемента u подмножеству A.

Определение нечеткого числа

Определение: *Нечетким числом* называется выпуклое нормальное нечеткое множество с кусочно-непрерывной функцией принадлежности $\mu_A(x) \in [0,1]$, заданное на множестве действительных чисел.

Нечеткие числа широко используются в повседневной жизни. Когда мы говорим: “приблизительно три”, “приблизительно двадцать пять” и т.п., то тем самым предполагаем использование нечеткого числа.

Определения

Определение: Нечеткое множество называется пустым, если его функция принадлежности равна нулю на всем множестве A.

Определение: Носителем нечеткого множества A называется множество таких точек в U, для которых величина $\mu_A(u)$ отлична от нуля.

Определение: Высотой нечеткого множества A называется величина $\sup\limits_{u \in A} \mu_A(u)$.

Определение: Нечеткое множество называется нормальным, если его высота равна 1, или $\sup\limits_{u \in A} \mu_A(u) = 1$. В противном случае, нечеткое множество называется субнормальным. Следует отметить, что субнормальное нечеткое множество можно нормировать, поделив функцию $\mu_A(u)$ на величину $\sup\limits_{u \in A} \mu_A(u)$.

Определения, пример

Определение: Ядром нечеткого множества A называется множество таких элементов U степень принадлежности которых множеству A равна 1.

Определение: Точкой перехода нечеткого множества A называется такой элемент множества U, степень принадлежности которого множеству A равна 0,5.

Пример 2.2. Пусть универсальное множество U представляет собой интервал [0,100], и переменная u принимающая значения из этого интервала, интерпретируется как «возраст».

Нечеткое подмножество универсального множества U, обозначаемое термином «старый», можно определить функцией принадлежности вида:

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le u < 50 \\ \left(1 + \left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}, & \text{если } 50 \le u \le 100 \end{cases}.$$

Пример

В этом примере (рис.2.1.) носителем нечеткого множества «старый» является интервал [50, 100], высота множества «старый» равна 1, т.е. оно нормально, а точкой перехода является значение u=55.

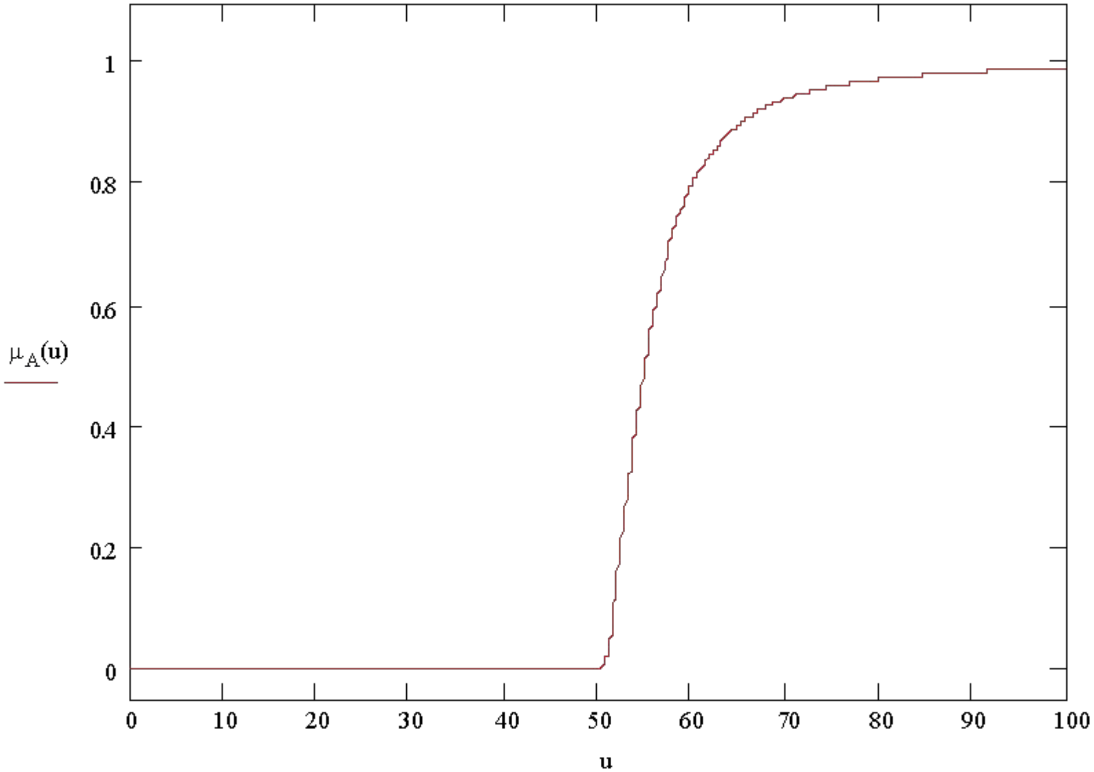


Рис. 2.1.Функция принадлежности термина «старый»

Чтобы упростить представление нечетких множеств, будем использовать следующие обозначения. Обычное (не нечеткое) конечное множество $U=\{u_1, \ldots, u_n\}$ будем записывать в виде $U=u_1+\ldots+u_n$ или

$$U=\sum_{i=1}^{n} u_i, \tag{2.1}$$

где знак «+» обозначает объединение, а не арифметическое суммирование. Таким образом, запись 2.1 можно рассматривать как представление множества U в виде объединения составляющих его одноточечных множеств. Обобщая 2.1, нечеткое подмножество A универсального множества U будем записывать следующим образом:

$$U=\mu_1 u_1+\ldots+\mu_n u_n, \text{ или } U=\sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i, \tag{2.2}$$

где μ_i, $i=1,..,n$ – степень принадлежности элемента u_i нечеткому множеству A. В случаях когда u_i – числа, может возникнуть двоякое толкование записи $\mu_i u_i$, связанное с невозможностью различить компоненты μ_i и u_i. Чтобы избежать этого, будем разделять такие значения μ_i и u_i чертой:

$$U=\mu_1/u_1+\ldots+\mu_n/u_n, \text{ или } U=\sum_{i=1}^{n} \mu_i/u_i. \tag{2.3}$$

Операции над нечеткими множествами

1. Дополнение нечеткого множества A обозначается как $\overline{A}$ (или иногда $\neg A$) и определяется следующим образом:

$$\overline{\mathrm{A}} = \int_{\mathrm{U}} \left(1 - \mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{x})\right)/\mathrm{x}, \mathrm{x} \in \mathrm{U}.$$

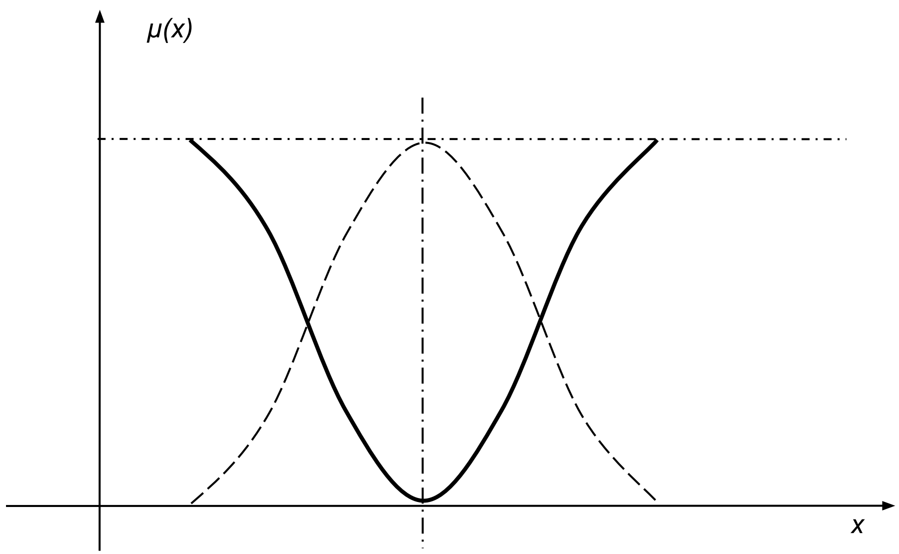


Рис. 2.5. Дополнение нечеткого множества

Операции над нечеткими множествами

2. Объединение нечетких множеств A и B обозначается $A+B$ (или, что более привычно, $A \cup B$) и определяется следующим образом:

$$A \cup B = \int_{U} \left(\mu_{A}(x) \vee \mu_{B}(x)\right) / x$$

где $\left(\mu_{A}(x) \vee \mu_{B}(x)\right) = \max\left\{\mu_{A}(x), \mu_{B}(x)\right\}, \quad x \in U$.

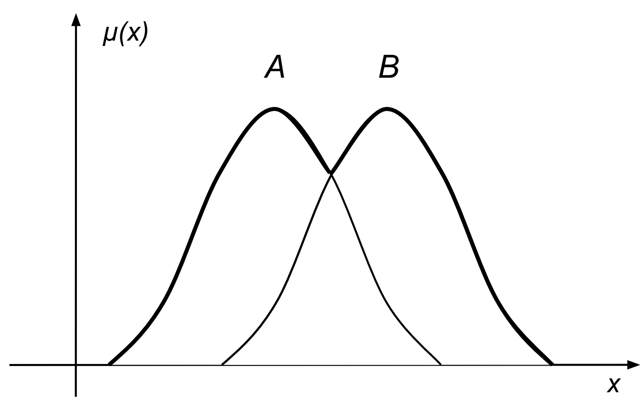


Рис. 2.2. Объединение нечетких множеств

Операции над нечеткими множествами

3. Пересечение A и B обозначается $A \cap B$ и определяется следующим образом:

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \int\limits_{\mathrm{U}} \left(\mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{x}) \wedge \mu_{\mathrm{B}}(\mathrm{x})\right) / \mathrm{x}$$

где $\left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)\right) = \min\left\{\mu_A(x), \mu_B(x)\right\}, \quad x \in U$.

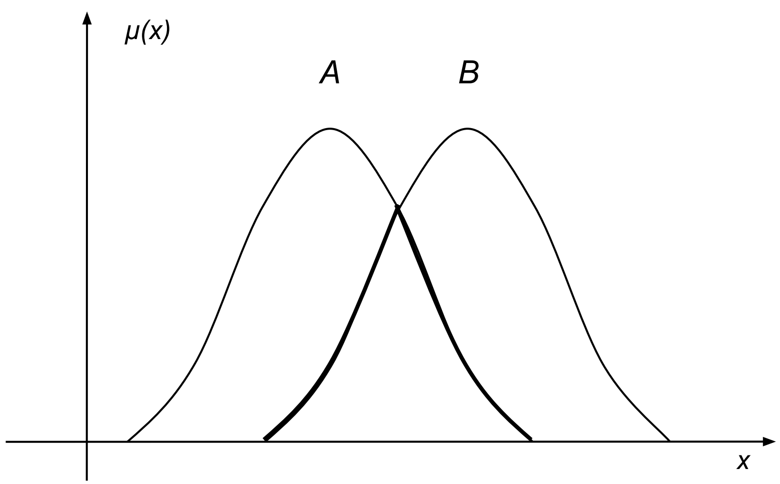


Рис. 2.3. Пересечение нечетких множеств

Операции над нечеткими множествами

5. Произведение A и B обозначается AB и определяется формулой

$$AB = \int_U \left(\mu_A(x)\,\mu_B(x)\right)/x\,.$$

Таким образом, любое нечеткое множество A^α, где α — положительное число, следует понимать так:

$$A^\alpha = \int_U \left(\mu_A(x)\right)^\alpha/x\,.$$

Аналогично, если α – любое неотрицательное число, такое, что ее $\alpha \sup\limits_u \mu_A(u) \le 1$, то

$$\alpha A = \int_U \left(\alpha\mu_A(x)\right)/x\,,$$

операция умножения на число.

Определение

Определение: Нечеткие множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ *равны* ($\tilde{A} = \tilde{B}$) если

$\mu_A(u) = \mu_B(u), \ \forall u \in U$.

Свойства операций над нечеткими множествами

Нечеткие подмножества некоторого универсального множества относительно операций объединения, пересечения и дополнения, определенных выше удовлетворяют следующим свойствам:

1. Идемпотентность: $A \boxtimes A = A \boxtimes A \neq 0$ при $A \neq 0$. Отметим, что нечеткое подмножество универсального множества U называется пустым при условии $\mu_0(x) = 0$ для $\forall x \in U$.
2. Коммутативность: $A \boxtimes B = B \boxtimes A$, $A \boxtimes B = B \boxtimes A$.
3. Ассоциативность: $(A \boxtimes B) \boxtimes C = A \boxtimes (B \boxtimes C)$, $(A \boxtimes B) \boxtimes C = A \boxtimes (B \boxtimes C)$.
4. Поглощаемость: $A \boxtimes (B \boxtimes A) = A$. Это свойство можно записать в другой форме, а именно $\max(\mu_A, \min(\mu_A, \mu_B)) = \mu_A$
5. Единственность обратного: $\left(\overline{\overline{A}}\right) = A$.
6. Дистрибутивность: $A \boxtimes (B \boxtimes C) = (A \boxtimes B) \boxtimes (A \boxtimes C)$

$$A \boxtimes (B \boxtimes C) = (A \boxtimes B) \boxtimes (A \boxtimes C).$$

Операции с нечеткими числами

Дефаззификацией (defuzzification) называется процедура преобразования нечеткого множества в четкое число.

Простейшим способом выполнения процедуры дефаззификации является выбор четкого числа, соответствующего максимуму функции принадлежности. Однако пригодность этого способа ограничивается лишь одноэкстремальными функциями принадлежности. Для многоэкстремальных функций принадлежности существуют следующие методы дефаззификации:

- *Centroid* - центр тяжести;
- *Bisector* - медиана;
- *LOM (Largest Of Maximums)* - наибольший из максимумов;
- *SOM (Smallest Of Maximums)* - наименьший из максимумов;

Mom (Mean Of Maximums) - центр максимумов.

Метод центра тяжести

Дефаззификация нечеткого множества $\tilde{A} = \int\limits_{[\underline{u},\overline{u}]} \mu_A(u)/u$ *по методу центра тяжести* осуществляется по формуле $a = \int\limits_{\underline{u}}^{\overline{u}} u \cdot \mu_A(u)du \Big/ \int\limits_{\underline{u}}^{\overline{u}} \mu_A(u)du$.

Физическим аналогом этой формулы является нахождение центра тяжести плоской фигуры, ограниченной осями координат и графиком функции принадлежности нечеткого множества. В случае дискретного универсального множества дефаззификация нечеткого множества $\tilde{A} = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu_A(u_i)/u_i$ по методу центра тяжести осуществляется по формуле $a = \sum\limits_{i=1}^{k} u_i \cdot \mu_A(u_i) \Big/ \sum\limits_{i=1}^{k} \mu_A(u_i)$.

Метод медиан

Дефаззификация нечеткого множества $\tilde{A} = \int\limits_{[\underline{u},\overline{u}]} \mu_A(u)/u$ *по методу медианы*

состоит в нахождении такого числа a, что $\int\limits_{\underline{u}}^{a} \mu_A(u)du = \int\limits_{a}^{\overline{u}} \mu_A(u)du$.

Геометрической интерпретацией метода медианы является нахождение такой точки на оси абсцисс, что перпендикуляр, восстановленный в этой точке, делит площадь под кривой функции принадлежности на две равные части. В случае дискретного универсального множества дефаззификация нечеткого множества

$\tilde{A} = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu_A(u_i)/u_i$ по методу медианы осуществляется по формуле

$$a = \min_{\forall j: \sum\limits_{i=1}^{j} \mu_A(u_i) \geq \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{k} \mu_A(u_i)} (u_j).$$

Метод центра максимумов

Дефаззификация нечеткого множества $\tilde{A} = \int\limits_{[\underline{u},\bar{u}]} \mu_A(u)/u$ *по методу центра максимумов* осуществляется по формуле: $a = \int\limits_G u\,du \Big/ \int\limits_G du$, где G – множество всех элементов из интервала $[\underline{u},\bar{u}]$, имеющих максимальную степень принадлежности нечеткому множеству A.

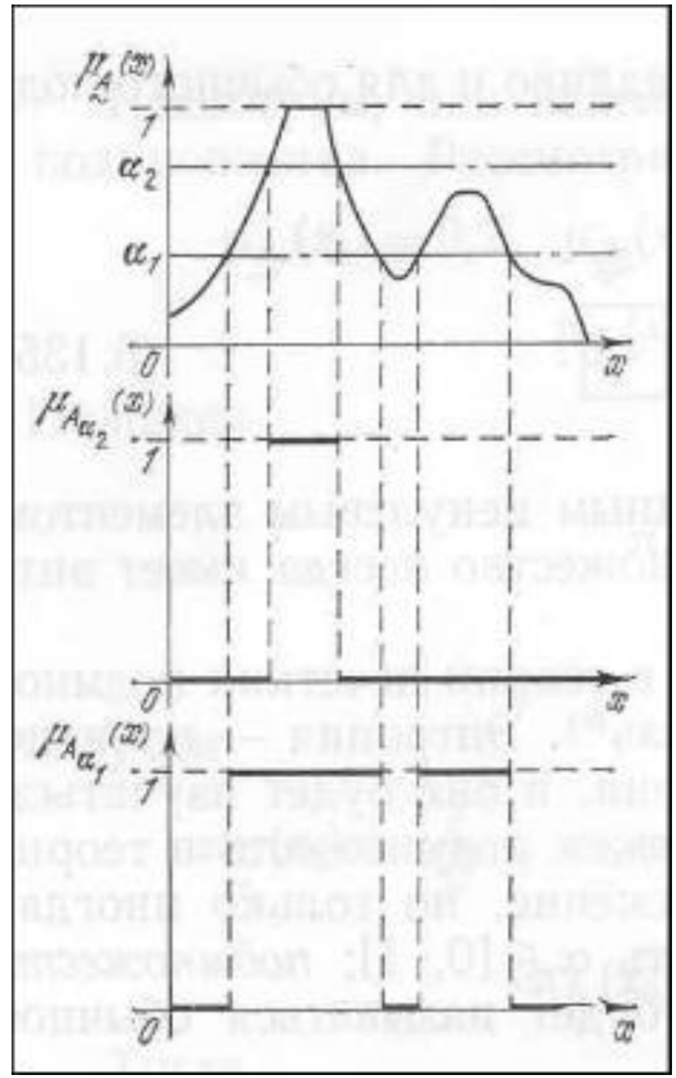
В методе центра максимумов находится среднее арифметическое элементов универсального множества, имеющих максимальные степени принадлежностей. Если множество таких элементов конечно, то формула упрощается к следующему виду: $a = \sum\limits_{u_j \in G} u_j \Big/ |G|$, где $|G|$ - мощность множества G.

Методы наибольшего и наименьшего максимума

- В дискретном случае *дефаззификация* по методам наибольшего из максимумов и наименьшего из максимумов осуществляется по формулам $a = \max(G)$ и $a = \min(G)$, соответственно.
- Из последних трех формул видно, что если функция принадлежности имеет только один максимум, то его координата и является четким аналогом нечеткого множества.

Подмножества α - уровня. Декомпозиция нечетких множеств.

- Пусть *α* число из диапозона [0,1]. Подмножеством *α*-уровня нечеткого множества *A* называется ***обычное*** (***четкое***) множество: $A_\alpha = \{u\ U : \mu_A(u) > a\}$.



Декомпозиция нечеткого множества

Теорема (о декомпозиции): Любое нечеткое подмножество A можно следующим образом разложить на произведения обычных подмножеств по коэффициентам α_i (рис. 2.9.):

$$A = \max_{\alpha_i}\left[\alpha_1 \cdot A_1, \ldots, \alpha_n \cdot A_n\right],$$

$$0 < \alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_n \le 1,\ i=1,2,3,\ldots,n.$$

Пример 2.11. Пусть $A=\{(0.2/x_1), (0/x_2),(0.5/x_3), (1/x_4), (0.7/x_5)\}$. Тогда:

$A=\max\ (0.2\cdot\{(1/x_1), (0/x_2),(1/x_3),(1/x_4), (1/x_5)\}, 0.5\cdot\{(0/x_1),(0/x_2),(1/x_3), (1/x_4), (1/x_5)\},$
$0.7\cdot\{(0/x_1),(0/x_2),(0/x_3), (1/x_4), (1/x_5)\}, 1\cdot\{(0/x_1), (0/x_2),(0/x_3), (1/x_4), (0/x_5)\}).$

Синтез нечеткого подмножества

Теорему о декомпозиции можно применить и для синтеза нечеткого множества. Если рассмотреть последовательность обычных подмножеств

$$A_1 \subset\subset A_2 \subset\subset \ldots \subset\subset A_n,$$

и присвоить значения α_1 для A_1, α_2 для A_2, ..., α_n для A_n причем такие, что:

$$1 \geq \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n > 0,$$

то по теореме о декомпозиции получим нечеткое множество. Причем функция принадлежности данного множества будет иметь следующий вид:

$$\mu_A(u) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } h_{A_i}(u) = 1 \text{ и } h_{A_{i-1}}(u) = 0, \\ 0, & \text{если } h_{A_n}(u) = 0. \end{cases}$$

где $h_A(u)$ - характеристическая функция множества A.

Лингвистическая переменная

Понятие лингвистической переменной

- Лингвистическая переменная отличается от числовой переменной тем, что ее значениями являются не числа, а слова или предложения в естественном или формальном языке.
- Поскольку слова в общем менее точны, чем числа, понятие лингвистической переменной дает возможность приближенно описывать явления, которые настолько сложны, что не поддаются описанию в общепринятых количественных терминах.
- В частности, нечеткое множество, которое представляет собой ограничение, связанное со значениями лингвистической переменной, можно рассматривать как совокупную характеристику различных подклассов элементов универсального множества.
- В этом смысле роль нечетких множеств аналогична той роли, которую играют слова и предложения в естественном языке.

Понятие лингвистической переменной

- *Лингвистической* называется переменная, принимающая значения из множества слов или словосочетаний некоторого естественного или искусственного языка.
- Задание значения переменной словами, без использования чисел, для человека более естественно.
- Ежедневно мы принимаем решения на основе лингвистической информации типа: "очень высокая температура"; "длительная поездка"; "быстрый ответ"; "красивый букет"; "гармоничный вкус" и т.п.

Понятие лингвистической переменной

- Например, значениями лингвистической переменной "ВОЗРАСТ" могут быть: "МОЛОДОЙ, НЕМОЛОДОЙ, СТАРЫЙ, ОЧЕНЬ СТАРЫЙ, НЕ МОЛОДОЙ И НЕ СТАРЫЙ" и т.п.
- Другой важный аспект понятия лингвистической переменной состоит в том, что лингвистической переменной присущи два правила:
  – Синтаксическое, которое может быть задано в форме грамматики, порождающей название значений переменной;
  – Семантическое, которое определяет алгоритмическую процедуру для вычисления смысла каждого значения.

Определение ЛП

- Формально, лингвистическая переменная задается пятеркой *<X, T(X), U, M, G >*, где
  - X – имя переменной;
  - *T(X)* – обозначает терм-множество переменной *X*, т.е. множество названий лингвистических значений переменной *X*, причем каждое из таких значений является нечеткой переменной *x* со значениями из универсального множества *U* с базовой переменной *u;*
  - *U – универсальное множество;*
  - M – семантические правила, задающие функции принадлежности нечетких термов, которое ставит в соответствие каждой нечеткой переменной *x* ее смысл *M(x)*, т. е. нечеткое подмножество *M(x)* универсального множества *U;*
  - *G* – синтаксические правила, часто в виде грамматики, порождающее названия значений переменной *X (из терм множества).*

Понятие терма

- Понятие лингвистической переменной играет важную роль в нечетком логическом выводе и в принятии решений на основе приближенных рассуждений.
- Совокупность значений лингвистической переменной составляет *терм - множество* этой переменной. Это множество может иметь, вообще говоря, бесконечное число элементов, но на практике, естественно, оно конечно. Например, терм - множество лингвистической переменной «температура» можно записать так:

  (температура)={очень низкая \/ почти низкая \/ низкая \/ почти средняя \/ средняя \/ ...\/ высокая \/ очень высокая}.
- *Термом* называется любой элемент терм-множества. В теории нечетких множеств терм формализуется нечетким множеством с помощью функции принадлежности.

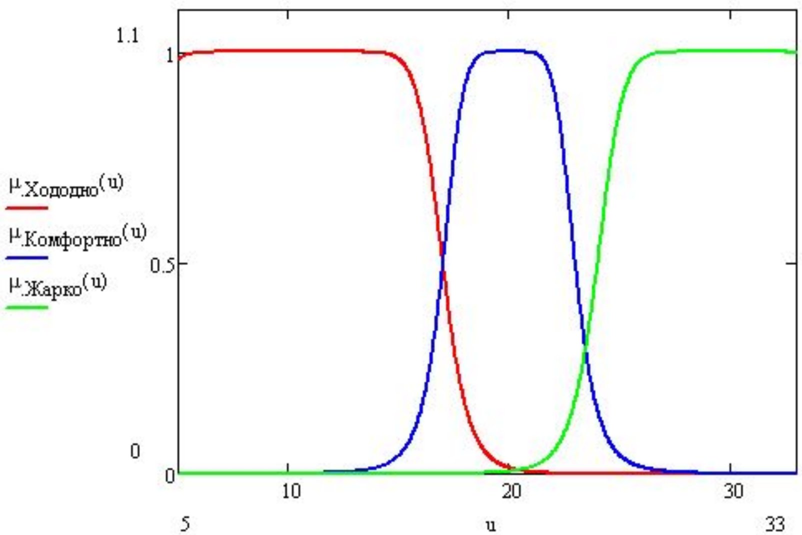
Пример

- Рассмотрим *лингвистическую переменную* с именем X=" ТЕМПЕРАТУРА В КОМНАТЕ". Тогда оставшуюся четверку *<T, U, M, G>*, можно определить так:
  - универсальное множество U=[5,35];
  - терм-множество T={"ХОЛОДНО", "КОМФОРТНО", "ЖАРКО"}
  - *M* будет являться процедурой, ставящей каждому терму в соответствие нечеткое множество из *U* по правилам (функциям принадлежности):

$$\mu_{''\text{холодно}''}(u) = \frac{1}{1+\left(\frac{u-10}{7}\right)^{12}},$$

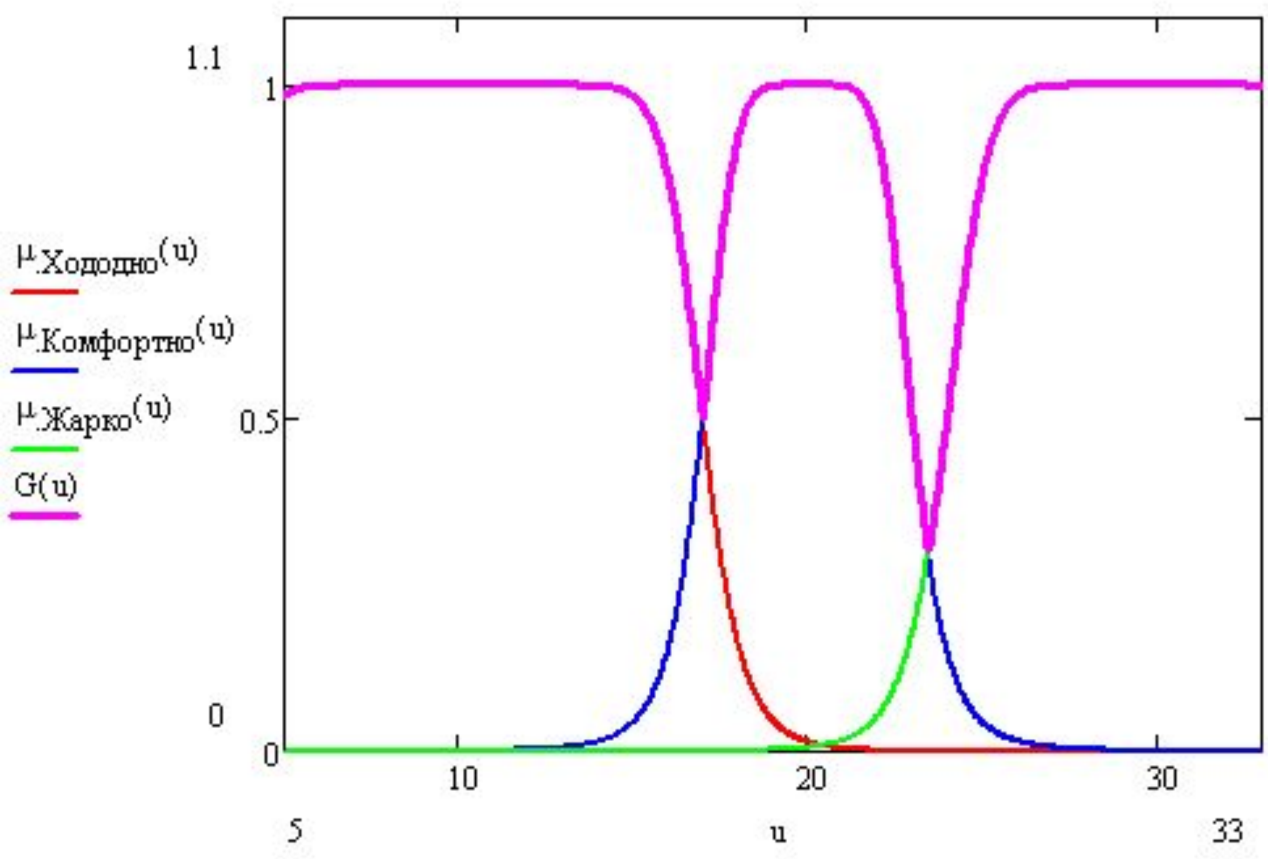
$$\mu_{''\text{комфортно}'}(u) = \frac{1}{1+\left(\frac{u-20}{3}\right)^{6}},$$

$$\mu_{''\text{жарко}''}(u) = \frac{1}{1+\left(\frac{u-30}{6}\right)^{10}};$$



Пример

- Синтаксическое правило G (грамматика), присваивающее значение лингвистической переменной (выбор терма из терм мно



Пример

- В рассмотренном примере терм-множество состояло лишь из небольшого числа термов, так что целесообразно было просто перечислить элементы терм-множества *T(X)* и установить прямое соответствие между каждым элементом и его смыслом.
- В более общем случае, число элементов *T(X)* в может быть бесконечным, и тогда как для порождения элементов множества *T(X),* так и для вычисления их смысла необходимо применять алгоритм, а не просто процедуру перечисления.

Определение

- Будем говорить, что *лингвистическая переменная* ***X*** **структурирована**, если ее терм-множество *T(X)* и функцию M, которая ставит в соответствие каждому элементу терм-множества его смысл, можно задать алгоритмически.

Пример

- В качестве очень простой иллюстрации той роли, которую играют синтаксическое и семантическое правила в случае структурированной *лингвистической переменной*, рассмотрим переменную РОСТ, терм-множество которой можно записать в виде:
  - Т(РОСТ)={ВЫСОКИЙ,ОЧЕНЬ ВЫСОКИЙ,ОЧЕНЬ-ОЧЕНЬ ВЫСО

М(ВЫСОКИЙ)= $\begin{cases} \left(1+\left(\frac{u-60}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}, & \text{если } u \geqslant 60, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

М(ОЧЕНЬ ВЫСОКИЙ)=2×(М(ВЫСОКИЙ)), и т.д.

Методы построения функций принадлежности

Требования к функциям принадлежности

Относительно функции принадлежности можно выдвинуть следующие условия:

1. Функция принадлежности должна быть положительной, т.е.

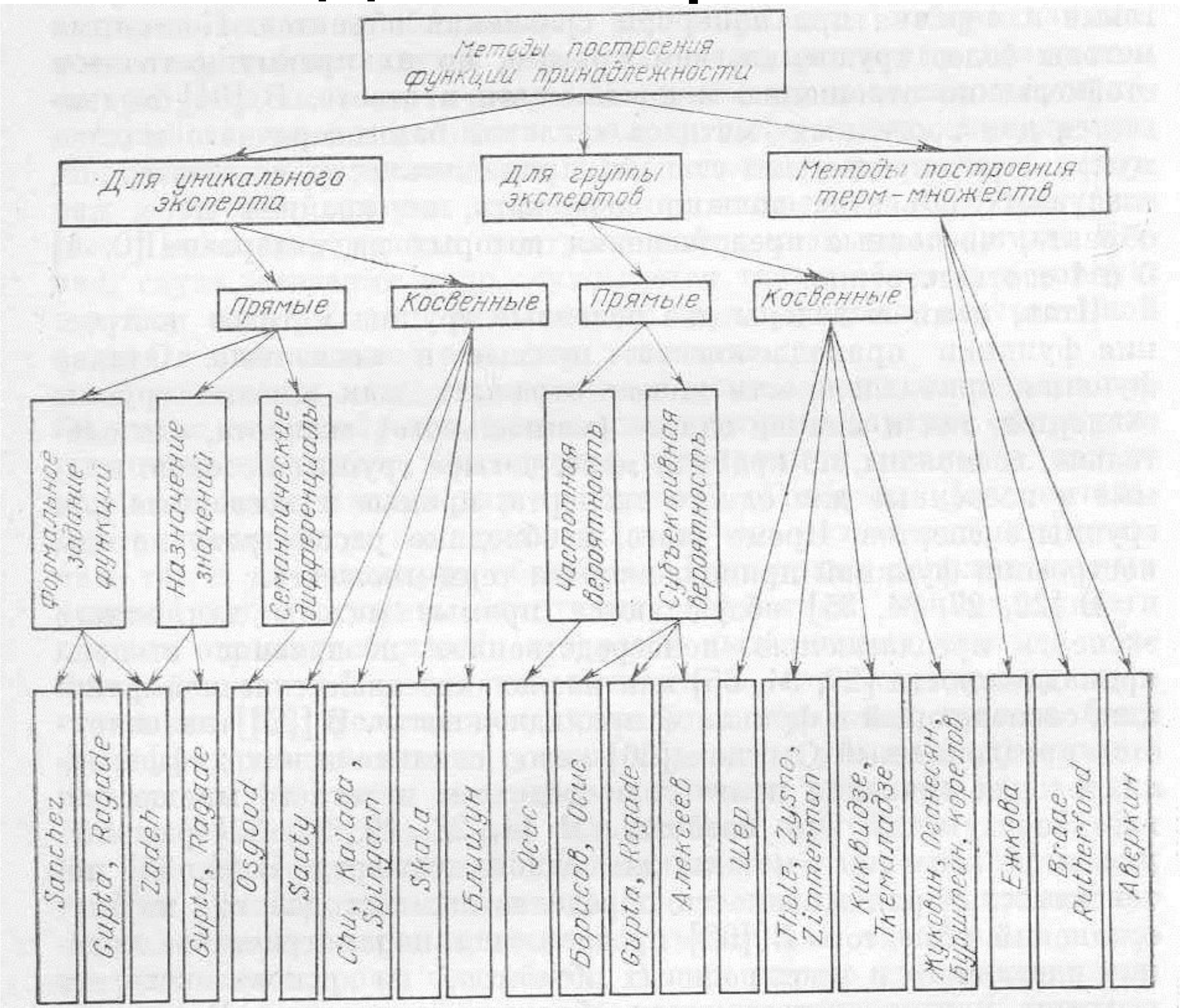
$$\mu_A(x) \geq 0, \forall x \in U .$$

2. Если это не оговаривается дополнительно, функция принадлежности должна быть нормальной

$$\sup \mu_A(x) = 1, x \in U$$

Если условие нормальности принято, то запрещается использование функций принадлежности, не удовлетворяющих условию нормальности.
Функция принадлежности может задаваться как на непрерывном, так и на дискретном носителе.

Методы построения ФП



Прямые методы для одного эксперта

- Прямые методы для одного (уникального) эксперта состоят в непосредственном назначении степени принадлежности для исследуемых объектов или непосредственном назначении функции (правила), позволяющей вычислять значения.

Прямые методы для одного эксперта

Для вычисления параметров функции принадлежности при известном аналитическом представлении можно предложить простую методику, которая вытекает из рассмотрения функций принадлежности, приведенных в таблице 1 из методички.

Все функции могут быть разбиты на два класса:

- с конечным носителем, т.е. когда точно можно указать элемент *x*, при котором $m_A(x) = 0$;
- с бесконечным носителем, для которых $\lim\limits_{x\to\infty} \mu_A(x) = 0$.

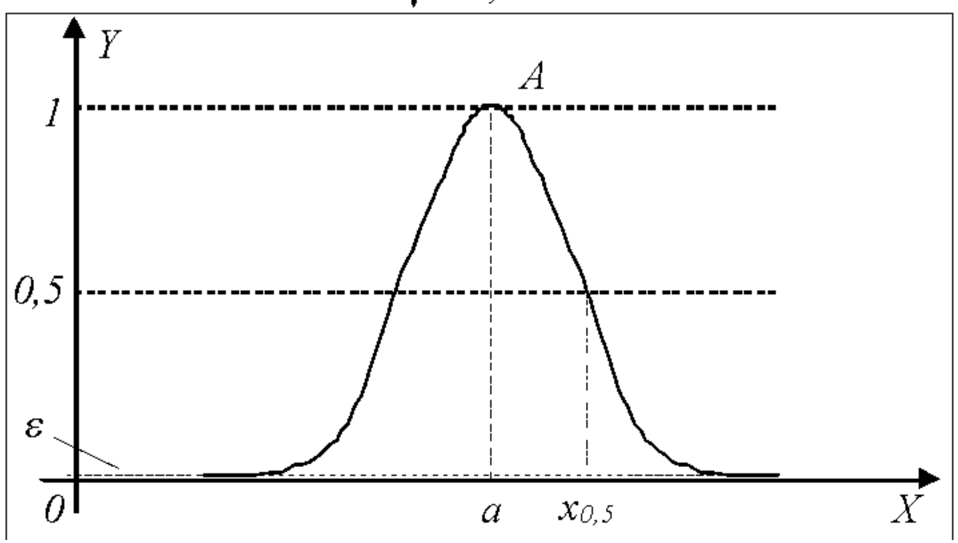
Для многих аналитических представлений (таблица 1) этих параметров достаточно для расчета значений функций принадлежности в любой точке. Однако для экспоненциальных, параболических и гиперболических форм представления функций принадлежности этого оказывается недостаточно. Тогда эксперту можно предложить следующий вопрос: «Для какого значения *x* его принадлежность нечеткому множеству оценивается равной *0,5*?».

Пример

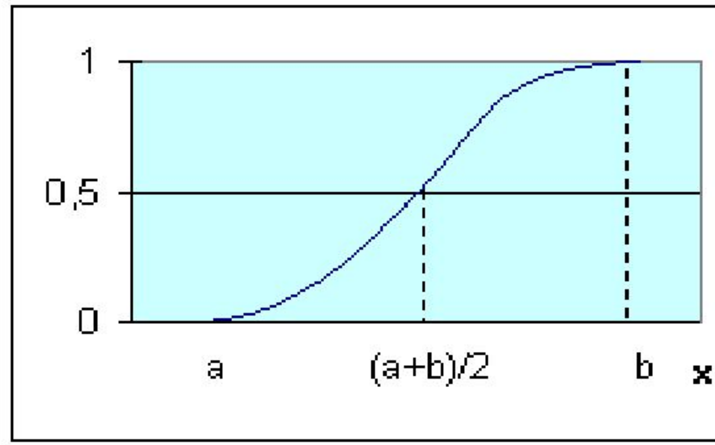
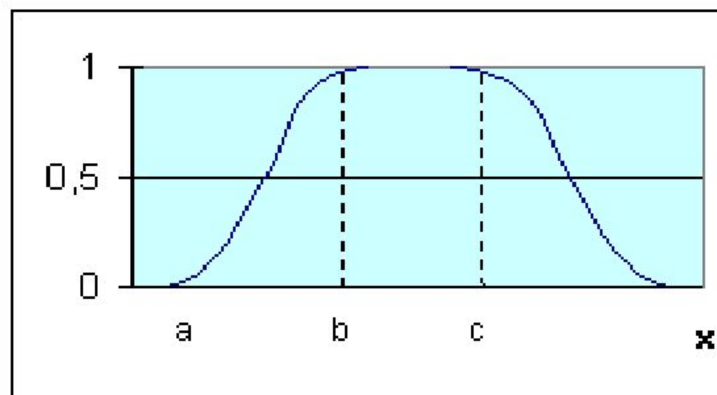
Рассмотрим Гауссову функцию принадлежности: $\mu_A(x,a,k) = \exp\left[-k\left(x-a\right)^2\right]$.

Тогда при, x=$x_{0,5}$ $\mu_A(x) = 0,5$ соответственно, то $k = \frac{\ln 0,5}{(x_{0,5}-a)^2}$. Если при ответе на вопрос о минимальном значении функции принадлежности, для которого можно считать элемент x не принадлежащем множеству A, для функции принадлежности было указано значение ε, то носитель нечеткого множества будет определяться из соотношения:

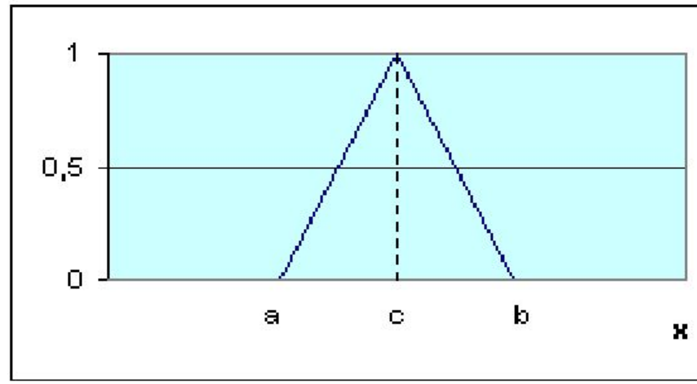
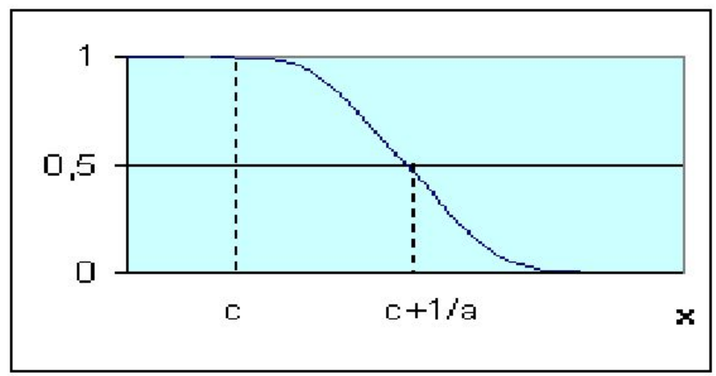
$$S_A = a \pm \sqrt{\frac{\ln \varepsilon}{\ln 0,5}(x_{0,5}-a)^2}\ .$$



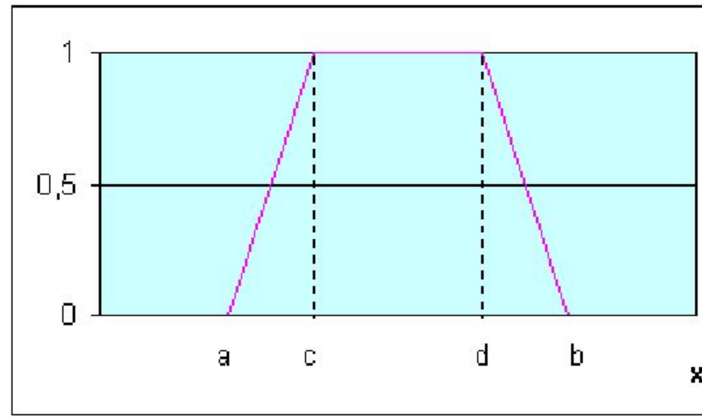
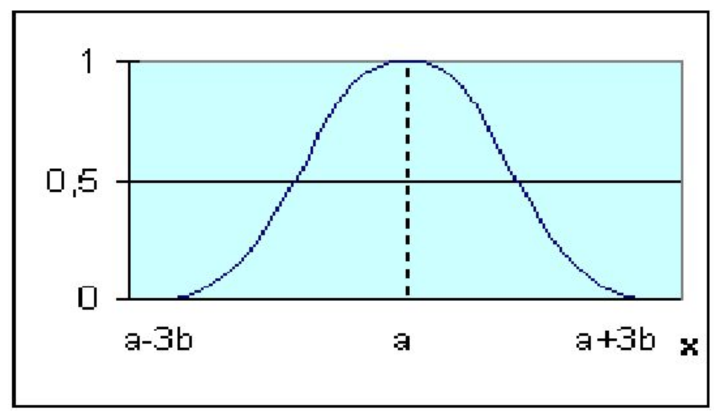
Примеры различных способов построения функций принадлежности

№	Аналитический вид функции принадлежности	График функции принадлежности
1	$$\mu_1(x,a,b)=\begin{cases}0, \text{ если } x \le a;\\ \dfrac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, \text{ если } a \le x \le \dfrac{a+b}{2};\\ 1-\dfrac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, \text{ если } \dfrac{a+b}{2} \le x \le b;\\ 1, \text{ если } x \ge b.\end{cases}$$	
2	$$\mu_2(x,a,b,c)=\begin{cases}\mu_1(x,a,b), \text{ если } a < x < b;\\ 1, \text{ если } b \le x \le bc;\\ 1-\mu_1(x,c,c+b-a), \text{ если } c < x < c+a\\ 0, \text{ иначе.}\end{cases}$$	

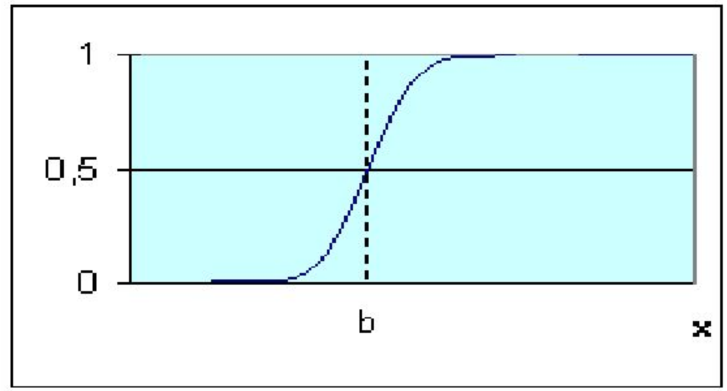
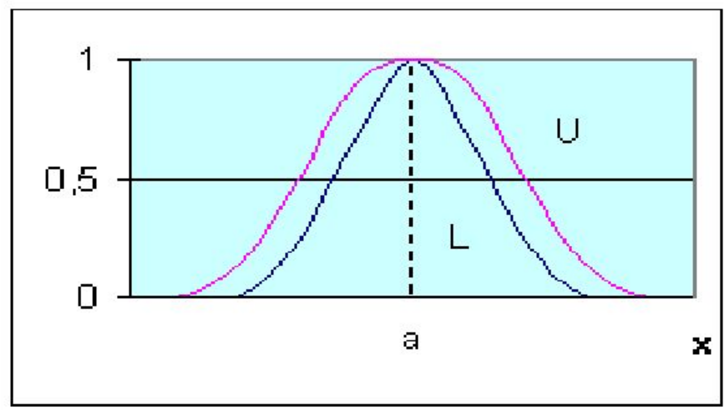
Примеры различных способов построения функций принадлежности

№	Аналитический вид функции принадлежности	График функции принадлежности
3	$\mu_3(x,a,b,c)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le a;\\ \dfrac{x-a}{c-a}, \text{ если } a\le x\le c\\ \dfrac{b-x}{b-c}, \text{ если } c\le x\le b\\ 0, \text{ если } x\ge b.\end{cases}$	
4	$\mu_4(x,a,b,c)=\begin{cases}1, \text{ если } x<c,\\ \left\{1+\left[a(x-c)^b\right]\right\}^{-1}, \text{ если } x>c\end{cases}$	

Примеры различных способов построения функций принадлежности

№	Аналитический вид функции принадлежности	График функции принадлежности
5	$\mu_5(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le a; \\ \dfrac{x-a}{c-a}, & \text{если } a \le x \le c; \\ 1, & a \le x \le c \\ \dfrac{b-x}{b-d}, & \text{если } d \le x \le b; \\ 0, & \text{если } x \ge b. \end{cases}$	
6	$\mu_6(x; a, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a - 3b, \\ \exp\left[-\dfrac{(x-a)^2}{2b^2}\right], & a - 3b < x < a + 3b \\ 0, & \text{если } x > a + 3b. \end{cases}$	

Примеры различных способов построения функций принадлежности

№	Аналитический вид функции принадлежности	График функции принадлежности
7	$\mu_7(x,a,b)=\left\{1+\exp\left[-a\left(x-b\right)\right]\right\}^{-1}$	
8	$\mu_8\left(x,a,\left[\underline{b},\overline{b}\right]\right)=\left[\mu_6^L(x,a,\underline{b}),\mu_6^U(x,a,\overline{b})\right]$	

Понятие нечетких отношений

Понятие нечетких отношений

- Нечеткое отношение представляет собой важное математическое понятие, позволяющее формулировать и анализировать математические модели реальных задач принятия решений.
- Отношение на множестве альтернатив, объектов и т. п. в таких задачах выявляется обычно путем консультаций с лицом, принимающим решения (л. п. р.), или с экспертами, которые зачастую не имеют вполне четкого суждения об этом отношении.
- В подобных случаях нечеткое отношение может служить удобной и более адекватной реальности формой представления исходной информации, чем обычное отношение.

Определение

Нечетким отношением R на множестве X называется нечеткое подмножество декартова произведения $X \times X$, характеризующееся функцией принадлежности $\mu_R : X \times X \to [0,1]$. Значение $\mu_R(x, y)$ этой функции понимается как субъективная мера или степень выполнения отношения xRy.

Обычное отношение можно рассматривать как частный случай нечеткого отношения, функция принадлежности которого принимает лишь значения 0 или 1

Способы задания НО

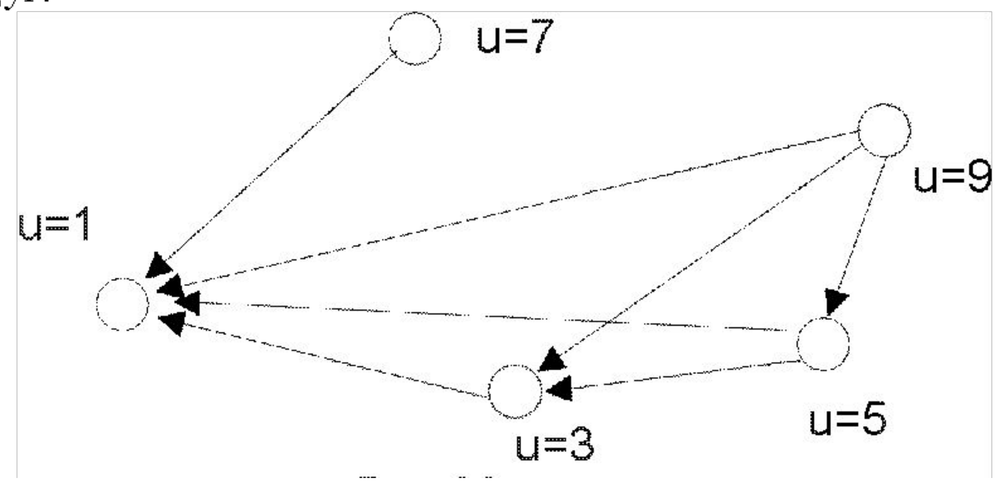
Если множество X, на котором задано нечеткое отношение R, конечно, то функция принадлежности μ_R этого отношения представляет собой квадратную матрицу. По смыслу эта матрица аналогична матрице обычного отношения, но элементами ее могут быть не только числа 0 или 1, но и произвольные числа из интервала [0, 1]. Если элемент $r_{i,j}$ этой матрицы равен α, то это означает, что степень выполнения отношения $x_i R x_j$ равна α.

Способы задания НО

По аналогии с обычным отношением нечеткое отношение можно описать ориентированным графом (нечетким графом), каждой дуге которого приписано число из интервала [0, 1].

Наглядностью обладает задание нечеткого отношения в виде нечеткого графа $\tilde{G}=\left(X,\tilde{V}\right)$,

где $X=\left\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right\}$ - множество вершин; $\tilde{V}=\left\{\left\rangle \mu_R(x_i,x_j) \middle/ (x_i,x_j)\right\langle, \quad \mu_R(x_i,x_j>0\right\}$ $\left(x_i,x_j\right)\in X$ - множество нечетких дуг.



Определения

Носителем нечеткого отношения R на множестве X называется подмножество декартова произведения X×X вида

$$\sup R = \big((x,y) \mid (x,y) \in X \times X,\, \mu_R(x,y) > 0\big).$$

При анализе задач принятия решений с нечеткими отношениями удобно пользоваться множествами уровня нечеткого отношения. Поскольку нечеткое отношение определяется как нечеткое множество, то и его множества уровня определяются как

$$R_\alpha = \big((x,y) \mid (x,y) \in X \times X,\, \mu_R(x,y) \geq \alpha\big).$$

Нетрудно видеть, что множество уровня α нечеткого отношения R на X представляет собой обычное отношение на X, связывающее все пары *(x, y)*, для которых степень выполнения отношения R не меньше α. Матрицу множества α-уровня можно получить, заменив в матрице нечеткого отношения R единицами все элементы, не меньшие числа α, и нулями — все остальные элементы.

Разложение нечеткого отношения по множествам уровня определяется так же, как разложение нечеткого множества.

Пример

Пусть матрица нечеткого отношения R на множестве X={x_1, x_2, x_3, x_4} имеет вид

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0.5	0	0.2
x_2	0.3	1	1	0.4
x_3	0	0.6	0.5	0.4
x_4	0	0.7	0.3	0

Тогда матрица обычного отношения, являющегося множеством уровня 0,5 этого нечеткого отношения, выглядит так:

	X_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	0
X_2	0	1	1	0
X_3	0	1	1	0
X_4	0	1	0	0

Операции над нечеткими отношениями

Пусть на множестве X заданы два нечетких отношения A и B, т.е. в декартовом произведении X×X заданы два нечетких множества A и B. Нечеткие множества $C = A \cup B$ и $D = A \cap B$ называются соответственно объединением и пересечением нечетких отношений A и B на множестве X. Если воспользоваться определением объединения и пересечения нечетких множеств, то для функций принадлежности отношений C и D получаем

$$\mu_C(x, y) = \max\left\{\mu_A(x, y), \mu_B(x, y)\right\},$$

$$\mu_D(x, y) = \min\left\{\mu_A(x, y), \mu_B(x, y)\right\}.$$

Операции над нечеткими отношениями

Говорят, что нечеткое отношение B включает в себя нечеткое отношение A, если для нечетких множеств A и B выполнено A $\subseteq$ B. Для функций принадлежности этих множеств неравенство $\mu_A(x, y) \le \mu_B(x, y)$ выполняется при любых x, y $\in$ X. В рассмотренном выше примере отношений ($\geq$) и (>>) нечеткое отношение R содержится в отношении R, т. е. должно быть $\mu_R(x, y) \le \mu_R(x, y)$ для любых чисел x, y из интервала [0, 1].

Операции над нечеткими отношениями

Если R – нечеткое отношение на множестве X, то нечеткое отношение $\overline{R}$, характеризующееся функцией принадлежности $\mu_{R'}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y),\ (x,y) \in R$ называется дополнением в X отношения R. Дополнение имеет смысл отрицания исходного отношения. Например, для нечеткого отношения R = (лучше) его дополнение R' = (не лучше).

Обратное к R нечеткое отношение R^{-1} на множестве X определяется следующим образом:

$$xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx \quad \forall x, y \in X ,$$

или с помощью функций принадлежности:

$\mu_{R^{-1}}(x,y) = \mu_R(y,x) \quad \forall x, y \in X$.

Композиция нечетких отношений

- Операция композиции нечетких отношений R_1 в X×Y иR_2 в Y×Z позволяет определить нечеткое отношение в X×Z.

(Max-min) - композиция и ее свойства

Пусть R_1 есть нечеткое отношение в X×Y, R_2 - нечеткое отношение в Y×Z. (Max-min) - композиция $R_1 \circ R_2$ определяется выражением

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x,z) = \max_y \left[\min \left\{ \mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(y,z) \right\} \right],$$

где: $x \in X, y \in Y, z \in Z$.

Вычисление композиций НО

- Вычисление композиции нечетких отношений аналогично вычислению произведения матриц, ("столбец на строку"), только вместо произведения и суммы выполняются операции взятия минимума и максимума соответственно.

Пример

Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$. Отношение R_1 на $X \times Y$ задано следующей матрицей:

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0.1	0.2	0.5	0.7	0.3
x_2	0.3	0	1	0.3	0.7
x_3	0.1	0.8	0	0	1

Нечеткое отношение R_2 на $Y \times Z$ задано следующей матрицей:

R_1	z_1	yz_2	z_3	z_4
y_1	0.9	0	0.4	0.7
y_2	0.3	0.4	0.9	1
y_3	1	0.4	0.2	0
y_4	0.3	0.4	0.7	0.2
y_5	0.5	0.5	0.9	0.1

Тогда нечеткое отношение $R_1{}^{o}R_2$ определено на $X \times Z$ и выражается следующей матрицей:

R_1	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0.5	0.4	0.7	0.2
x_2	1	0.5	0.7	0.8
x_3	0.5	0.5	0.9	0.8

Свойства (max-min) - композиции

- ассоциативность: $\left(R_3 \circ R_2\right) \circ R_1 = R_3 \circ \left(R_2 \circ R_1\right)$;
- дистрибутивность относительно объединения:

$$R_1 \circ \left(R_2 \cup R_3\right) = \left(R_1 \circ R_2\right) \cup \left(R_1 \circ R_3\right);$$

- не дистрибутивность относительно пересечения:

$$R_1 \circ \left(R_2 \cap R_3\right) \neq \left(R_1 \circ R_2\right) \cap \left(R_1 \circ R_3\right);$$

монотонность: $A \subset B \Rightarrow R \circ A \subset R \circ B$.

Свойства нечетких отношений

Рефлексивность. Нечеткое отношение R на множестве X называется рефлексивным, если для любого x $\in$ X выполнено равенство $\mu_R(x,x)=1$ ($R(x,x)=1, \forall x \in X$). В случае конечного множества X главная диагональ матрицы рефлексивного нечеткого отношения R состоит целиком из единиц. Примером рефлексивного нечеткого отношения может служить отношение «примерно равны» в множестве чисел.

Антирефлексивность: $R(x,x)=0,\ \forall x \in X$. Функция принадлежности антирефлексивного нечеткого отношения обладает свойством $\mu_R(x,x)=0$ при любом x $\in$ X. Антирефлексивно, например, отношение «много больше» в множестве чисел. Ясно, что дополнение рефлексивного отношения антирефлексивно.

Симметричность. Нечеткое отношение R на множестве X называется симметричным, если для любых x, y $\in$ X выполнено равенство: $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$. Матрица симметричного нечеткого отношения, заданного в конечном множестве, симметричная. Пример симметричного нечеткого отношения – отношение «сильно различаться по величине».

Транзитивность. Нечеткое отношение R на множестве X называется транзитивным, если $R \circ R \subseteq R$, $R(x,z) \geq R(x,y) \wedge R(y,z),\ \forall x,y,z \in X$.

Транзитивное замыкание НО

Пусть R - нечеткое отношение в U×U. Определим $R^2=R \circ R$ с функцией принадлежности

$$\mu_{R^2}(x,z)=\max_y\left[\min\left\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,z)\right\}\right],$$

где x, y, z $\in$ U .

Сравнивая последнее выражение с определением транзитивности для нечетких бинарных отношений, не трудно увидеть, что свойство транзитивности можно записать в следующем виде:

$$R^2 \subset R\ .$$

Аналогично можно определить по индукции R^n:

$$R^n = R^{n-1} \circ R,\ n=2,3,\ldots$$

Пусть $R^2 \subset R$ и $R^{n+1} \subset R^n$, тогда $R^n \subset R$.

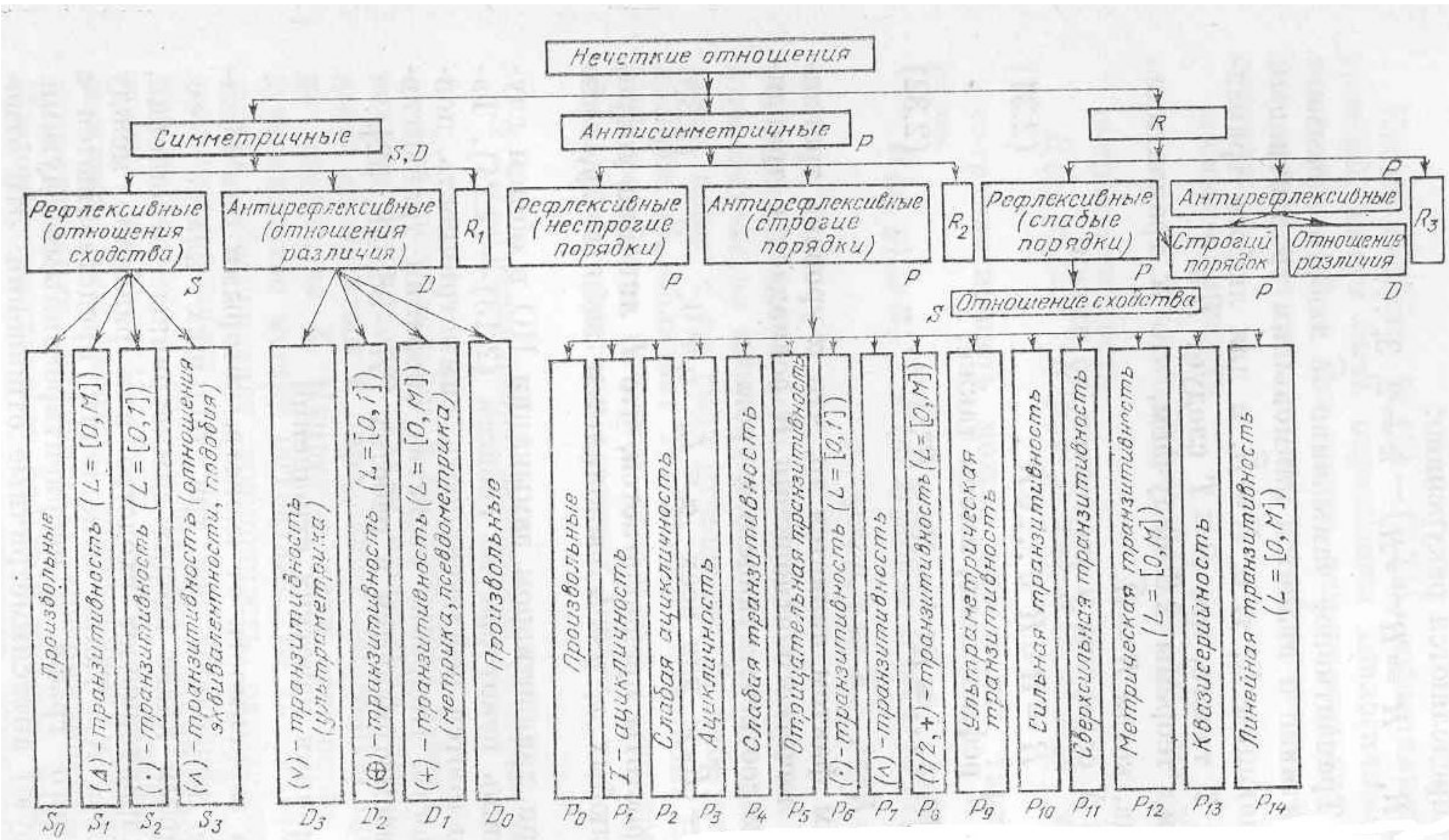
Транзитивное замыкание $\tilde{R}$ нечеткого бинарного отношения R определяется по аналогии с обычными отношениями:

$$\tilde{R} = R^1 \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n \ldots$$

где R^n определяется рекурсивно: $R^1=R,\ R^n=R^{n-1} \circ R,\ n=2,3,\ldots$

Вводя транзитивное замыкание, необходимо, как и выше, указать способ определения операции композиции нечетких отношений.

Классификация НО



Приложения теории нечетких отношений к анализу систем

- В кластерном анализе (автоматической классификации) предложена процедура кластеризации, основанная на транзитивном замыкании исходного отношения сходства, получаемого в результате опроса экспертов.
- Эксперты в некоторой шкале сравнений указывали силу сходства между портретами людей, принадлежащих к нескольким семьям, и на основе попарного сравнения всех портретов строилась матрица сходства.
- Транзитивное замыкание этой матрицы давало НО эквивалентности.
- Далее выбирался порог (уровень) α таким образом, чтобы число классов разбиения, получаемое на α-уровнях, равнялось числу семей.
- Процедура классификации относила портреты, попавшие в один класс разбиения, к одной семье. В проведенных экспериментах результаты классификации дали хорошее согласование с истинным разбиением портретов по семьям.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РАССУЖДЕНИЙ

Приближенные рассуждения

- Под приближенными рассуждениями понимается процесс, при котором из нечетких посылок получаются некоторые следствия, возможно, тоже нечеткие.
- Способность человека рассуждать в качественных, неточных терминах отличает интеллект человека от интеллекта вычислительной машины.
- Приближенные рассуждения находят применение в системах основанных на принципах нечеткого логического вывода.
- В основе нечетких систем лежат логические правила вида **"Если ..., то ...",** в которых посылки и выводы являются нечеткими понятиями.

Четкие рассуждения

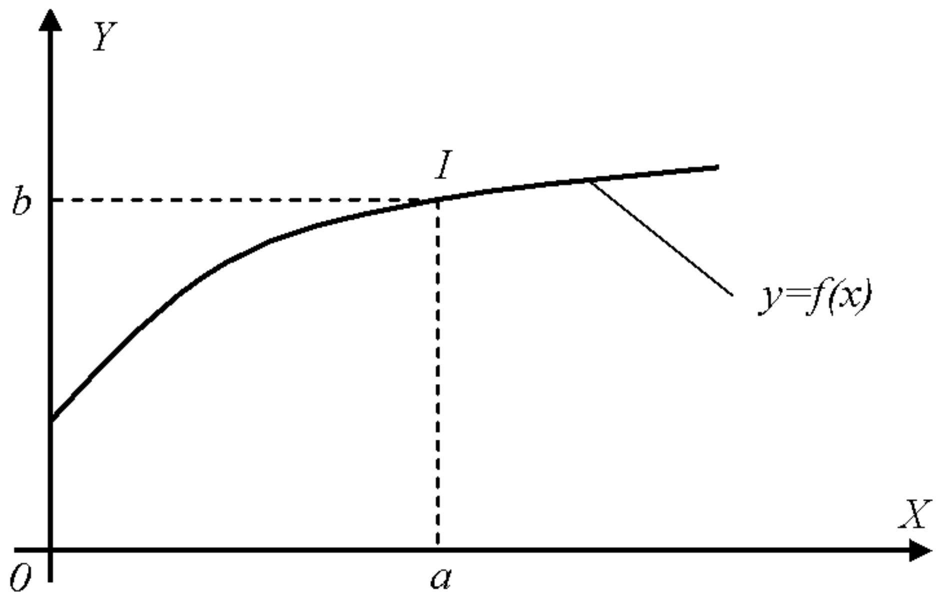
- Основным правилом вывода в традиционной логике является правило ***modus ponens***, согласно которому мы можем судить об истинности высказывания *B* по истинности высказывания *A* и импликации А□В.
- Во многих привычных рассуждениях, однако, правило modus ponens используется не в точной, а в приближенной форме.
- Так если мы знаем, что А истинно и что A^*□В, где A^* есть в некотором смысле, приближение В.
- Тогда из A^*□В мы можем сделать вывод о том, что В приближенно истинно.

Обобщение четеких рассуждений

- Рассмотрим способ формализации приближенных рассуждений, основанный на понятиях, введенных ранее.
- В отличие от традиционной логики нашим главным инструментом будет не правило modus ponens, а так называемое композиционное правило вывода, весьма частным случаем, которого является правило modus ponens.

Композиционное правило вывода

- Композиционное правило вывода – это всего лишь обобщение следующей знакомой процедуры.
- Предположим, что имеется кривая $y = f(x)$ и задано значение $x = a$.
- Тогда из того, что $y = f(x)$ и $x = a$, мы можем заключить, что $y \stackrel{\Delta}{=} b = f(a)$.



Вывод $y = b$ из предпосылок $x = a$ и $y = f(x)$.

Композиционное правило вывода

- Обобщим теперь этот процесс, предположив, что a - интервал, а $f(x)$ - функция, значения которой суть интервалы.
- В этом случае, чтобы найти интервал $y \triangleq b$, соответствующий интервалу a, мы сначала построим цилиндрическое множество $\bar{a}$ с основанием a и найдем его пересечение I с кривой, значения которой суть интервалы,
- Затем спроектируем это пересечение на ось OY и получим желаемое значение y в виде интервала b.

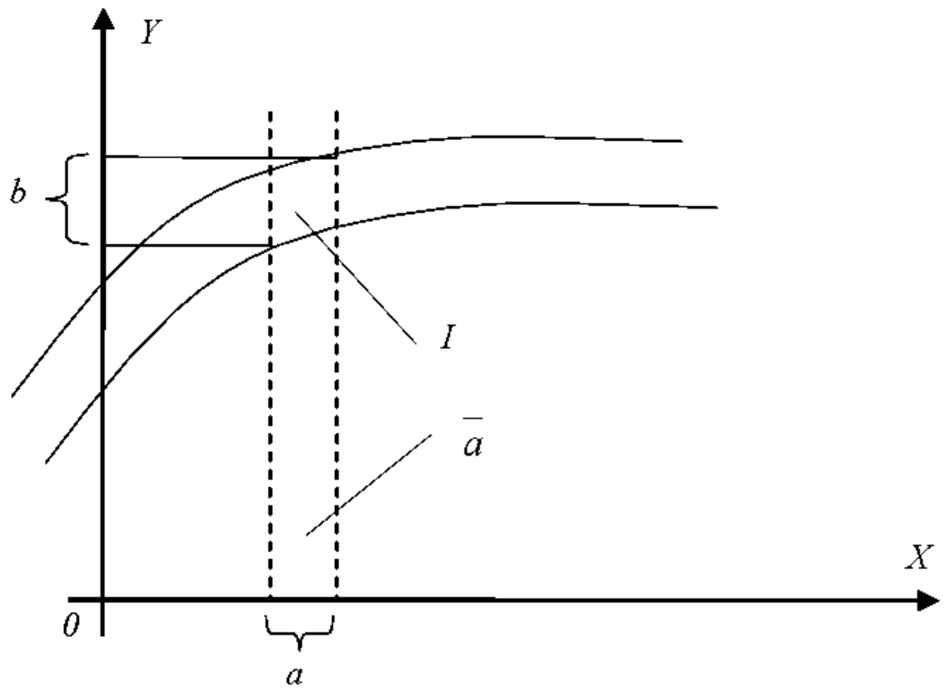


Иллюстрация композиционного правила вывода в случае переменных со значениями-интервалами.

Композиционное правило вывода

- Предположим, что A - нечеткое подмножество оси OX, а F – нечеткое отношение в $OX \times OY$.
- Вновь образуя цилиндрическое нечеткое множество $\overline{A}$ с основанием A и его пересечение с нечетким отношением F, мы получим нечеткое множество $\overline{A} \cap F$ которое является аналогом точки пересечения I.
- Проектируя затем это множество на ось OY, получим значение y в виде нечеткого подмножества оси OY.
- Таким образом, из того, что $y = f(x)$ и к $x \overset{\Delta}{=} A$ нечеткое подмножество оси OX, мы получаем значение y в виде нечеткого подмножества B оси OY.

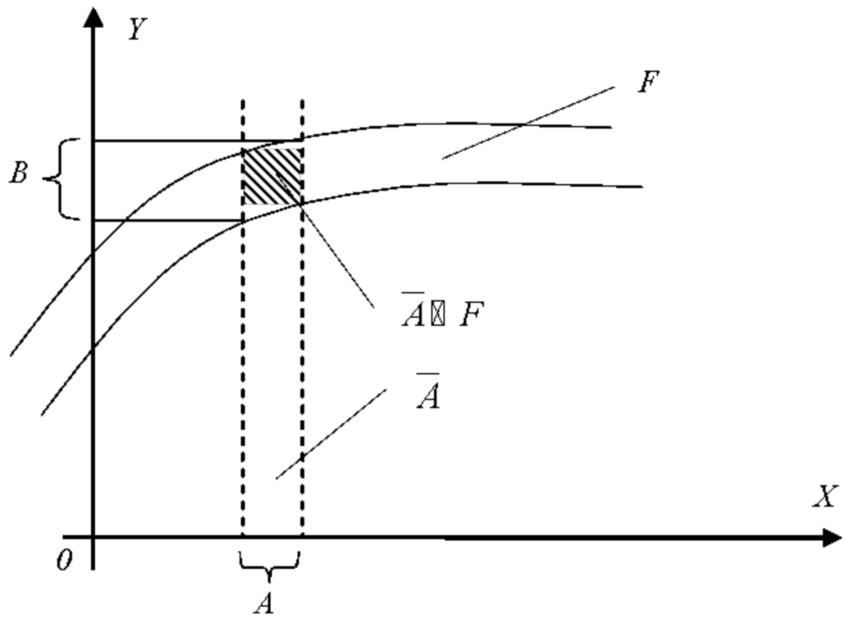


Иллюстрация композиционного правила вывода для нечетких переменных.

Композиционное правило вывода

- Более конкретно, пусть μ_A, и $\mu_{\overline{A}}$, μ_F μ_B обозначают функции принадлежности множеств A, $\overline{A}$, F и B соответственно.
- Тогда по определению проекции множества A:

$$\mu_{\overline{A}}(x, y) = \mu_A(\mathrm{x}) \qquad (6.1)$$

и, следовательно,

$$\mu_{\overline{A} \cap F}(x, y) = \mu_{\overline{A}}(x, y) \wedge \mu_F(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_F(x, y)\,. \qquad (6.2)$$

- Проектируя множество $A \cap F$ на ось OY, получаем из (6.2) и определения проекции:

$$\mu_B(y) = \bigvee_x \mu_A(x) \wedge \mu_F(x, y)\,, \qquad (6.3)$$

т. е. выражение для функции принадлежности проекции (тени) $A \cap F$ на ось OY. Сравнивая это выражение с определением композиции A и F, видим, что множество B можно представить как

$$B = A \circ F, \qquad (6.4)$$

где знак $\circ$ обозначает операцию композиции. Как утверждается в теории нечетких отношений, если нечеткие множества A и F имеют конечные носители, то операция композиции сводится к максминному произведению матриц.

Пример

Предположим, что A к F имеют вид:

$A = 0.2/1 + 1/2 + 0.3/3$ и

$F = \quad 0.8/(1,1) + 0.9/(1,2) + 0.2/(1,3) + 0.6/(2,1) +$

$+1/(2,2) + 0.4/(2,3) + 0.5/(3,1) + 0.8/(3,2) + 1/(3,3).$

Выражая A и F с помощью матриц и образуя матричное произведение (6.4), получаем

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 0.2 & 1 & 0.3 \end{bmatrix}} \circ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 & 0.2 \\ 0.6 & 1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.8 & 1 \end{bmatrix} = \overset{B}{\begin{bmatrix} 0.6 & 1 & 0.4 \end{bmatrix}}$$

Композиционное правило вывода. Определение.

Пусть U и V – два универсальных множества с базовыми переменными u и v соответственно. Пусть $R(u)$, $R(u, v)$ и $R(v)$ обозначают ограничения на u, (u, v) и v соответственно и представляют собой нечеткие отношения в U, $U \times V$ и V. Пусть A и F – нечеткие подмножества множеств U и $U \times V$. Тогда композиционное правило вывода утверждает, что решение уравнений назначения

$$R(u) = A, \tag{6.8}$$

$$R(u, v) = F \tag{6.9}$$

имеет вид

$$R(v) = A \circ F, \tag{8.10}$$

где $A \circ F$ – композиция A и F. В этом смысле мы можем *делать вывод* $R(v) = A \circ F$ из того, что $R(u) = A$ и $R(u, v) = F$.

Пример

В качестве простой иллюстрации применения этого правила предположим, что

$$U = V = 1 + 2 + 3 + 4,$$

$$A = \textbf{\textit{малый}} = 1/1 + 0.6/2 + 0.2/3$$

и

$$F = \textbf{\textit{примерно равны}} = 1/((1,1) +/(2,2) + (3,3) + (4,4)) +$$
$$+ 0.5/((1,2) + (2,1) + (2,3) + (3,2) + (3,4) + (4,3)).$$

Другими словами, A – унарное нечеткое отношение в U, названное ***малый***, F – бинарное нечеткое отношение в $U \times V$, названное ***примерно равны***.

Уравнения назначения в этом случае имеют вид

$$R(u) = \textbf{\textit{малый}},$$
$$R(u, v) = \textbf{\textit{примерно равны}},$$

и, следовательно,

$$R(v) = \textbf{\textit{малый}} \circ \textbf{\textit{примерно равны}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

что можно аппроксимировать следующим образом:

$$R(v) = \textbf{\textit{более или менее малый}},$$

Основная идея метода

- Используя композиционное правило вывода, из того, что $R(u)$ = ***малый*** и $R(u,v)$ = ***примерно равны***, мы вывели, что
$$R(v) = \begin{bmatrix}1 & 0.6 & 0.5 & 0.2\end{bmatrix} \text{ точно}$$
  и
  $R(v)$ = ***более или менее малый*** – в качестве лингвистического приближения.
- Словами этот приближенный вывод можно записать в виде:

u – ***малый***	предпосылка
u и v – ***примерно равны***	предпосылка
v – ***более или менее малый***	приближенный вывод

- Основная идея этого схематически описанного метода состоит в следующем.
  - Каждый факт или предпосылка записывается в виде уравнения назначения в отношениях, содержащего одно или большее число ограничений на базовые переменные.
  - Эти уравнения решаются относительно желаемых ограничений при помощи композиции нечетких отношений.
  - Получаемые решения и представляют собой вывод из данного набора предпосылок.

Приближенные рассуждения на основе modus ponens

- Напомним правило вывода ***modus ponens*** в обычной логике.
- Это правило можно записать следующим образом:

Посылка 1: если x есть A, то у есть B
Посылка 2: x есть A

Следствие: y есть B,

где x и y - имена объектов, A, B - обозначения понятий областей рассуждения U и V соответственно.

- Можно привести следующий пример правила вывода ***modus ponens*** в обычной логике.

Посылка 1: если слива красная, то слива спелая
Посылка 2: эта слива красная

Следствие: эта слива спелая

Обобщение материальной импликации

- В традиционной логике материальная импликация ➔ определяется как логическая связка для пропозициональных переменных.
- Если А и В – пропозициональные переменные, то таблица истинности для А➔В, или, что эквивалентно, ЕСЛИ А, ТО В, записывается в таком виде табл:

A \ B	T	F
T	T	F
F	T	T

- Чтобы обобщить понятие материальной импликации на нечеткие множества, предположим, что U и V – два возможно различных универсальных множества, а A, B и C – нечеткие подмножества U, V и V соответственно.
- Сначала определим смысл высказывания *ЕСЛИ A, ТО B, ИНАЧЕ C* и затем определим *ЕСЛИ A, ТО B* как частный случай высказывания *ЕСЛИ A, ТО B, ИНАЧЕ C*.

Определение

- Высказывание *ЕСЛИ A, ТО B, ИНАЧЕ C,* есть бинарное нечеткое отношение в $U \times V$ определяемое следующим образом:

$$ЕСЛИ\ A,\ ТО\ B,\ ИНАЧЕ\ C = A \times B + \overline{A}\ \mathbf{U}\ C. \qquad (*)$$

- То есть если *A, B* и *C* – унарные нечеткие отношения в *U*, *V* и *V*, тогда *ЕСЛИ A, ТО B, ИНАЧЕ C* – бинарное нечеткое отношение в $U \times V$, которое является объединением декартова произведения *A* и *B* и декартова произведения отрицания *A* и *C*.
- Далее высказывание *ЕСЛИ A, ТО B* можно рассматривать как частный случай высказывания *ЕСЛИ A, ТО B, ИНАЧЕ C* при допущении, что *C* – полное множество *V*. Таким образом,

$$ЕСЛИ\ A,\ ТО\ B \overset{\Delta}{=} ЕСЛИ\ A,\ ТО\ B,\ ИНАЧЕ\ V = A \times B\ \mathbf{U}\ \overline{A} \times V \qquad (**)$$

- В сущности, это равнозначно интерпретации высказывания *ЕСЛИ A, ТО B* высказыванием *ЕСЛИ A, ТО B, ИНАЧЕ* ***безразлично***.

Определение

- Пусть A_1, A_2 и B – нечеткие подмножества множеств U, U и V соответственно. Предположим, что значение A_1 назначено ограничению $R(u)$, а отношение $A_2 \rightarrow B$ (определенное по формуле (**)) назначено ограничению $R(u,v)$, т. е.

$$R(u) = A_1,$$
$$R(u,v) = A_2 \rightarrow B.$$

- Как было показано раньше, эти уравнения назначения в отношениях можно разрешить относительно ограничения на v следующим образом:

$$R(v) = A_1 \circ (A_2 \rightarrow B).$$

- Выражение этого вывода в форме

A_1	предпосылка	сукцедент	
$A_2 \rightarrow B$	импликация	акцедент	(***)
$A_1 \circ (A_2 \rightarrow B)$	вывод	следствие	

и составляет формулировку обобщенного правила modus ponens.

Применение правила

- Приведенная формулировка отличается от традиционной формулировки правила modus ponens в двух отношениях; во-первых, здесь допускается, что A_1, A_2 и B нечеткие множества, и, во-вторых, A_1 необязательно идентично A_2.
- Пользуясь терминологией приведенной ренее, правило modus ponens на случай, когда посылки являются нечеткими понятиями, то схему нечеткого вывода можно записать следующим образом:

Посылка 1: если x есть A, то y есть B

Посылка 2: x есть A'

Следствие: y есть B',

где x и y – имена объектов, A, A', B, B' – обозначения нечетких подмножеств областей рассуждения U, U, V *и* V соответственно. Можно привести следующий пример такого типа вывода со сливами.

- ***Пример.***

Пример правила вывода modus ponens в нечеткой логике.

Посылка 1: если слива красная, то слива спелая

Посылка 2: эта слива очень красная

Следствие: эта слива очень спелая

Формализация нечеткой импликации

- ***Посылка 1*** в виде если ***x есть** A**, **то y есть B*** представляет некоторое соответствие между A и B. В литературе приводится много отношений, которые могут быть формализацией такого рода соответствия. Приведем некоторые из них.
- Пусть A и B - нечеткие множества в универсальных множествах U и V с функциями принадлежности $\mu_A(u)$ и $\mu_B(v)$ соответственно $\times$,$\cup$, $\cap$, $\overline{}$ $\oplus$ - декартово произведение, объединение, пересечение, дополнение и ограниченная сумма для нечетких множеств.
- Приведем примеры следующих нечетких отношений, которые могут служить формализацией нечеткого условного высказывания ***«Если x есть** A**, то y есть B»***.

$$R_m = (A \times B) \cup (\overline{A} \times V) = \max\left[\min\left(\mu_A(u), \mu_B(v)\right), 1 - \mu_A(u)\right];$$

$$R_\alpha = \left(\overline{A} \times V\right) \oplus (U \times B) = \min\left[\mu_A(u), \mu_B(v)\right].$$

- Следствие B' в обобщенном modus ponens получается из ***посылки 1*** и ***посылки 2*** как max-min композиция нечеткого множества A' и нечеткого отношения, полученного в одном из вышеприведенных правил.
- Таким образом, применяя разные формализации нечеткого условного высказывания «***Если x есть** A**, то y есть B***», мы получаем из одной посылки A', вообще говоря, разные выводы:

$$B'_m = A' \circ R_m = A' \circ \left[(A \times B) \cup \left(\overline{A} \times V\right)\right];$$

$$B'_\alpha = A' \circ R_\alpha = A' \circ \left[\left(\overline{A} \times V\right) \oplus (U \times B)\right].$$

Приближенные рассуждения на основе modus tollens

- Напомним правило вывода *modus tollens* в обычной логике.
- Это правило можно записать следующим образом:

Посылка 1: если x есть A, то y есть B

Посылка 2: y есть не B

Следствие: x есть не A,

где x и y – имена объектов, A, B – обозначения понятий областей рассуждения U и V соответственно. Можно привести следующий пример такого типа вывода.

Пример

Пример правила modus tollens в обычной логике.

Посылка 1: если слива красная, то слива спелая

Посылка 2: эта слива не спелая

Следствие: эта слива не красная

Обобщение правила

- Обобщение данного правила на случай, когда посылки являются нечеткими понятиями можно записать следующим образом:

Посылка 1: если x есть A, то y есть B

Посылка 2: y есть не B'

Следствие: x есть не A',

где x и y - имена объектов, A, A, B, B' - обозначения нечетких подмножеств областей рассуждения U, U, V и V соответственно. Можно привести следующий пример такого типа вывода.

Пример

Пример правила modus tollens в нечеткой логике.

Посылка 1: если слива красная, то слива спелая

Посылка 2: эта слива слегка спелая

Следствие: эта слива более или менее красная

Применение правила

- Аналогично обобщенному modus ponens, следствие A' получается в результате max-min – композиции соответствующего отношения служащих формализацией нечеткого условного высказывания ***«Если x есть A, то y есть B»*** и нечеткого множества B':

$$A'_m = R_m \circ B' = \left[\left(A \times B \right) \cup \left(\overline{A} \times V \right) \right] \circ B';$$

$$A'_\alpha = R_\alpha \circ B' = \left[\left(\overline{A} \times V \right) \oplus \left(U \times B \right) \right] \circ B'$$

- Проблема выбора наиболее адекватного конкретной задаче метода нечетких рассуждений на основе modus tollens решается так же, как и в случае modus ponens.

Формализация логических связок (Нечеткая логика)

- Ранее мы говорили о том, что операции пересечения, объединения и дополнения в множестве *P(U)* всех нечетких множеств, заданных на одном универсальном множестве *U* могут быть определены различными способами.
- Эти способы являются различными обобщениями соответствующих операций для обычных множеств и берут свое начало в работах по многозначным логикам, где возникают аналогичные проблемы.
- При использовании различных операций, мы получаем также различные интерпретации логических связок "И", "ИЛИ", "НЕ", соответствующих операциям пересечения, объединения и дополнения.

Расширение логических операций

- **Утверждение:**
  – Логические операции «НЕ», «И» и «ИЛИ» образуют полную систему, т.е. с их помощью можно задать любую другую логическую операцию, или сочетание логический операций.
- Расширением логических операций при переходе от четкой логики к нечеткой производится путем введения функций, носящих название треугольных норм: норм (t - норм) и конорм (s - норма, t - конорм) для логических операций «И» и «ИЛИ» соответственно.

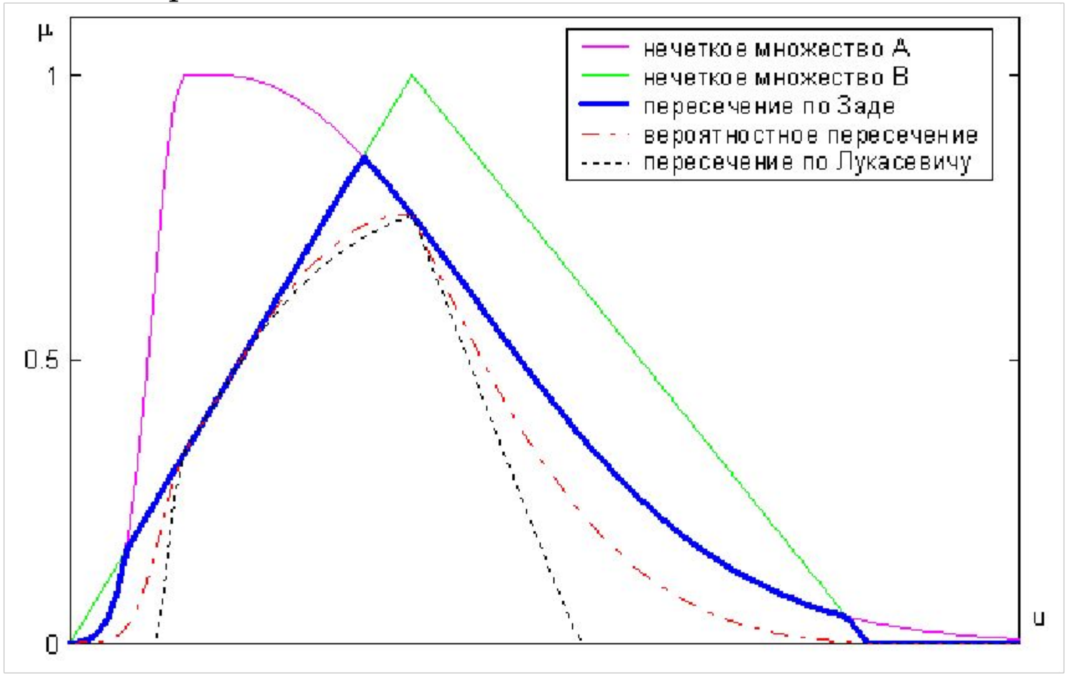
Треугольные нормы

Треугольной нормой (***T-нормой***) называется действительная двухместная функция $T\colon [0;1] \times [0;1] \to [0;1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $T(0, 0) = 0$, $T(\mu_A, 1) = T(1, \mu_A) = \mu_A$ (ограниченность);
2. $T(\mu_A, \mu_B) \le T(\mu_C, \mu_D)$, если $\mu_A \le \mu_C$ и $\mu_B \le \mu_D$ (монотонность);
3. $\mathrm{T}(\mu_A, \mu_B) = \mathrm{T}(\mu_B, \mu_A)$ (коммутативность);
4. $T(\mu_A, T(\mu_B, \mu_C)) = T(T(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$ (ассоциативность).

Треугольные нормы

- Наиболее часто используются такие *T*-нормы:
    - пересечение по Заде – $T(a,b)=min(a,b)$;
    - вероятностное пересечение – $T(a,b)=a\times b$;
    - пересечение по Лукасевичу – $T(a,b)=max(a+b-1,0)$.
- Примеры выполнения пересечения нечетких множеств с использованием этих *T-норм* показаны на рис.



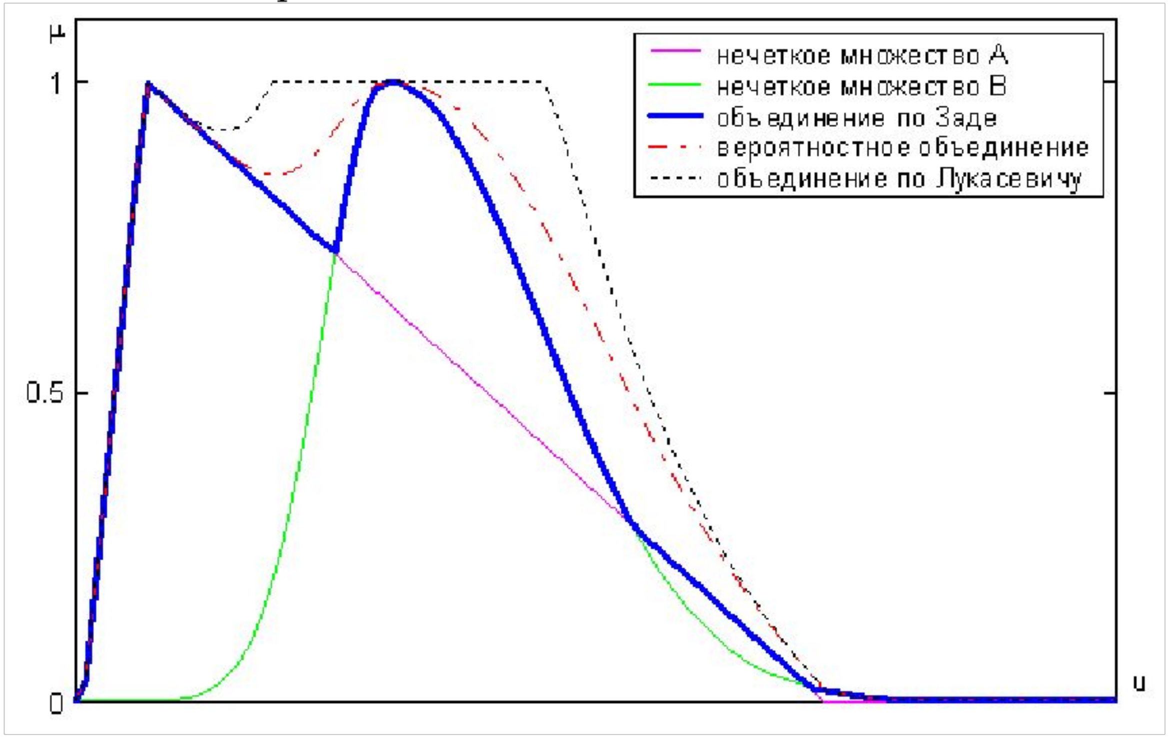
Пересечение нечетких множеств с использованием различных *t*-норм

Треугольные нормы

- Треугольной конормой (***T-конормой***) называется действительная двухместная функция $\perp$: $[0;1] \times [0;1] \rightarrow [0;1]$, удовлетворяющая следующим условиям:
    1. $\perp (1,\ 1) = 1,\ \perp(\mu_A, 1) = \perp(1,\ \mu_A) = 1$ (ограниченность);
    2. $\perp(\mu_A,\ \mu_B) \geq \perp(\mu_C,\ \mu_D)$, если $\mu_A \geq \mu_C$ и $\mu_B \geq \mu_D$ (монотонность);
    3. $\perp(\mu_A, \mu_B) = \perp(\mu_B, \mu_A)$ (коммутативность);
    4. $\perp(\mu_A,\ \perp(\mu_B,\ \mu_C)) = \perp(\perp(\mu_A,\ \mu_B),\ \mu_C)$ (ассоциативность).
- Не трудно видеть, что операторы T и $\perp$ являются сопряженными в том смысле, что $\perp(\mu_A,\ \mu_B) = 1 - T(1 - \mu_A, 1 - \mu_B)$.

Треугольные нормы

- Наиболее часто используются такие s-нормы:
  - объединение по Заде – $S(a,b)=max(a,b)$;
  - вероятностное объединение - $S(a,b)=a+b-ab$;
  - объединение по Лукасевичу - $S(a,b)=min(a+b,1)$.
- Примеры выполнения объединения нечетких множеств с использованием этих s-норм показаны на рис.



Объединение нечетких множеств с использованием различных s-норм

Отрицание

- Наиболее общее определение функции отрицания в теории нечетких множеств может быть сформулировано следующим образом.
- Отрицанием называется функция c: $[0;1] \rightarrow [0;1]$, удовлетворяющая следующим условиям:
    1. $c(0) = 1, c(1) = 0;$
    2. c - невозрастающая функция, т.е. если $\mu_A \leq \mu_B$, то $c(\mu_A) \geq c(\mu_B)$.

- Можно привести следующие примеры отрицаний:

1. $c(\mu) = 1 - \mu$

2. $c_r(\mu) = \sqrt{1- m^2}$

3. $c_\lambda(\mu_A) = \dfrac{1-\mu}{1+\lambda \times \mu}, \ -1 < \lambda < \infty$

4. $c_\alpha(\mu) = \begin{cases} 0 \text{ при} & \mu \leq \alpha \\ 1 \text{ при} & \mu > \alpha \end{cases}$

Логико-лингвистическое описание систем, нечеткие модели

- Логико-лингвистические методы описания систем основаны на том, что поведение исследуемой системы описывается на естественном (или близком к естественному) языке в терминах лингвистических переменных.
- Определяются входные и выходные параметры системы, которые рассматриваются как лингвистические переменные, а качественное описание процесса задается совокупностью высказываний $L_1, \ldots, L_k$. Например, если исследуемая система имеет один «вход» ($A = \square\ \langle A_i \rangle$, $i=1,\ldots,k$) и один «выход» ($B = \square\ \langle B_i \rangle$, $i=1,\ldots,k$), то высказывания будут следующего вида:

  L_1 : если A_1 то B_1,
  L_2 : если A_2 то B_2,
  ....
  L_k : если A_k то B_k,

  где $A_1, A_2, .., A_k$ – термы входной лингвистической переменной, заданные как нечеткие множества, а B_1, B_2, …, B_k - термы выходной лингвистической переменной, заданные как нечеткие множества.
- Здесь, каждое из таких высказываний L_i представляется импликацией $A_i \rightarrow B_i$.
- Совокупность импликаций $\{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$ отражает функциональную взаимосвязь входной и выходной переменных и является основой построения нечеткого отношения $X\ R\ Y$, заданного на произведении $X \times Y$ универсальных множеств входных и выходных переменных.

Логико-лингвистическое описание систем, нечеткие модели

- Если система имеет более одного входа и/или выхода, то с помощью правил преобразования дизъюнктивной (*и*) и конъюнктивной (*или*) формы описание системы можно привести к виду:

$$L_i\text{: если } A_{i_1}^1 \text{ и/или } A_{i_2}^2 \text{ и/или ... и/или } A_{i_n}^n \text{ то } B_{j_1}^1 \text{ и/или } B_{j_2}^2 \text{ и/или ... и/или } B_{j_m}^m,$$

$$i=1,\dots,k$$

где: n и m количество входных и выходных переменных соответственно;

A^t, $t=1,\dots,n$ лингвистические переменные описывающие входные параметры системы;

B^r, $r=1,\dots,m$ лингвистические переменные описывающие выходные параметры системы;

$i_t, t=1,\dots,n$ и j_r, $r=1,\dots,m$ номера термов соответствующих входных и выходных параметров системы.

НЕЧЕТКИЕ ВЫВОДЫ

Нечеткие выводы

- Используемый в различного рода экспертных и управляющих системах механизм нечетких выводов в своей основе имеет базу знаний, формируемую специалистами предметной области в виде логико-лингвистического описания системы.
- Поясним на простом примере, как выполняются нечеткие выводы по правилам. Пусть существуют знания эксперта о том, что необходимо открыть спускной клапан, если уровень воды поднимается. Это знание можно представить с помощью нечеткого продукционного правила типа «если … то …» следующим образом:

Если уровень воды высокий, **то** открыть клапан. (1)

- Здесь выражение, стоящее после **если**, называют антецедентом, предпосылкой, условием и т.п., а выражение, стоящее после **то**, заключением, операцией и т.п. В нашем случае важно описать предпосылку и заключение в виде нечеткого отношения. Другими словами, в исходное выражение не попали данные о том, каков уровень воды в метрах, на какой угол поворачивается клапан.

Нечеткие выводы

- Однако сам эксперт это знает. Например, если мы спросим у него: «Высокий уровень воды – это сколько метров?»- то получим ответ: «Примерно 2 м». При этом интерпретация с помощью нечеткого множества, например:

$$\text{ВЫСОКИЙ} = 0{,}1/1{,}5\text{ м} + 0{,}3/1{,}6\text{ м} + 0{,}7/1{,}7\text{ м} + 0{,}8/1{,}8\text{ м} + \\ + 0{,}9/1{,}9\text{ м} + 1{,}0/2{,}0\text{ м} + 1{,}0/2{,}1\text{ м} + 1{,}0/2{,}2\text{ м} \qquad (2)$$

гораздо более точно отражает мысль эксперта, нежели строгая интерпретация его слов: «До 1,9 м еще невысокий уровень, а начиная с 2,0 м – высокий». Аналогично угол поворота клапана, если принять 90° за полное открытие, можно описать с помощью следующей функции принадлежности:

$$\text{ОТКРЫТЬ} = 0.1/30° + 0{,}2/40° + 0{,}3/50° + 0{,}5/60° + \\ + 0{,}8/70° + 1{,}0/80° + 1{,}0/90°. \qquad (3)$$

Нечеткие выводы

- Человек, проектирующий данную систему, создает из правил в словесном представлении типа (1) конкретные функции принадлежности типа (2), (3).
- Обычно он следует следующему методу:
  1. определяет значения методом вопросов и ответов или становится учеником эксперта;
  2. поручает эксперту выполнение операции и воссоздает ситуацию из хронометрированных данных;
  3. корректирует значения функции, получая наилучшие результаты из экспериментов, имитирующих данную ситуацию.

Нечеткие выводы

- Если получить функции принадлежности, следуя указанному выше методу, то можно запомнить их в ЭВМ как базу знаний (например, формулы (2) и (3) можно запомнить как информацию в одномерном массиве, индексы в котором соответствуют элементам полного пространства).
- Без ограничения общности будем считать, что нечеткие продукционные правила типа (1) накапливаются в базе знаний.
- Пусть также при наблюдении текущего уровня воды обнаружено, что

$$\text{Уровень воды довольно высокий.} \qquad (4)$$

Нечеткие выводы

- Если наблюдения уровня воды возможны с большей точностью, то можно получить точную информацию, например: «уровень воды 1,7 м».
- Однако на практике нередки случаи, когда из-за особенностей промышленной системы информацию с достаточно хорошей точностью получить не удается (при этом учитывается погрешность измерения, которая меняет в ту или иную сторону значение 1,7 м), либо нет возможности установить устройство измерения уровня воды и, например, этот уровень вынуждены оценивать, постукивая по емкости и реагируя на звук.
- В подобных случаях удобно принимать за информацию наблюдение (4), представленное с помощью нечеткого множества следующим образом:

Довольно ВЫСОКИЙ - 0,5/1,6 м + 1,0/1,7 м + 0,8/1,8 м + 0,2/1,9 м. (5)

Нечеткие выводы

- Какую же операцию нужно проделать в такой ситуации? Другими словами, поставим задачу: определить нечто, отмеченное знаком «?» в формуле (6):

  Если ВЫСОКИЙ, то ОТКРЫТЬ

  Довольно ВЫСОКИЙ

  ?

- Разумеется, предпосылка ВЫСОКИЙ и наблюдение «довольно ВЫСОКИЙ» образуются путем сопоставления. В четкой логике сопоставление не имеет смысла, поэтому никакого логического вывода сделать нельзя. Однако мы говорим о человеке, а он, получив путем приближенного сопоставления вывод (7):

  если ВЫСОКИЙ, то ОТКРЫТЬ

  довольно ВЫСОКИЙ

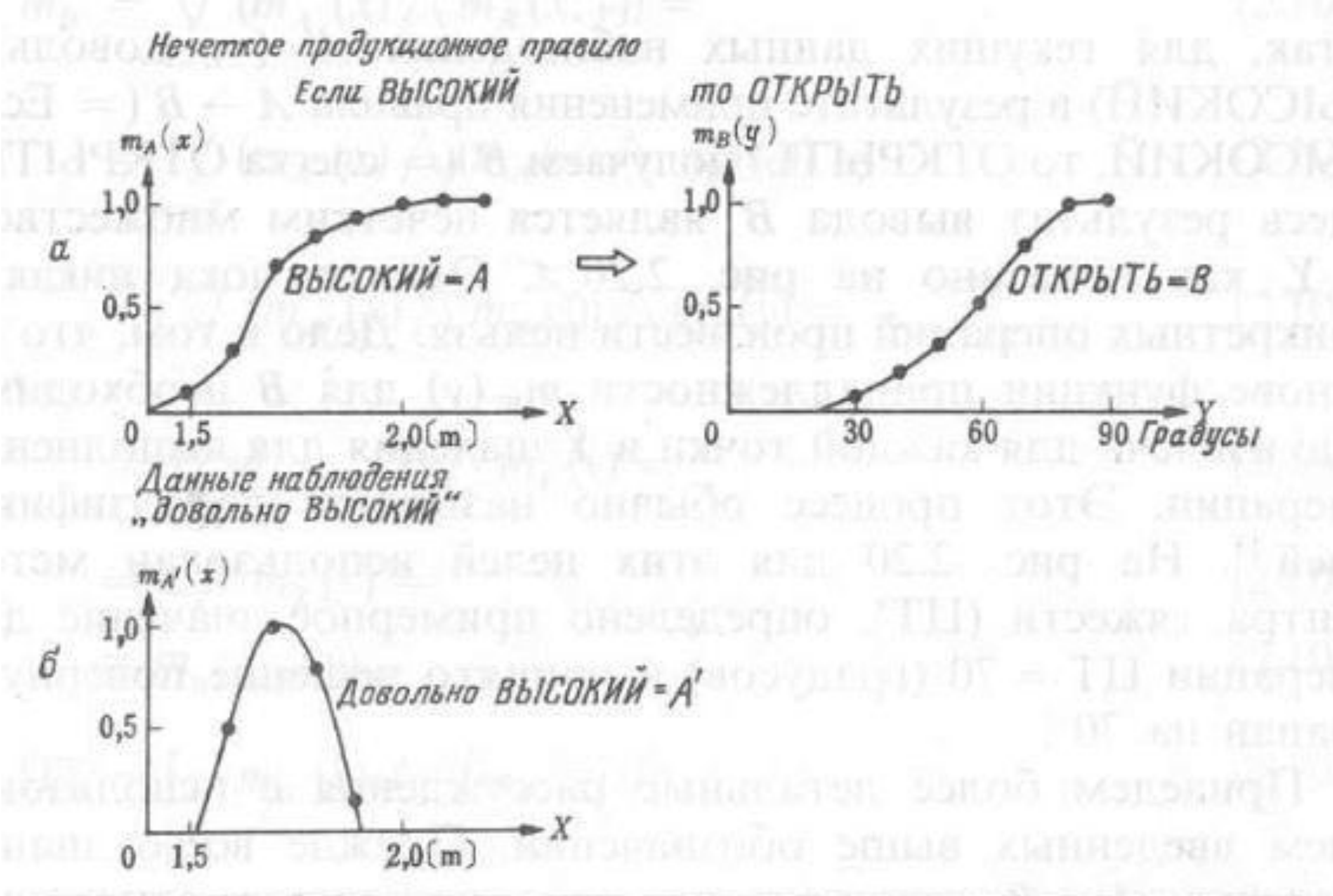
  Слегка ОТКРЫТЬ

- должен слегка приоткрыть клапан. По сути он выполнил нечеткий вывод (точнее, провел приближенные рассуждения).

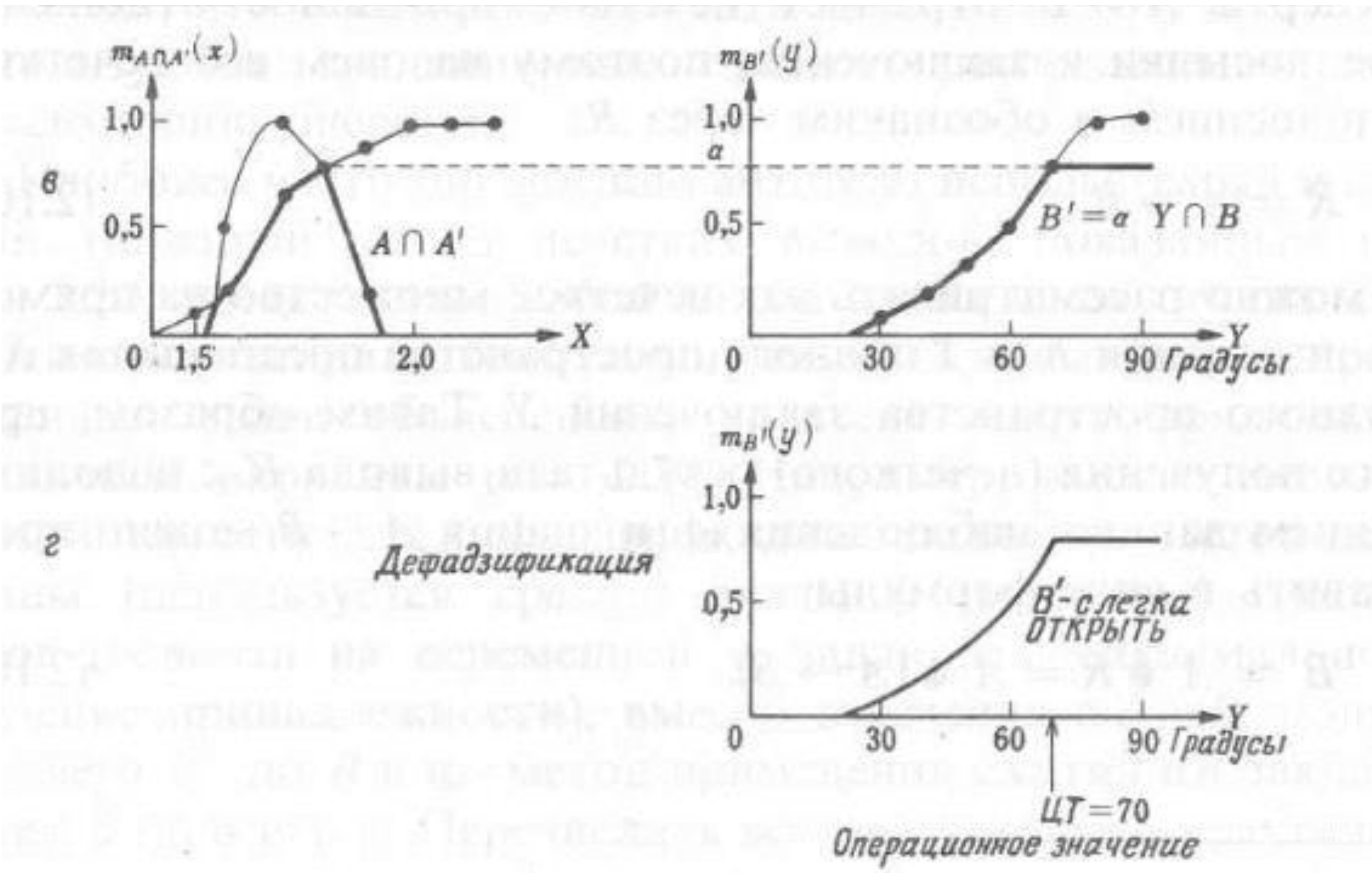
Нечеткие выводы

- Если говорить о мышлении человека на лингвистическом уровне, то формула (7) представляет классический пример нечеткого вывода, но какие же вычисления нужно проделать в программе или внутри специальной микросхемы нечеткого вывода, где встроены функции принадлежности?
- Существует более ста методов преобразования нечетких выводов на лингвистическом уровне в вычислениях, но если ограничиться только методом, наиболее часто используемым на практике, то все объяснения можно привести с помощью рис.

Нечеткие выводы



Нечеткие выводы



Нечеткие выводы

- Здесь полное пространство предпосылок - уровни воды, а полное пространство заключений – углы работы клапана. Обозначим их соответственно через X и Y. Используя формулы (2) и (3), нечеткое продукционное правило (1) можно графически изобразить так, как на рис. а (данные между точками соответствующим образом интерполированы и показаны непрерывной линией). Кроме того, позаботимся об упрощении рассуждений и обозначим через A нечеткое множество ВЫСОКИЙ в предпосылке X и через B нечеткое множество ОТКРЫТЬ в заключении Y. Нечеткое множество «довольно ВЫСОКИЙ» в данных наблюдениях X (сокращенно A') из формулы (5) можно представить так, как на рис. *б*.
- На рис. *в* графически изображен процесс классического нечеткого вывода. Справа как A ⊠ A' получен результат приближенного сопоставления предпосылки правила A и данных наблюдения A'. Затем рассмотрим максимальное значение α как некую меру сопоставления A ⊠ A', выполним редукцию по этой мере заключения B в правиле и получим результат вывода B (рис. в).
- В качестве способа редукции B выбрано отсечение по мере сопоставления α , на рисунке αY означает, что

$$\mu_{aY}(y) = \alpha \quad \forall y \in Y \tag{8}$$

- Итак, для текущих данных наблюдения A' (= довольно ВЫСОКИЙ) в результате применения правила $A \rightarrow B$ (= Если ВЫСОКИЙ, то ОТКРЫТЬ) получаем B' (= слегка ОТКРЫТЬ). Здесь результат вывода B' является нечетким множеством в Y, как показано на рис. 6.6, *г*. Однако пока никаких конкретных операций произвести нельзя.
- Дело в том, что на основе функции принадлежности $\mu_{B'}(y)$ для B необходимо еще извлечь для каждой точки в Y значения для выполнения операции. Этот процесс обычно называют дефаззификацией. На рис. 6.6 для этих целей использован метод центра тяжести (ЦТ), определено примерное значение для операции ЦТ = 70 (градусов) и принято решение повернуть клапан на 70°.

Нечеткие выводы

Приведем более детальные рассуждения с использованием введенных выше обозначений. Прежде всего знание эксперта $A \to B$ отражает нечеткое причинное отношение предпосылки и заключения, поэтому назовем его нечетким отношением и обозначим через R:

$$R = A \to B. \tag{9}$$

R можно рассматривать как нечеткое множество на прямом произведении $X \times Y$ полного пространства предпосылок X и полного пространства заключений Y. Таким образом, процесс получения (нечеткого) результата вывода B' с использованием данных наблюдения A' и знания $A \to B$ можно представить в виде формулы:

$$B' = A' \circ R = A' \circ \left(A \to B \right). \tag{10}$$

Здесь $\circ$ называется композиционным правилом нечеткого вывода. Кроме того, стрелка $\to$ в правиле $A \to B$ (9) называется нечеткой импликацией. Можно ли каким-то образом записать указанные выше определения на уровне функций принадлежности? Фактически нечеткий вывод на рис. является применением максминной композиции в качестве композиционного правила нечеткого вывода и операции взятия минимума в качестве нечеткой импликации:

$$\begin{aligned} \mu_{B'} &= \bigvee_{x \in X} \left(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_R(x, y) \right) = \bigvee_{x \in X} \left(\mu_{A'}(x) \wedge \left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \right) \right) = \\ &= \left(\bigvee_{x \in X} \left(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x) \right) \right) \wedge \mu_B(y) = \bigvee_{x \in X} \mu_{A' \cap A}(x) \wedge \mu_B(y) = \\ &= \alpha \wedge \mu_X(y) = \mu_{\alpha Y \cap B}(y), \end{aligned} \tag{11}$$

$$ЦТ = {\int_Y y \mu_{B'}(y) dy} \Big/ {\int_Y \mu_{B'}(y) dy}. \tag{12}$$

Нечеткие выводы

- Наиболее часто используемый и самый типичный метод нечетких выводов, показанный на рис., представляет собой метод нахождения центра тяжести композиции максимум-минимум.
- Основываясь на приведенных выше объяснениях, читатели могут придумать различные варианты. Например, вместо метода центра тяжести для дефаззификации предложен метод медианы (используется среднее значение (медиана)), метод весов (основан на переменной y, задающей максимальное значение принадлежности), вместо отсечения $\alpha Y \square B$, получающего B' по B и α, – метод применения сжатия αB заключения B по α и т. п.
- Перечислить все методы здесь практически невозможно (их предложено более ста).
- Отметим только, что наиболее пригодным считается метод центра тяжести с композицией максимум-минимум.

Нечеткие выводы

- Как операцию композиции, так и операцию импликации в алгебре нечетких множеств можно реализовывать по-разному (при этом, естественно, будет разниться и итоговый получаемый результат), но в любом случае общий логический вывод осуществляется за следующие четыре этапа:
  1. *Нечеткость* (введение нечеткости, фаззификация, fuzzification).
  2. *Логический вывод*.
     1. Агрегация
     2. Активация
  3. *Композиция.*
  4. В заключение – *приведение к четкости* (дефаззификация, defuzzification).

Нечеткие выводы

1. *Нечеткость* (введение нечеткости, фаззификация, fuzzification). Функции принадлежности, определенные на входных переменных применяются к фактическим значениям для определения степени истинности каждой предпосылки каждого правила.

Нечеткие выводы

2. *Логический вывод*. Вычисленное значение истинности для предпосылок каждого правила применяется к заключениям каждого правила. Это приводит к одному нечеткому подмножеству, которое будет назначено каждой переменной вывода для каждого правила. В качестве правил логического вывода обычно используются только операции min (МИНИМУМ) или prod (УМНОЖЕНИЕ). В логическом выводе МИНИМУМА функция принадлежности вывода «отсекается» по высоте соответствующей вычисленной степени истинности предпосылки правила (нечеткая логика «И»). В логическом выводе УМНОЖЕНИЯ функция принадлежности вывода масштабируется при помощи вычисленной степени истинности предпосылки правила.

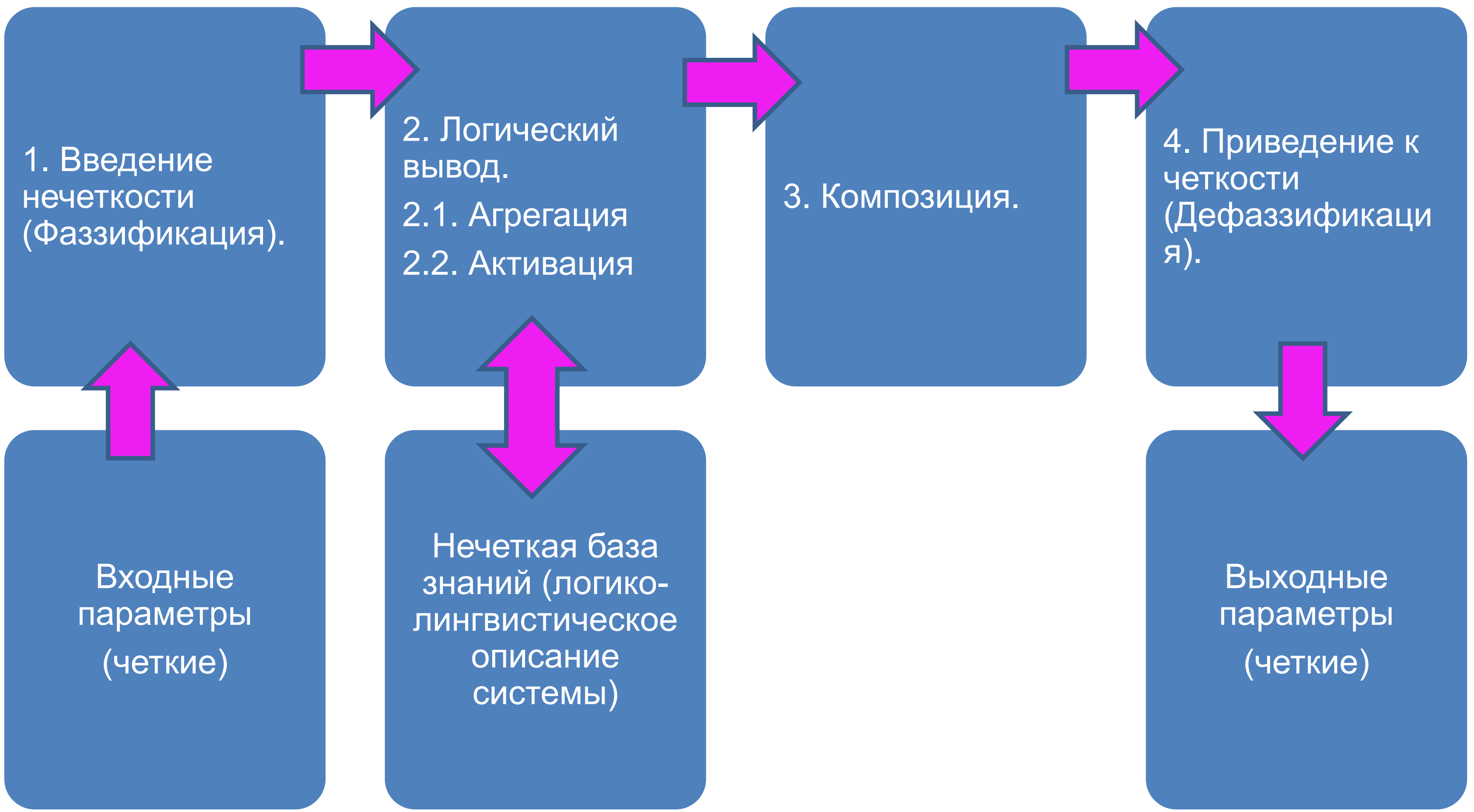
Нечеткие выводы

3. *Композиция.* Все нечеткие подмножества, назначенные к каждой переменной вывода (во всех правилах), объединяются вместе, чтобы формировать одно нечеткое подмножество для каждой переменной вывода. При подобном объединении обычно используются операции max (МАКСИМУМ) или sum (СУММА). При композиции МАКСИМУМА комбинированный вывод нечеткого подмножества конструируется как поточечный максимум по всем нечетким подмножествам (нечеткая логика «ИЛИ»). При композиции СУММЫ комбинированный вывод нечеткого подмножества конструируется как поточечная сумма по всем нечетким подмножествам, назначенным переменной вывода правилами логического вывода.

Нечеткие выводы

4. В заключение – *приведение к четкости* (дефаззификация, defuzzification), которое используется, когда полезно преобразовать нечеткий набор выводов в четкое число.

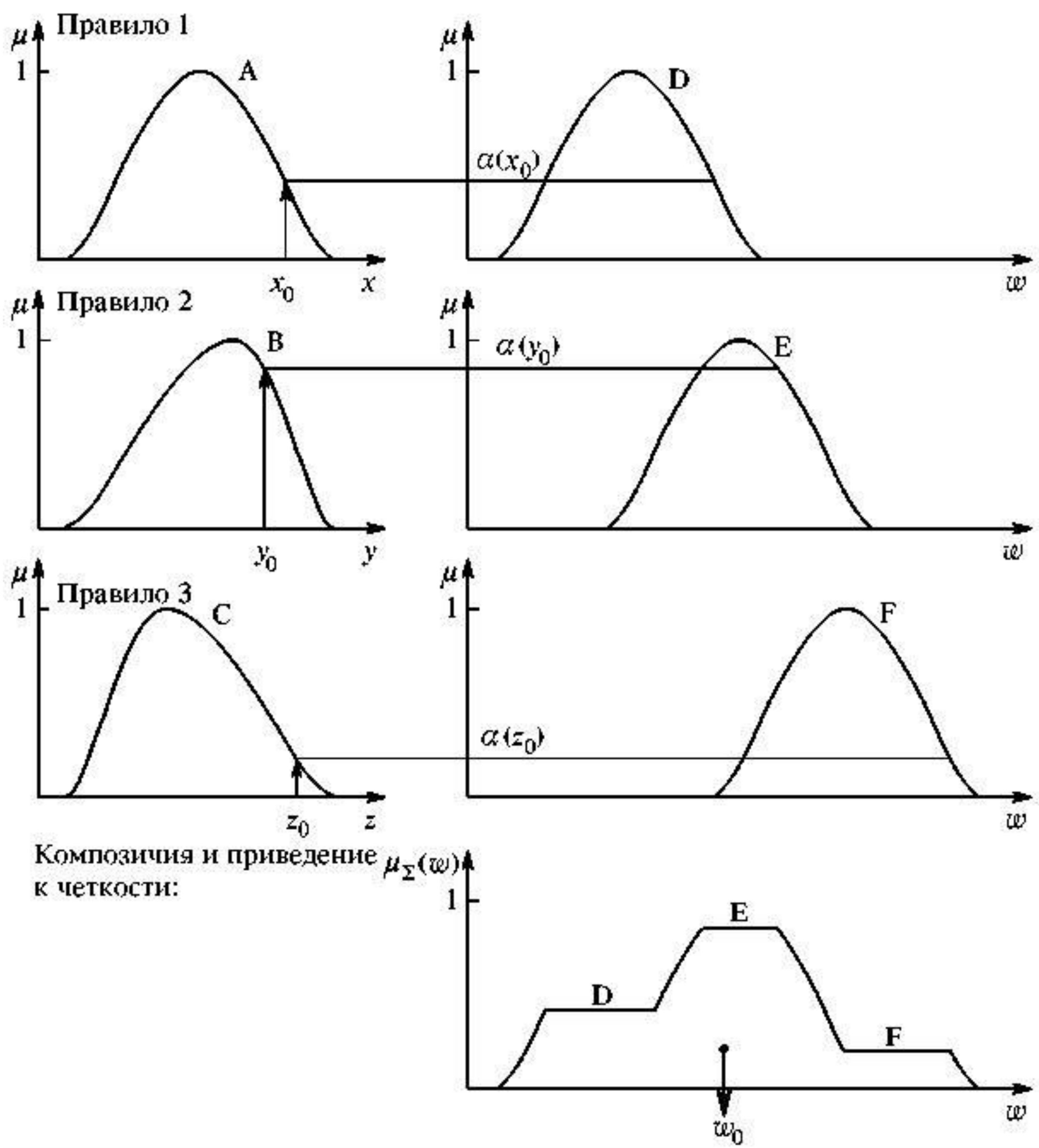
Общая схема НЛВ



Пример

- Пусть некоторая система описывается следующими нечеткими правилами:
  - $П_1$: если *x* есть А, тогда *w* есть *D*,
  - $П_2$: если *y* есть *B*, тогда *w* есть *E*,
  - $П_3$: если *z* есть *C*, тогда *w* есть *F*,

  где *x, y* и *z* – имена входных переменных, *w* – имя переменной вывода, а *A, B, C, D, E, F* – заданные функции принадлежности (треугольной формы).
- Процедура получения логического вывода иллюстрируется рис.
- Предполагается, что исходные переменные приняли некоторые конкретные (четкие) значения – x_0 , y_0 и z_0.



Правило 1
μ
1
A
D
α(x0)
x0
x
w
Правило 2
B
E
α(y0)
y0
y
Правило 3
C
F
α(z0)
z0
z
Композичия и приведение
к четкости:
μΣ(w)
E
D
F
w0

Пример

- В соответствии с приведенными этапами, на этапе 1 для данных значений и исходя из функций принадлежности *A, B, C,* находятся степени истинности $\alpha(x_0)$, $\alpha(y_0)$, $\alpha(z_0)$ предпосылок каждого из трех приведенных правил (см. рис.).
- На этапе 2 происходит «отсекание» функций принадлежности заключений правил (т.е. *D, E, F*) на уровнях $\alpha(x_0)$, $\alpha(y_0)$ и $\alpha(z_0)$.
- На этапе 3 рассматривается усеченные на втором этапе функции принадлежности и производится их объединение с использованием операции max, в результате чего получается комбинированное нечеткое подмножество, описываемое функцией принадлежности $\mu_\Sigma(w)$ и соответствующее логическому выводу для выходной переменной *w*.
- Наконец, на 4-м этапе – при необходимости – находится четкое значение выходной переменной, например, с применением центроидного метода: четкое значение выходной переменной определяется как центр тяжести для кривой $\mu_\Sigma(w)$, т. е.:

$$w_0 = \frac{\int_\Omega w\mu_\Sigma(w)dw}{\int_\Omega \mu_\Sigma(w)dw}.$$

АЛГОРИТМЫ НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА

Алгоритмы НЛВ

Рассмотрим следующие наиболее часто используемые модификации алгоритма нечеткого вывода, полагая, для простоты, что базу знаний организуют два нечетких правила вида:

$П_1$: если x есть A_1 и y есть B_1, тогда z есть C_1,

$П_2$: если x есть A_2 и y есть B_2, тогда z есть C_2.

где x и y – имена входных переменных, z – имя переменной вывода, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2 – некоторые заданные функции принадлежности, при этом четкое значение z_0 необходимо определить на основе приведенной информации и четких значений x_0 и y_0.

1. Алгоритм Mamdani

Данный алгоритм соответствует рассмотренному примеру и рис.

В рассматриваемой ситуации он математически может быть описан следующим образом:

1. Нечеткость: находятся степени истинности для предпосылок каждого правила: $A_1(x_0)$, $A_2(x_0)$, $B_1(y_0)$, $B_2(y_0)$.
2. Нечеткий вывод: находятся уровни «отсечения» для предпосылок каждого из правил (с использованием операции МИНИМУМ)

$$\alpha_1 = A_1(x_0) \wedge B_1(y_0),$$
$$\alpha_2 = A_2(x_0) \wedge B_2(y_0),$$

где через « $\wedge$ » обозначена операция логического минимума (min), затем находятся «усеченные» функции принадлежности:

$$C'_1 = \alpha_1 \wedge C_1(z),$$
$$C'_2 = \alpha_2 \wedge C_2(z).$$

3. Композиция: использование операции МАКСИМУМ (max, далее обозначаемой как « $\vee$ ») производится объединение найденных усеченных функций, что приводит к получению итогового нечеткого подмножества для переменной выхода с функцией принадлежности:

$$\mu_{\Sum}(z) = C(z) = C'_1(z) \vee C'_2(z) = \left(\alpha_1 \wedge C_1(z)\right) \vee \left(\alpha_2 \wedge C_2(z)\right).$$

4. Наконец, приведение к четкости (для нахождения z_0) проводится, например, центроидным методом.

2. Алгоритм Larsen

В алгоритме Larsen нечеткая импликация моделируется с использованием оператора умножения.

1. Первый этап – как в алгоритме Mamdani.
2. На втором этапе, как в алгоритме Mamdani вначале находятся значения

$$\alpha_1 = A_1(x_0) \wedge B_1(y_0),$$

$$\alpha_2 = A_2(x_0) \wedge B_2(y_0),$$

а затем – частные нечеткие подмножества $\alpha_1 C_1(z)$, $\alpha_2 C_2(z)$

3. Находится итоговое нечеткое подмножество с функцией принадлежности:

$$\mu_{\Sigma}(z) = C(z) = \alpha_1 C_1(z) \vee \alpha_2 C_2(z)$$

(в общем случае n правил $\mu_{\Sigma}(z) = C(z) = \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i C_i(z)$).

4. При необходимости производится приведение к четкости (как в ранее рассмотренных алгоритмах).

3. Алгоритм Tsukamoto

Исходные посылки – как у предыдущего алгоритма, но в данном случае предполагается, что функции $C_1(z)$, $C_2(z)$ являются монотонными.

1. Первый этап - такой же, как в алгоритме Mamdani.
2. На втором этапе сначала находятся (как в алгоритме Mamdani) уровни «отсечения» α_1 и α_2, а затем – посредством решения уравнений:

$$\alpha_1 = C_1(z), \qquad \alpha_2 = C_2(z)$$

– четкие значения (z_1 и z_2) для каждого из исходных правил.

3. Определяется четкое значение переменной вывода (как взвешенное среднее z_1 и z_2):

$$z_0 = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2}{\alpha_1 + \alpha_2};$$

в общем случае (дискретный вариант центроидного метода)

$$z_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i .$$

4. Алгоритм Sugeno

Sugeno и Takagi использовали набор правил в следующей форме (как и раньше, приводим пример двух правил):

П$_1$: если x есть A_1 и y есть B_1, тогда $z_1=a_1x+b_1y$,

П$_2$: если x есть A_2 и y есть B_2, тогда $z_2=a_2x+b_2y$.

1. Первый этап – как в алгоритме Mamdani.
2. На втором этапе находится $\alpha_1 = A_1(x_0) \wedge B_1(y_0)$, $\alpha_2 = A_2(x_0) \wedge B_2(y_0)$ и индивидуальные выходы

$$z_1^* = a_1x_0 + b_1y_0,$$
$$z_2^* = a_2x_0 + b_2y_0.$$

3. На третьем этапе определяется четкое значение переменной вывода:

$$z_0 = \frac{\alpha_1 z_1^* + \alpha_2 z_2^*}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

5. Упрощенный алгоритм нечеткого вывода

Исходные правила в данном случае задаются в виде:

П$_1$: если x есть A_1 и y есть B_1, тогда $z_1=c_1$,

П$_2$: если x есть A_2 и y есть B_2, тогда $z_2=c_2$,

где c_1 и c_2 – некоторые обычные (четкие) числа.

1. Первый этап – как в алгоритме Mamdani.
2. На втором этапе находятся числа $\alpha_1 = A_1(x_0) \wedge B_1(y_0)$, $\quad \alpha_2 = A_2(x_0) \wedge B_2(y_0)$.
3. На третьем этапе находится четкое значение выходной переменной по формуле

$$z_0 = \frac{\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

или – в общем случае наличии n правил – по формуле $z_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

6. Нисходящие нечеткие выводы

- Рассмотренные до сих пор нечеткие выводы представляют собой восходящие выводы от предпосылок к заключению. В последние годы в диагностических нечетких системах начинают применяться нисходящие выводы. Рассмотрим механизм подобного вывода на примере.
- Возьмем упрощенную модель диагностики неисправности автомобиля с именами переменных:
  - x_1 – неисправность аккумулятора;
  - x_2 – отработка машинного масла;
  - y_1 – затруднения при запуске;
  - y_2 – ухудшение цвета выхлопных газов;
  - y_3 – недостаток мощности.

Обратные выводы

- Между x_i и y_j существуют нечеткие причинные отношения $r_{i,j} = x_i \rightarrow y_j$, которые можно представить в виде некоторой матрицы R с элементами $r_{i,j}$ из отрехка *[0, 1]*.
- Конкретные входы (предпосылки) и выходы (заключения) можно рассматривать как нечеткие множества A и B на пространствах X и Y. Отношения этих множеств можно обозначить как $B = A \circ R$, где, как и раньше, знак «°» обозначает правило композиции нечетких выводов.
- В данном случае направление выводов является обратным к направлению выводов для правил, т.е. в случае диагностики имеется (задана) матрица R (знания эксперта), наблюдаются выходы B (или симптомы) и определяются входы A (или факторы).

Обратные выводы, поиск решения

- Пусть знания эксперта-автомеханика имеют вид:

$$R = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0,2 \\ 0,6 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix},$$

а в результате осмотра автомобиля его состояние можно оценить как:

$B = 0,9/y_1 + 0,1/y_2 + 0,2/y_3.$

- Требуется определить причину такого состояния: $A = a_1/x_1 + a_2/x_2$.
- Отношение введенных нечетких множеств можно представить в виде:

$$\begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0,2 \\ 0,6 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix},$$

либо, транспонируя, в виде нечетких векторов-столбцов:

$$\begin{bmatrix} 0,9 \\ 0,1 \\ 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,6 \\ 0,1 & 0,5 \\ 0,2 & 0,5 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

Обратные выводы, поиск решения

- При использовании (max-min)-композиции последнее соотношение преобразуется к виду

$$0,9=(0,9\wedge a_1)\vee(0,6\wedge a_2),$$
$$0,1=(0,1\wedge a_1)\vee(0,5\wedge a_2),$$
$$0,2=(0,2\wedge a_1)\vee(0,5\wedge a_2).$$

- При решении данной системы заметим, прежде всего, что в первом уравнении второй член правой части не влияет на правую часть, поэтому: $0,9=0,9\wedge a_1,\quad a_1\geq 0,9$.
- Из второго уравнения получим: $0,1\geq 0,5\wedge a_2,\quad a_2\leq 0,1$.
- Полученное решение удовлетворяет третьему уравнению, таким образом, имеем:

$$0,9\leq a_1\leq 1,0;\quad 0\leq a_2\leq 0,1,$$

т. е. лучше заменить аккумулятор (a_1 – параметр неисправности аккумулятора, a_2 – параметр отработки машинного масла).

Практическое применение

- На практике в задачах, подобных рассмотренной, количество переменных может быть существенным, могут одновременно использоваться различные композиции нечетких выводов, сама схема выводов может быть многокаскадной.
- Общих методов решения подобных задач в настоящее время, по-видимому, не существует.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ СИСТЕМ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ МЕТОДЫ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

Использование аппарата НЛ

I. В 1992 г. Wang показал, что нечеткая система, использующая набор правил:

П$_i$: если x_i есть A_i и y есть B_i, тогда z_i есть C_i, $i=1, 2, \ldots, n$, при:

1) гауссовских функциях принадлежности

$$A_i(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\alpha_{i1}}{\beta_{i1}}\right)^2\right), \qquad B_i(y) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\alpha_{i2}}{\beta_{i2}}\right)^2\right),$$

$$C_i(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\alpha_{i3}}{\beta_{i3}}\right)^2\right);$$

2) композиции в виде произведения $\left(A_i(x) \text{ and } B_i(y)\right) = A_i(x) \cdot B_i(y)$;

3) импликации в форме (Larsen) $\left(A_i(x) \text{ and } B_i(y)\right) \to C_i(z) = A_i(x) \cdot B_i(y) \cdot C_i(z)$;

4) центроидном методе приведения к четкости $z_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i B_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} A_i B_i$,

где α_i центры C_i; является универсальным аппроксиматором, т.е. может аппроксимироват любую непрерывную функцию на компакте U с произвольной точностью (естественно, при $n \to \infty$).

Использование аппарата НЛ

II. В 1995 г. Castro показал, что логический контроллер Mamdani при:

1) симметричных треугольных функциях принадлежности:

$$A_i(x)=\begin{cases}\dfrac{1-|a_i-x|}{\alpha_i}, \text{если} \quad |a_i-x|\le\alpha_i\\ 0, \text{противном случае,}\end{cases} \qquad B_i(y)=\begin{cases}\dfrac{1-|b_i-y|}{\beta_i}, \text{если} \quad |b_i-x|\le\beta_i\\ 0, \text{противном случае,}\end{cases}$$

$$C_i(z)=\begin{cases}\dfrac{1-|c_i-z|}{\gamma_i}, \text{если} \quad |c_i-x|\le\gamma_i\\ 0, \text{противном случае,}\end{cases}$$

2) композиции с использованием операции min: $\left(A_i(x) \text{ and } B_i(y)\right)=\min\left(A_i(x),B_i(y)\right)$;

3) импликации в форме Mamdani и центроидного метода приведения к четкости, также является универсальным аппроксиматором.

Использование аппарата НЛ

Иначе говоря: для каждой вещественной непрерывной функции g, заданной на компакте U, и для произвольного $\varepsilon > 0$ существует нечеткая экспертная система, формирующая выходную функцию $f(x)$ такую, что $\sup\limits_{x \in U} \| g(x) - f(x) \| \le \varepsilon$, где $\|\ \ \|$ - символ принятого расстояния между функциями.

Условия применения

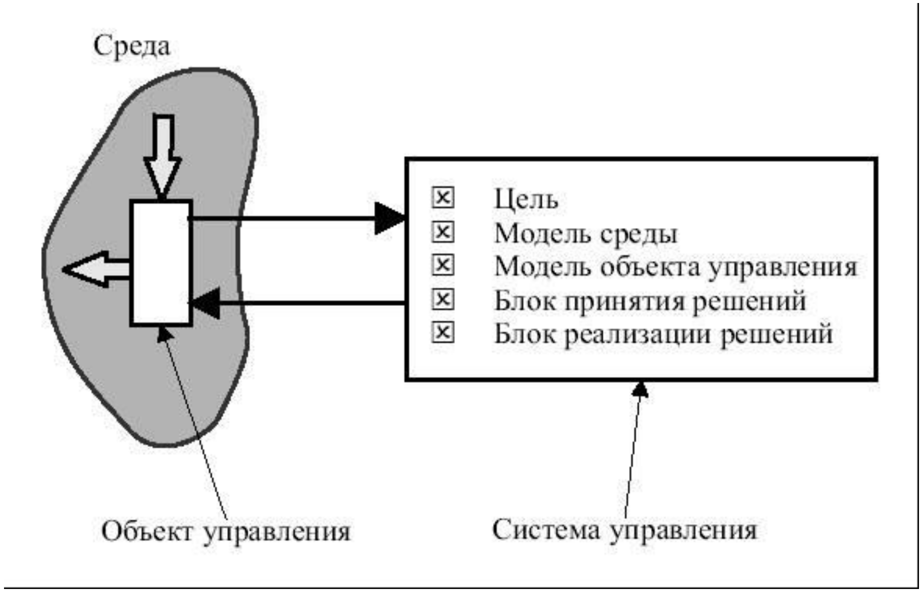
- Вообще говоря, системы с нечеткой логикой целесообразно применить для сложных процессов, когда нет простой математической модели; если экспертные знания об объекте или о процессе можно сформулировать только в лингвистической форме.
- Данные системы применять нецелесообразно, когда требуемый результат может быть получен каким-либо другим (стандартным) путем, или когда для объекта или процесса уже найдена адекватная и легко исследуемая математическая модель.
- Отметим, что основные недостатки систем с нечеткой логикой связаны с тем, что:
  – исходный набор постулируемых нечетких правил формулируется экспертом-человеком и может оказаться неполным или противоречивым;
  – вид и параметры функций принадлежности, описывают их входные и выходные переменные системы, выбираются субъективно и могут оказаться не вполне отражающими реальную действительность.

Приближенные рассуждения в прикладных задачах

- Проиллюстрируем применение аппарата приближенных рассуждений на примере нечетких контроллеров. Под нечеткими контроллерами понимается программно-аппаратные системы, управляющие некоторыми процессами (от английского слова control - управление). Такого рода системы имеют огромное число приложений - от бытовой техники до управления сложными технологическими процессами. Рынок нечетких контроллеров оценивается в миллиарды долларов.
- Для описания нечетких управляющих систем сформулируем основные понятия теории управляющих систем в классическом понимании.

Основные понятия теории управления

- Система управления на основе наблюдений среды и объекта управления и соответствия этих наблюдений цели формирует решение по выбору управляющего воздействия на объект (в частном случае это может быть "пустое" решение).
- Если при сложившейся ситуации в среде и на объекте управления цель достигнута - продолжается наблюдение за средой и объектом.
- Если цель не достигается - необходимо некоторое воздействие на объект. Это воздействие выбирается блоком принятия решений на основе модели среды и модели объекта управления и выполняется блоком реализации решений.



- Воздействие вызывает переход объекта в новое состояние и, как следствие, некоторые возмущения в среде. Новое состояние пары "объект управления - среда" может быть ближе к цели или, наоборот, удалять нас от нее.
- Мы можем оценить это, наблюдая объект и среду и сравнивая сложившуюся реальную ситуацию с целью.
- Результат такого наблюдения и сравнения инициирует либо новые решения в случае, когда цель не достигается, либо пассивное наблюдение в случае, когда цель достигнута.

Основные идеи нечеткого управления

- Как видно из приведенного краткого обзора основных понятий теории управления, применение классических методов возможно при наличии модели среды и модели объекта управления.
- Что делать, если таких моделей нет? Или модели есть, но для их "обсчета" требуются значительные ресурсы?
- Для "модельных" задач последнее может быть не существенным, однако для практических задач большие ресурсы могут быть критичными (например, для систем управления в реальном времени управляющее воздействие должно вырабатываться не более, чем за некоторое время Δt, иначе решение, пусть самое лучшее, уже никому не нужно; для бортовых систем управления критичным могут быть габариты и вес компьютера: если для работы с моделью требуется супер-ЭВМ, то ее не возьмешь в самолет или автомобиль).

Основные идеи нечеткого управления

- При фиксированной цели управления (например, сохранение значения управляемого параметра g в некоторой области допустимых значений G) модель процесса управления может быть выражена в виде множества "Если …, то …" - правил следующим образом.
- Пусть состояние управляемого объекта G описывается набором значений качественных признаков $I(\Theta)$.
- Множество значений признаков D фиксировано и является конечным ($D = \{d_1, \ldots , d_m\}$).
- Процесс описывается последовательностью состояний объекта в моменты времени $t_1, t_2, \ldots$ $\{I(\Theta)_{t_i}\}_{i=1,2,\ldots}$.
- Для достижения цели управления ("удержания" значения управляемого параметра g в области G в нашем случае) у нас есть возможность изменять значения некоторых управляемых параметров из множества $A = \{a_1, \ldots ,a_n\}$.

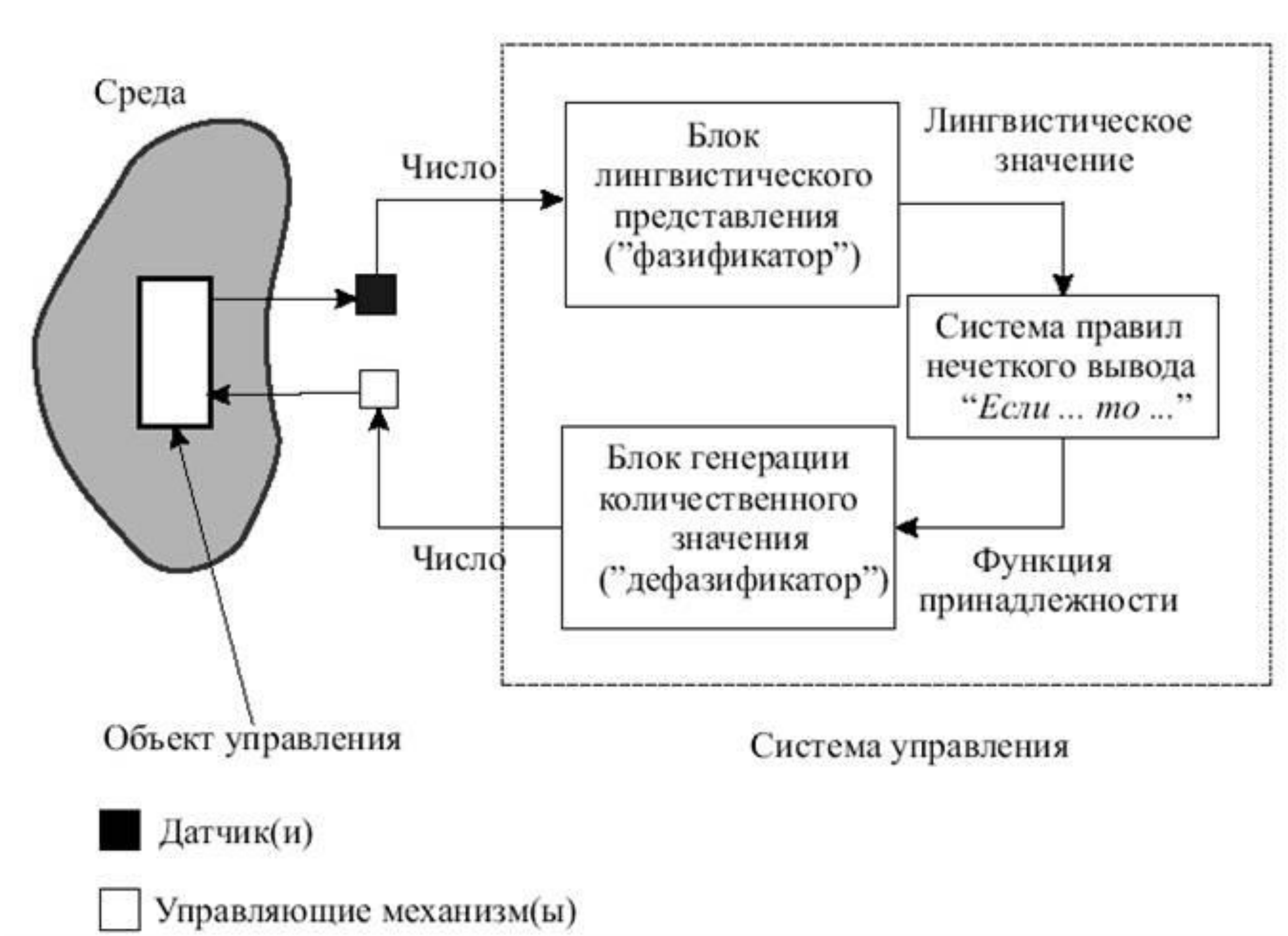
Основные идеи нечеткого управления. Пример реализации.

- Для описания идеи использования нечетких лингвистических регуляторов рассмотрим простейшую ситуацию $m = 1$, $n = 1$, то есть ситуацию, когда $D = \{d\}$, $A = \{a\}$.
- Как отмечалось выше, эксперт часто может сформулировать свой опыт управления только для качественных значений d и a. Пусть $d = \{d^1, \ldots, d^s\}$ и $a = \{a^1, \ldots, d^r\}$ - набор качественных значений d и a соответственно. Моделью d и a может служить лингвистическая переменная с фиксированным множеством значений или, что то же самое - семантическое пространство. В этом случае d и a - названия соответствующих лингвистических переменных, d^i и d^j $(i = 1, \ldots, s; j = 1, \ldots, r)$ - ее значения.
- Пусть соответствующие нечеткие множества $\mu_{d^i}(u)$ и $\mu_{a^j}(v)$ определены в универсальных множествах U и V соответственно $(i = 1, \ldots, s; j = 1, \ldots, r)$. Тогда правила, которые использует эксперт, можно сформулировать следующим образом: *"Если $d = d^i$ то $a = d^j$"*. Например, "Если давление пара очень высокое, то открыть клапан сильно".

Принцип действия регулятора

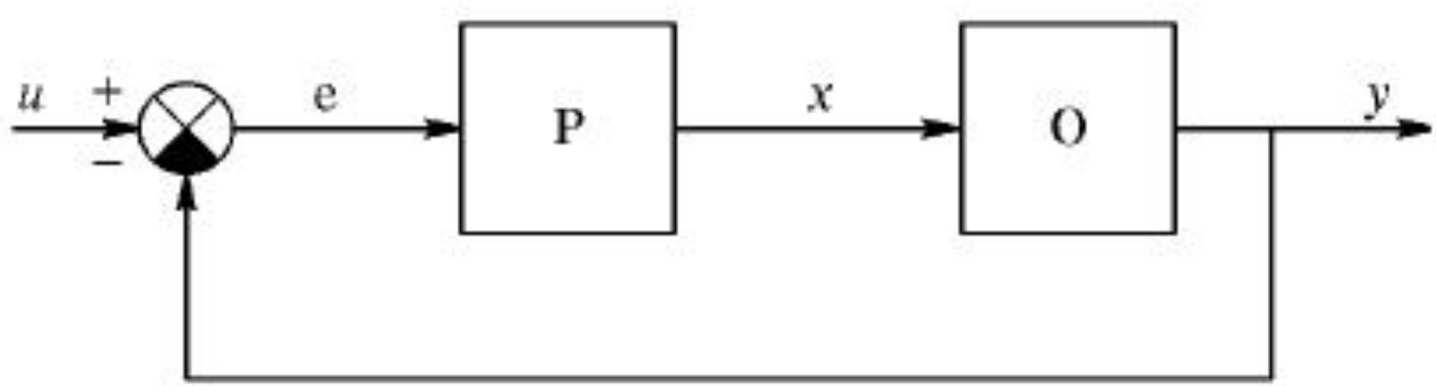
- Таким образом, моделью объекта управления и среды является их лингвистическое описание; блок принятия решений работает как последовательность "Если ..., то ..." правил.
- Возникает ситуация, когда элементы одной схемы описываются на разных "языках": в среде значения признаков – некоторые числа, отражающие значения физических измеряемых величин, а в модели управления значения признаков - качественные понятия. Система управления должна взять с объекта управления некоторые числа и выдать на объект опять же некоторые конкретные числа.
- Для этого система управления имеет два интерфейса: представления физического значения признака в лингвистическом виде ("фазификатор") и представления получившегося в результате нечетких рассуждений лингвистического значения управляемого параметра в количественном виде ("дефазификатор").

Структурная схема нечеткого лингвистического регулятора



Пример: нечеткий регулятор

- Приведем еще один пример использования аппарата нечеткой логики, на этот раз – в задаче управления.
- Рассмотрим замкнутую систему регулирования, представленную на рис. где через О обозначен объект управления, через Р – регулятор, а через *u, y, e, x* – соответственно входной сигнал системы, ее выходной сигнал, сигнал ошибки (рассогласования), поступающий на вход регулятора, и выходной сигнал регулятора.



Описание системы

- В рассматриваемой системе регулятор вырабатывает управляющий сигнал *x* в соответствии с выбранным алгоритмом регулирования. Покажем, что в данном случае для выработки такого сигнала применимы рассмотренные выше методы аппарата нечеткой логики.
- Предположим, что функции регулятора выполняет микроконтроллер, при этом аналоговый сигнал *e* ограничен диапазоном *[-1, 1]* и преобразуется в цифровую форму аналого-цифровым преобразователем (АЦП) с дискретностью 0,25, а выходной сигнал регулятора *x* формируется с помощью цифроаналогового преобразователя (ЦАП) и имеет всего 5 уровней:

Лингвистическое описание

Принимая во внимание данные уровни, введем лингвистические переменные:

A_1: большой положительный,
A_2: малый положительный,
A_3: нулевой,
A_4: малый отрицательный,
A_5: большой отрицательный,

и на дискретном множестве возможных значений сигнала рассогласования e определим функции принадлежности так, как это приведено в табл. 1.

Таблица 1. Значения функций принадлежности

	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	0,75	1
$A_1(e)$	0	0	0	0	0	0	0,3	0,7	1
$A_2(e)$	0	0	0	0	0,3	0,7	1	0,7	0,3
$A_3(e)$	0	0	0,3	0,7	1	0,7	0,3	0	0
$A_4(e)$	0,3	0,7	1	0,7	0,3	0	0	0	0
$A_5(e)$	1	0,7	0,3	0	0	0	0	0	0

База знаний

Предположим, далее, что функционирование регулятора определяется следующими правилами (надо сказать, типичными для задачи управления):

П$_1$: если $e=A_3$ и $\Delta e=A_3$, то $x=0;$

П$_2$: если $e=A_2$ и $\Delta e=A_2$, то $x=-05;$,

П$_3$: если $e=A_4$ и $\Delta e=A_4$, то $x=1;$

П$_4$: если $e=A_1$ и $\Delta e=A_1$, то $x=-1;$

где Δe – первая разность сигнала ошибки в текущий дискретный момент времени.

Заметим, что набор правил может быть, вообще говоря, и каким-то другим.

Логический вывод

Если, например, используется упрощенный алгоритм нечеткого вывода, то при значениях, скажем, $e = 0,25$ и $\Delta e = 0,5$ имеем:

$$\alpha_1 = \min\left(0,7;0,3\right) = 0,3 \qquad \text{и} \qquad x_1=0;$$

$$\alpha_2 = \min\left(0,7;1\right) = 0,7 \qquad \text{и} \qquad x_2=-0,5;$$

$$\alpha_3 = \min\left(0;0\right) = 0 \qquad \text{и} \qquad x_3=1;$$

$$\alpha_4 = \min\left(0;0,3\right) = 0 \qquad \text{и} \qquad x_4=-1;$$

и выход регулятора:

$$x = \frac{0,3\cdot 0 + 0,7\cdot(-0,5) + 0\cdot 1 + 0,3\cdot(-1)}{0,3+0,7+0+0,3} = \frac{-0.65}{1,3} = -0.488 \approx -0,5 \ .$$

Аналогичным образом значения выходного сигнала регулятора рассчитываются при других значениях e и Δe.

Отметим, что при проектировании подобных («нечетких») регуляторов основным (и не формализуемым) этапом является задание набора нечетких правил. Другие аспекты: выбор формы функций принадлежности, алгоритма приведения к четкости и т.п. представляются задачами более простыми.

Ограничения на применение нечеткой логики

- Применение традиционной нечеткой логики в современных системах крайне ограниченно следующими факторами:
  - *как правило, сложная система управления имеет большее количество входов, чем самое заурядное нечеткое приложение;*
  - *добавление входных переменных увеличивает сложность вычислений экспоненциально;*
  - *как следствие предыдущего пункта, увеличивается база правил, что приводит к трудному ее восприятию;*
  - *операции в реальном масштабе требуют специального «железа».*