
Точки перегиба функции,
выпуклость графика функции.
Исследование функции на
выпуклость.

Цели обучения :

- 10.4.1.31 знать определение точки перегиба графика функции и необходимое и достаточное условие выпуклости вверх (вниз) графика функции на интервале;
- 10.4.1.32 уметь находить интервалы выпуклости вверх (вниз) графика функции;

Критерии успеха:

- *Учащийся достиг цели обучения, если:*
- - обосновывает необходимые и достаточные условия выпуклости вверх графика функции на интервале;
- - обосновывает необходимые и достаточные условия выпуклости вниз графика функции на интервале;
- - использует необходимые и достаточные условия выпуклости (вогнутости) функции;
- - определяет выпуклость (вогнутость) функции на интервале и обосновывает ответ;
- - знает определение точки перегиба;
- - с помощью графика функции показывает точку перегиба, которая переходит с выпуклой в вогнутую или наоборот;
- - использует способ нахождения точки перегиба с помощью второй производной



Дана функция $y = f(x)$

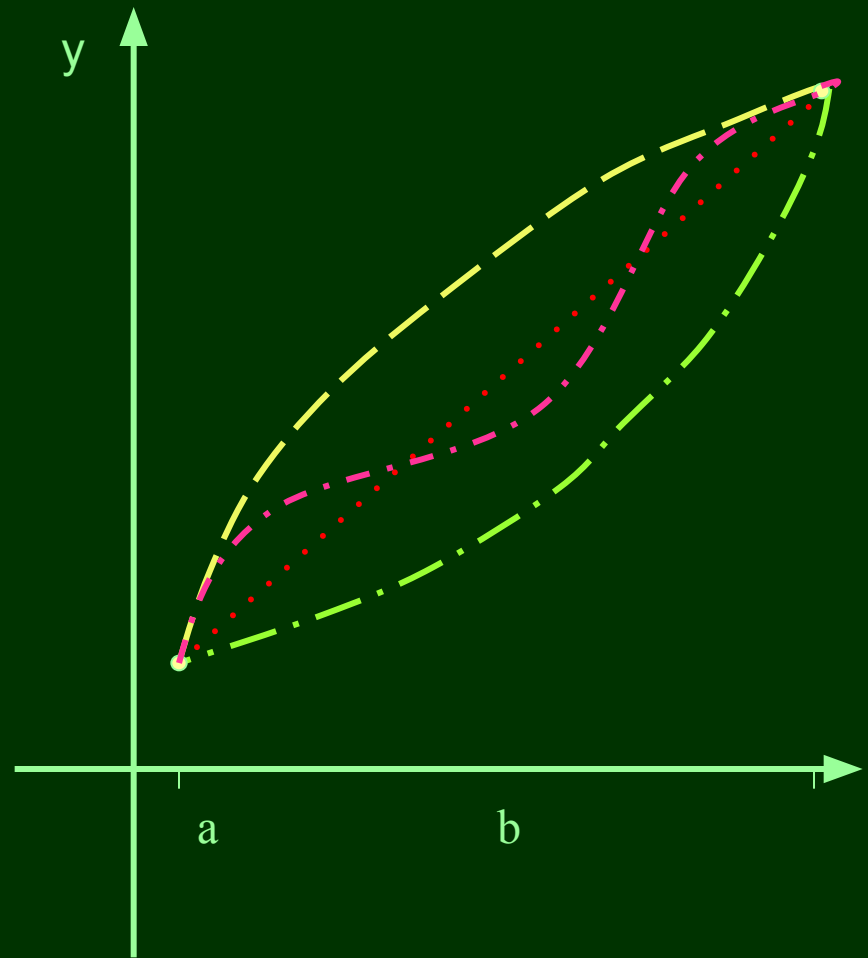
Чем отличается
поведение линий?

Одна из них – отрезок
прямой

Другая проходит над
отрезком

Третья – под отрезком

А четвертая – частично
над отрезком, частично
под ним



В математике для обозначения такого поведения существуют специальные понятия:

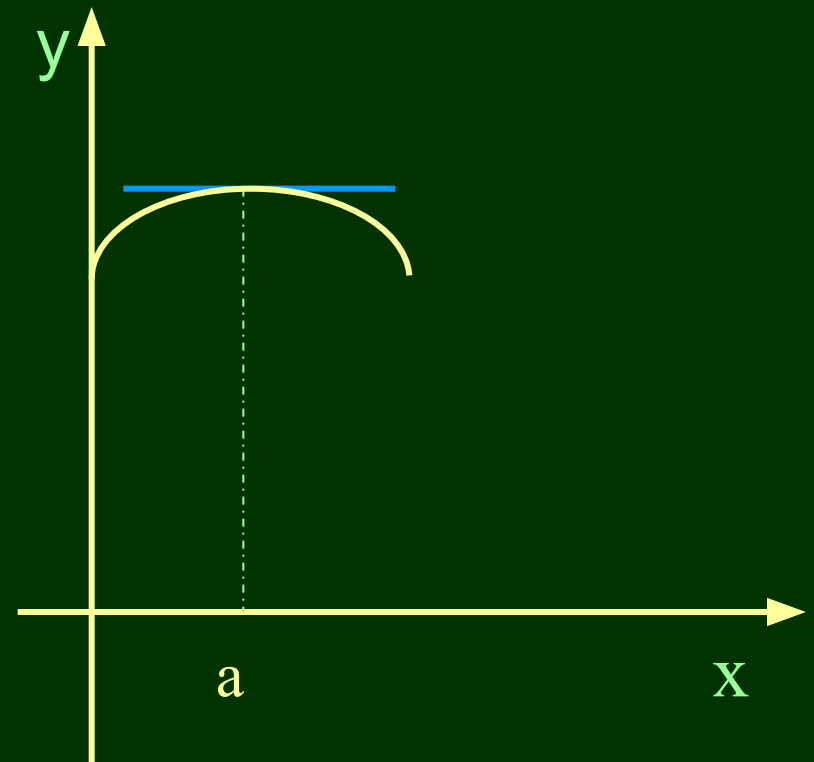
выпуклости и
вогнутости
графика функции

Геометрический смысл
второй производной

Выпуклая вверх

(выпуклая кривая)

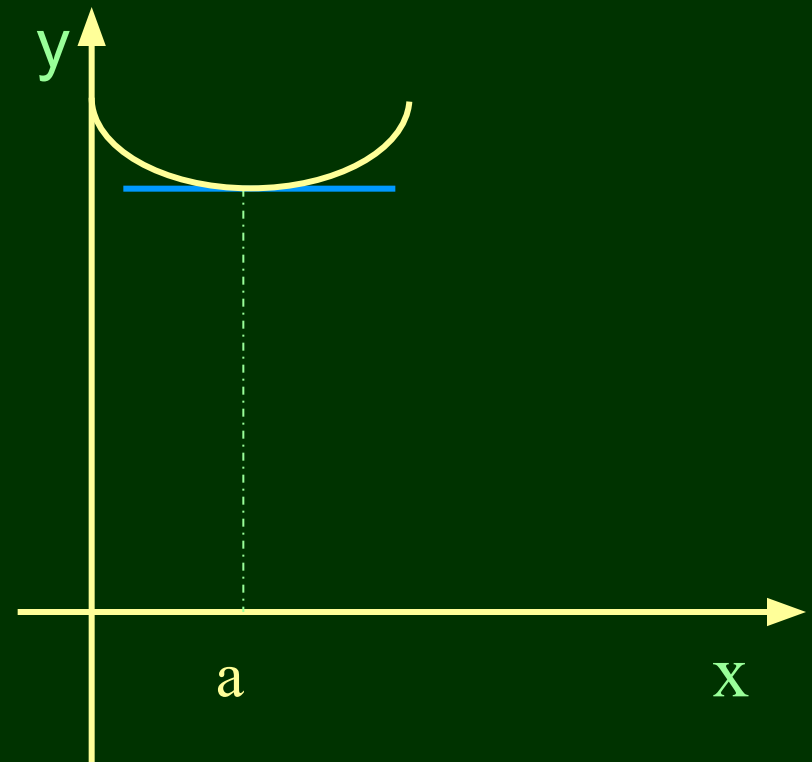
Кривая называется
выпуклой вверх
в точке $x = a$,
если в некоторой
окрестности этой
точки она
расположена
под
своей касательной



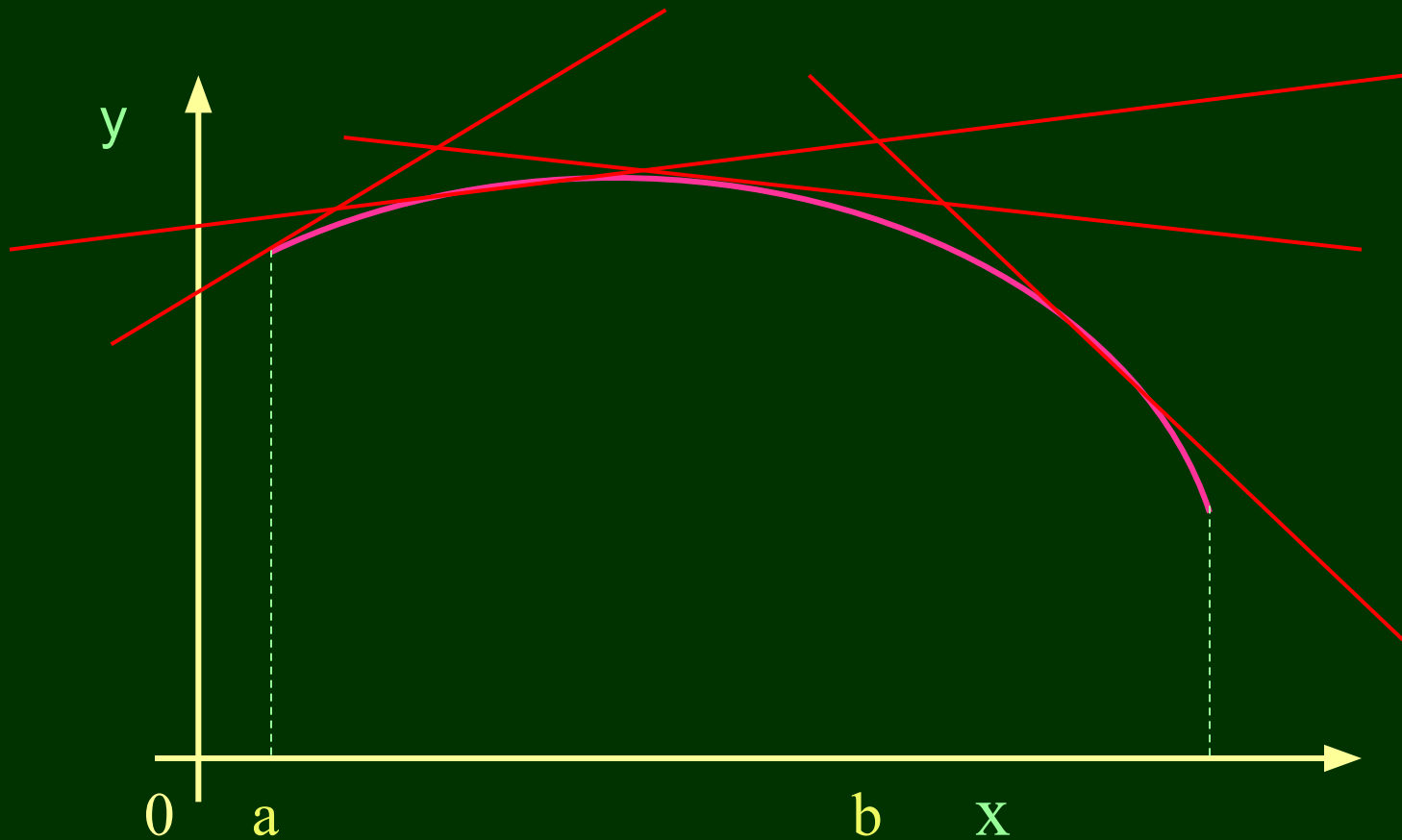
Выпуклая вниз

(вогнутая кривая)

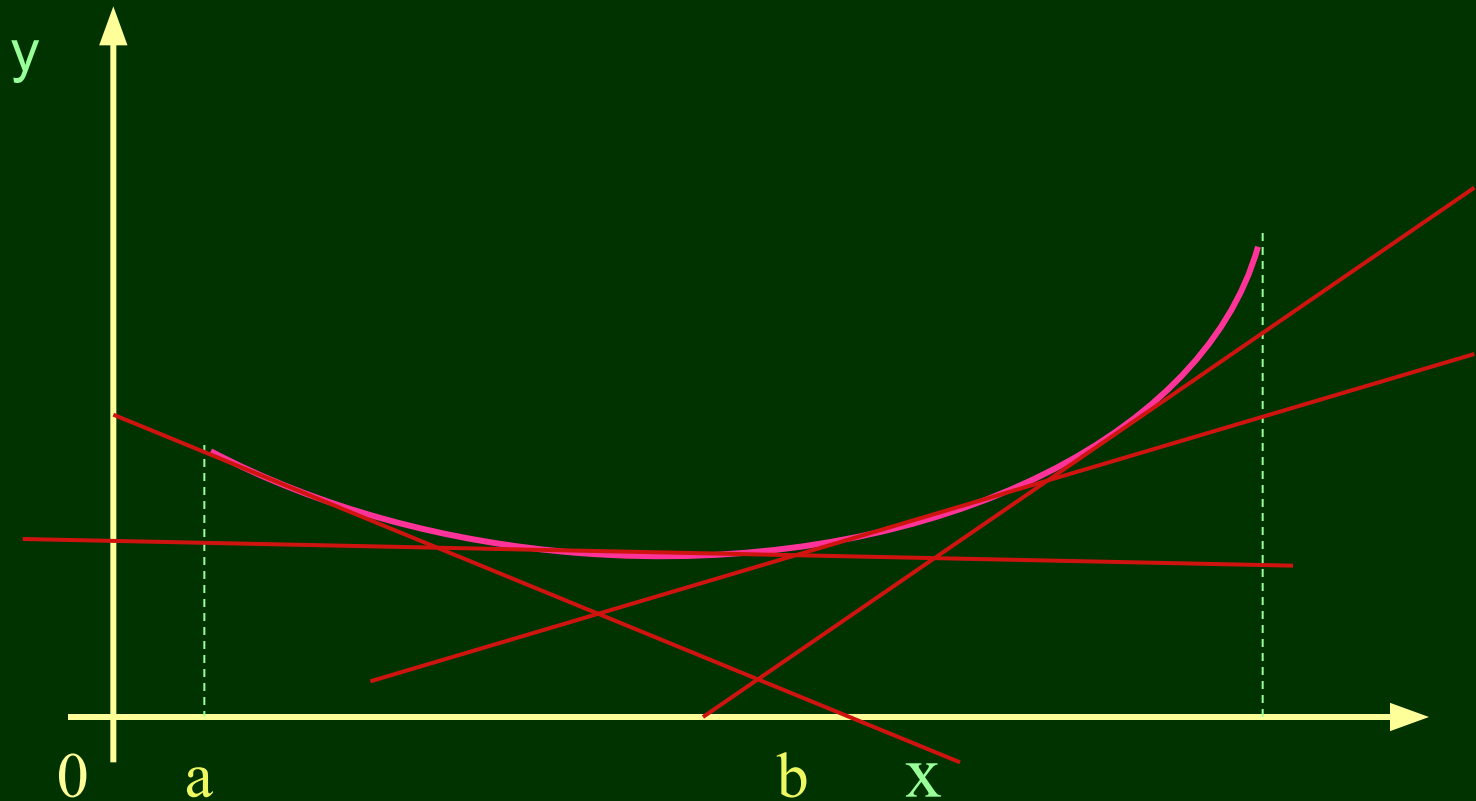
Кривая называется
выпуклой вниз
в точке $x = a$,
если в некоторой
окрестности этой
точки она
расположена
над
своей касательной



*Кривая выпуклая вверх на интервале
(выпуклая)*



*Кривая выпуклая вниз на интервале
(вогнутая)*



Как найти интервалы выпуклости и
вогнутости?

График функции $y = f(x)$ – вогнутая кривая

В точках $M_1, M_2, M_3 \dots$ проведены касательные

Величины углов
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$
растут,

увеличиваются
и тангенсы ЭТИХ
углов

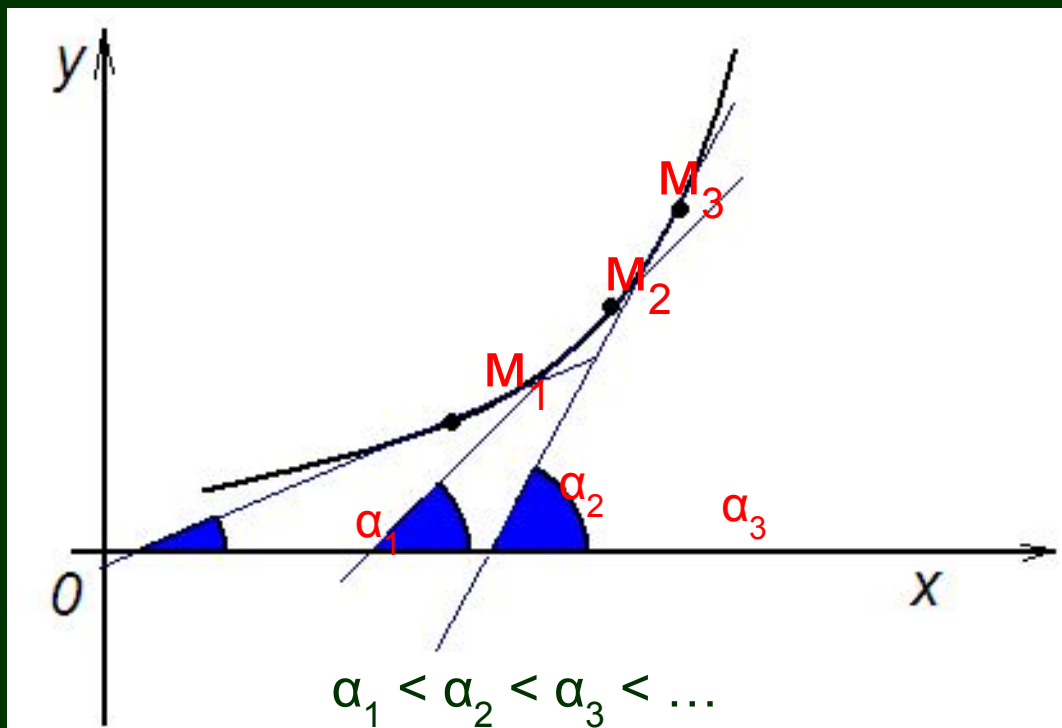


График функции $y = f(x)$ – вогнутая кривая

В точках $M_1, M_2, M_3 \dots$ проведены касательные
тангенсы углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ *увеличиваются*

$\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$, следовательно, возрастает функция

Если функция возрастает, то ее
производная положительна

Производная функции $f'(x)$ – это
производная производной
 $(f'(x))' = f''(x)$ и $f''(x) > 0$

Вывод:

*Если график функции – вогнутая
кривая, то вторая производная этой
функции – положительна.*

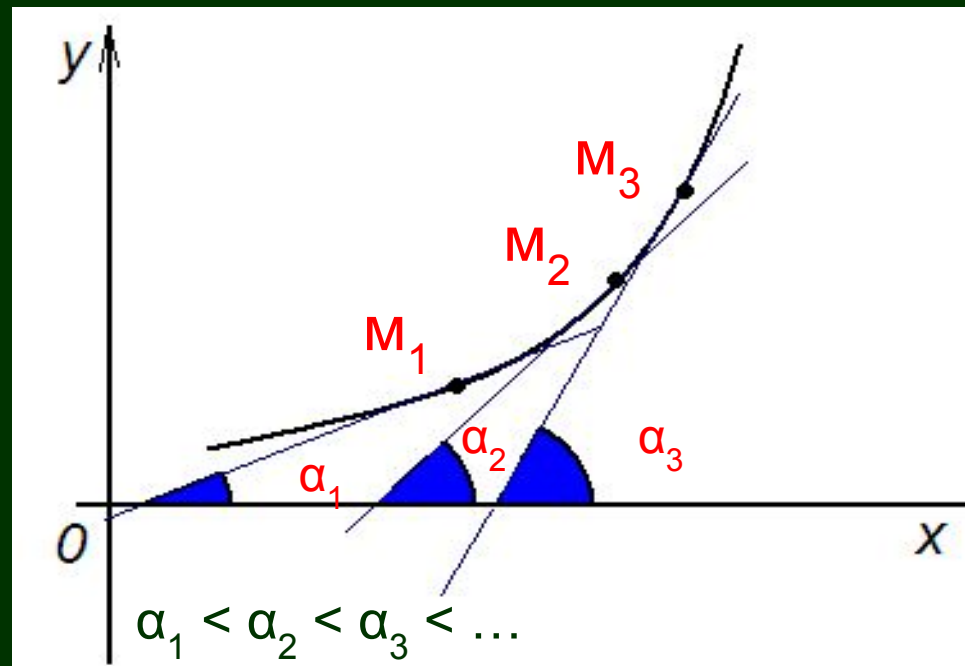


График функции $y = f(x)$ – выпуклая кривая

В точках M_1, M_2, \dots проведены касательные
тангенсы углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ убывают

$\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$, следовательно,
убывает функция $f'(x)$

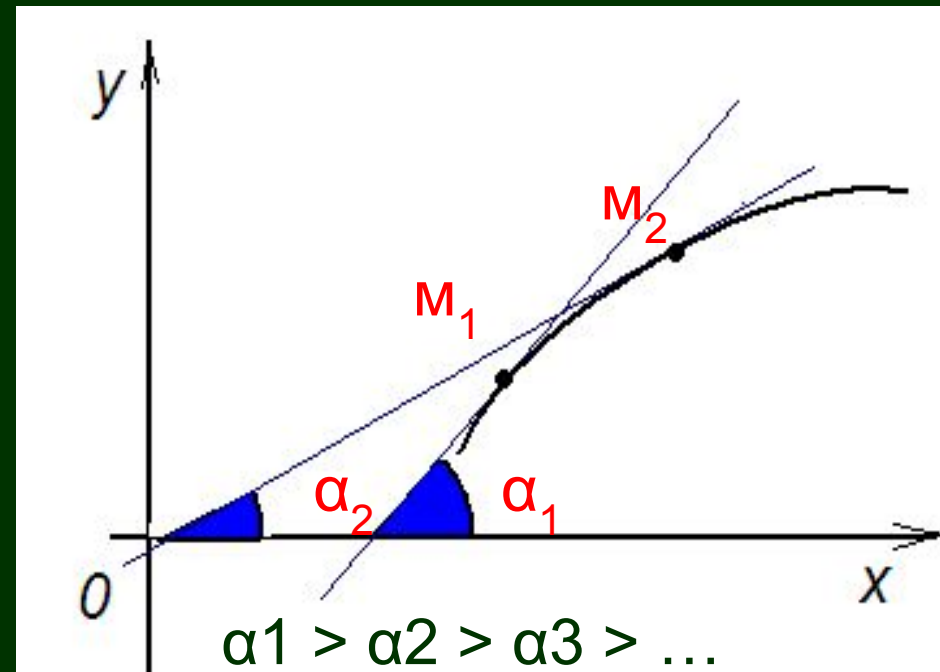
производная функции $y = f'(x)$

$(f'(x))' = f''(x)$ – отрицательна, т.е.

$$f''(x) < 0$$

Вывод:

Если график функции – выпуклая кривая, то вторая производная этой функции – отрицательна.



Если вторая производная функции

$$y = f(x)$$

*на данном интервале положительна, то кривая
выпукла вниз*

*а если отрицательна – выпукла вверх в этом
промежутке*

*Точки функции, в которых выпуклость вверх
меняется на выпуклость вниз или наоборот,
называются **точками перегиба***

Правило нахождения интервалов выпуклости и вогнутости графика функции:

Найти:

1. Вторую производную
2. Точки, в которых она равна нулю или не существует
3. Интервалы, на которые область определения разбивается этими точками
4. Знаки второй производной в каждом интервале
Если $f''(x) < 0$, то кривая выпукла вверх,
если $f''(x) > 0$ – выпукла вниз.

График функции

$$y = f(x) -$$

выпукла вниз

«+»

кривая



График функции

$$y = f(x) -$$

Выпукла вверх

кривая

«-»



Видео

Первичное закрепление материала

Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба

Задача 1

$$y = x^3 - 12x + 4$$

Задача 2

$$y = \frac{1}{4} x^4 - \frac{3x^2}{2}$$

Задача 1

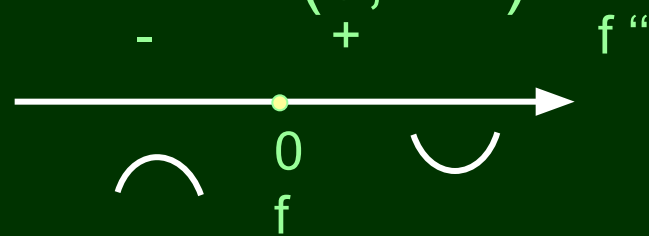
- $y = x^3 - 12x + 4$
- x – любое число
- $f'(x) = 3x^2 - 12$
- $f''(x) = 6x$
- $6x = 0$
- $x = 0$

- Интервалы выпуклости вверх:

$$(-\infty, 0)$$

- Интервалы выпуклости вниз:

$$(0, +\infty)$$

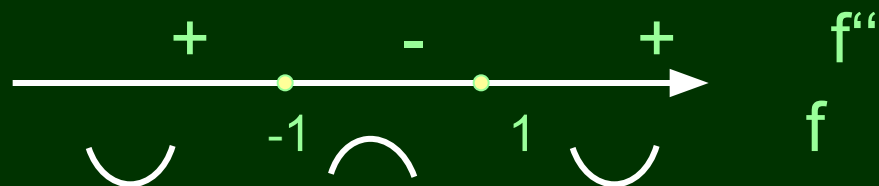


$x = 0$ – точка перегиба

Задача 2

- $y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2/2$
- x – любое число
- $f'(x) = x^3 - 3x$
- $f''(x) = 3x^2 - 3$
- $3(x - 1)(x + 1) = 0$
- $x = 1, x = -1$

- Интервалы выпуклости:
 $(-1, 1)$
- Интервалы вогнутости:
 $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$



$x = 1$ и $x = -1$ – точки перегиба