Филиал ГБПОУ РХ ЧГСТ

Решение задач по теме «Исследование функции с помощью производной»

Разработала:
преподаватель математики
Горяйнова н.Н.

Применение производной к исследованию функции

1. Промежутки монотонности

2. Точки экстремума и значение функции в этих точках

3. Наибольшее и наименьшее значение функции

4. Построение графика функции

Справочный материал
Таблица производных

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

$$x' = 1;$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$(x^4)' = 4x^3$$

$$(x^5)' = 5x^4$$

$$C' = 0;$$

$$x' = 1;$$

$$(kx + m)' = k;$$

$$(x^2)' = 2x;$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Монотонность функции

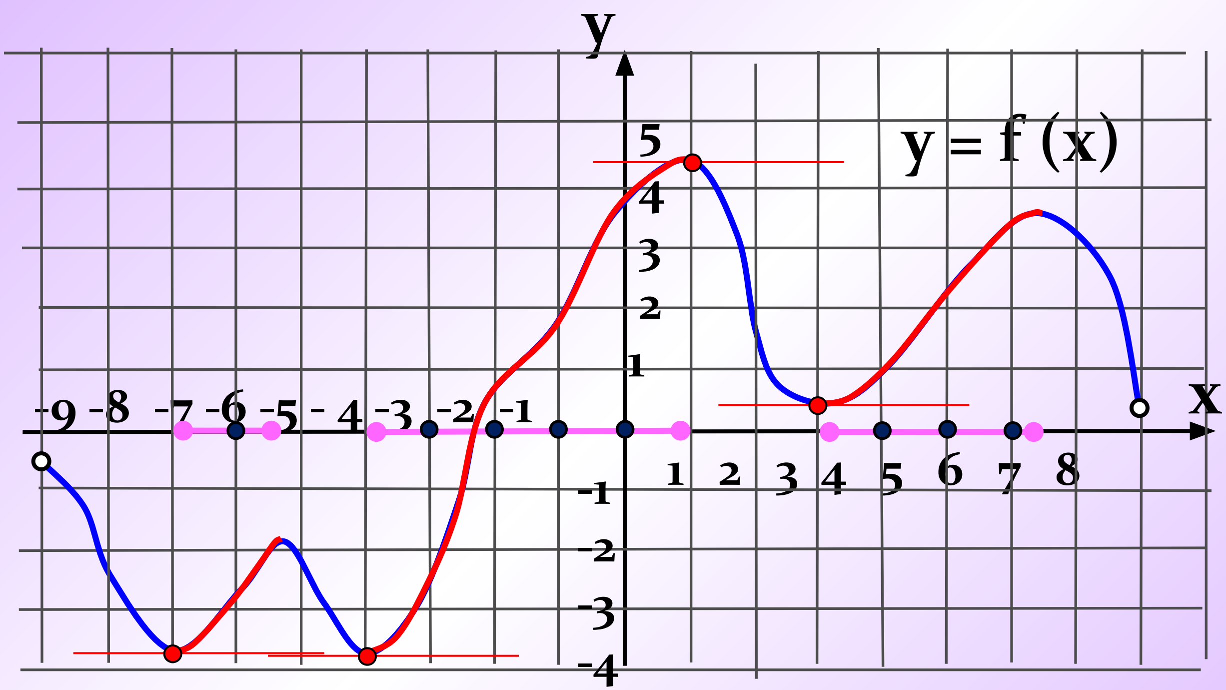
- Если производная функции y=f(x) ***положительна*** на некотором интервале, то функция в этом интервале ***монотонно возрастает***

- Если производная функции y=f(x) ***отрицательна*** на некотором интервале, то функция в этом интервале ***монотонно убывает***.

На рисунке изображен график функции y = f(x), определенной на интервале (-9; 8). Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

Решение: 1. $f'(x) > 0$, значит, функция возрастает. Найдем эти участки графика.

2. Найдем все целые точки на этих отрезках.

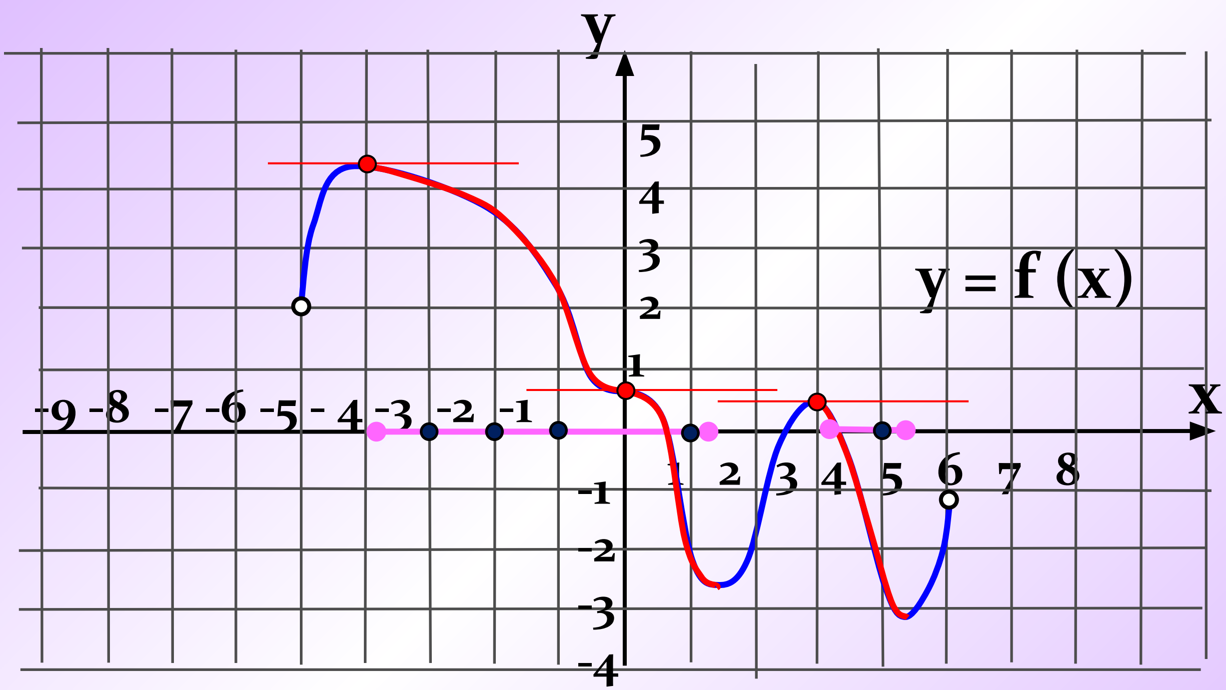


Ответ: 8

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-5; 5). Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

Решение: 1. $f'(x) < 0$, значит, функция убывает. Найдем эти участки графика.

2. Найдем все целые точки на этих отрезках.



Ответ: 5

Экстремумы функции

<u>Определение 1.</u> Точку $x = x_0$ называют точкой минимума функции $f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$

<u>Определение 2.</u> Точку $x = x_0$ называют точкой максимума функции $f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$

Точки <u>максимума и минимума</u> объединяют общим термином – <u>точки экстремума</u>

Точки экстремума

Если функция y=f(x) имеет экстремум в точке x=x0,
то в этой точке **производная** функции
или **равна нулю**, или **не существует**

Стационарные точки

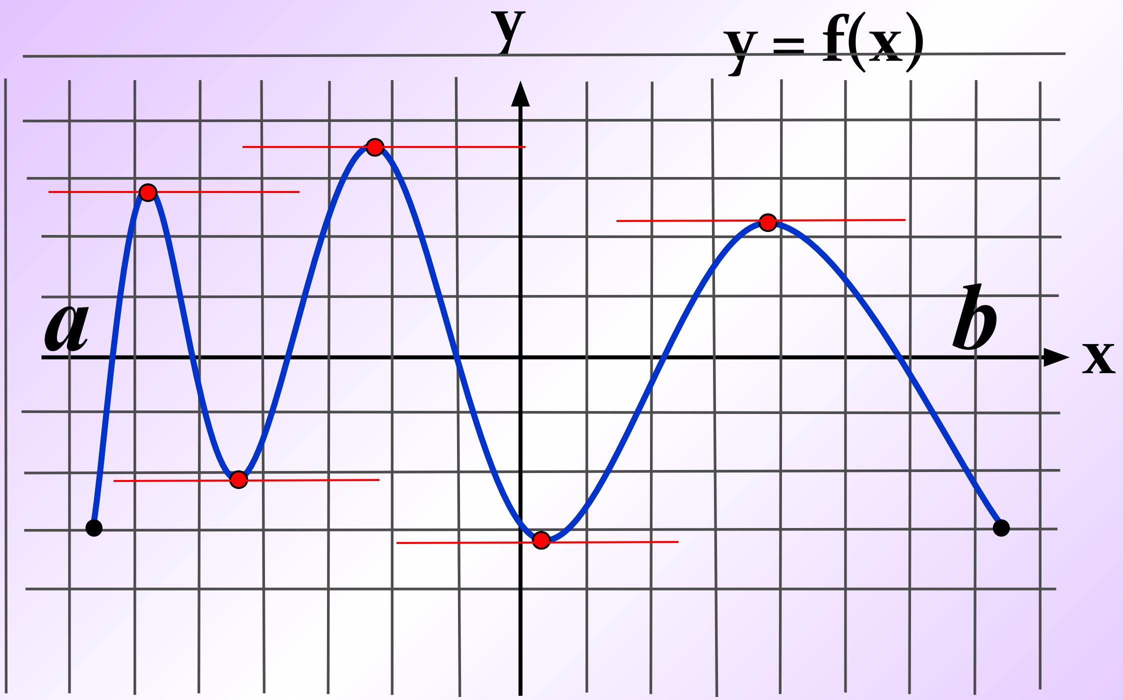
Критические точки

**Касательная
в таких точках
графика параллельна оси OX**

**Касательная в
таких точках графика
не существует**

Непрерывная функция y = f(x) задана на отрезке [***a;b***]

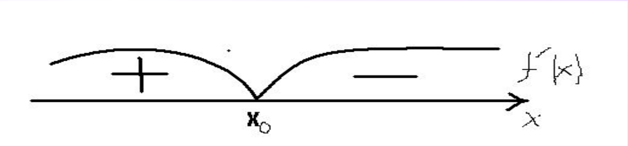
На рисунке изображен ее график. В ответе укажите количество точек графика этой функции, в которых касательная параллельна оси Ох.



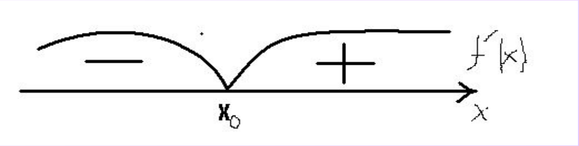
Ответ: 5

Достаточное условие существования экстремума функции:

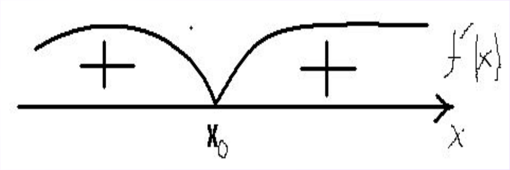
- Если при переходе через критическую точку x_0 функции f(x) ее производная меняет знак с «+» на «-», то x_0 – точка максимума функции f(x).

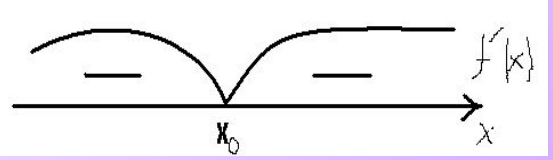


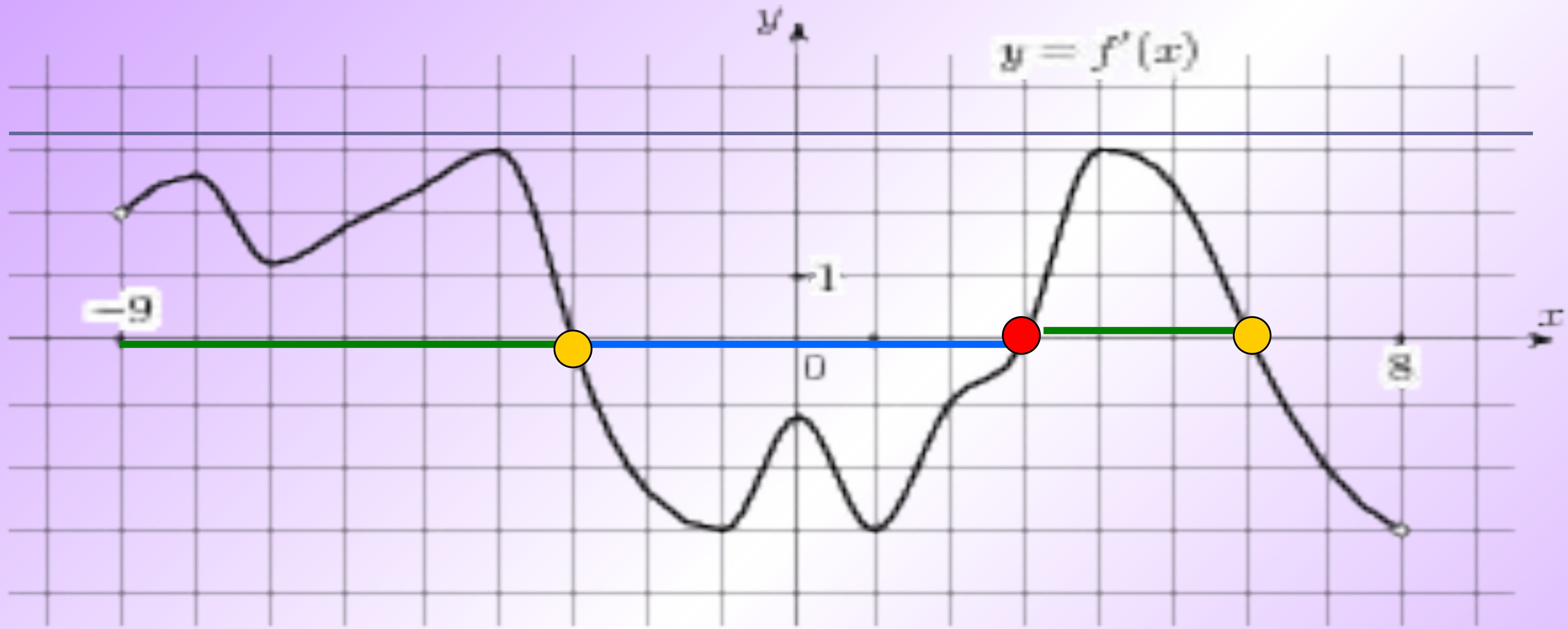
- Если при переходе через критическую точку x_0 функции f(x) ее производная меняет знак с «-» на «+», то x_0 – точка минимума функции f(x).



- Если при переходе через критическую точку x_0 функции f(x) ее производная не меняет знака, то в точке x_0 экстремума нет.







Возрастает:

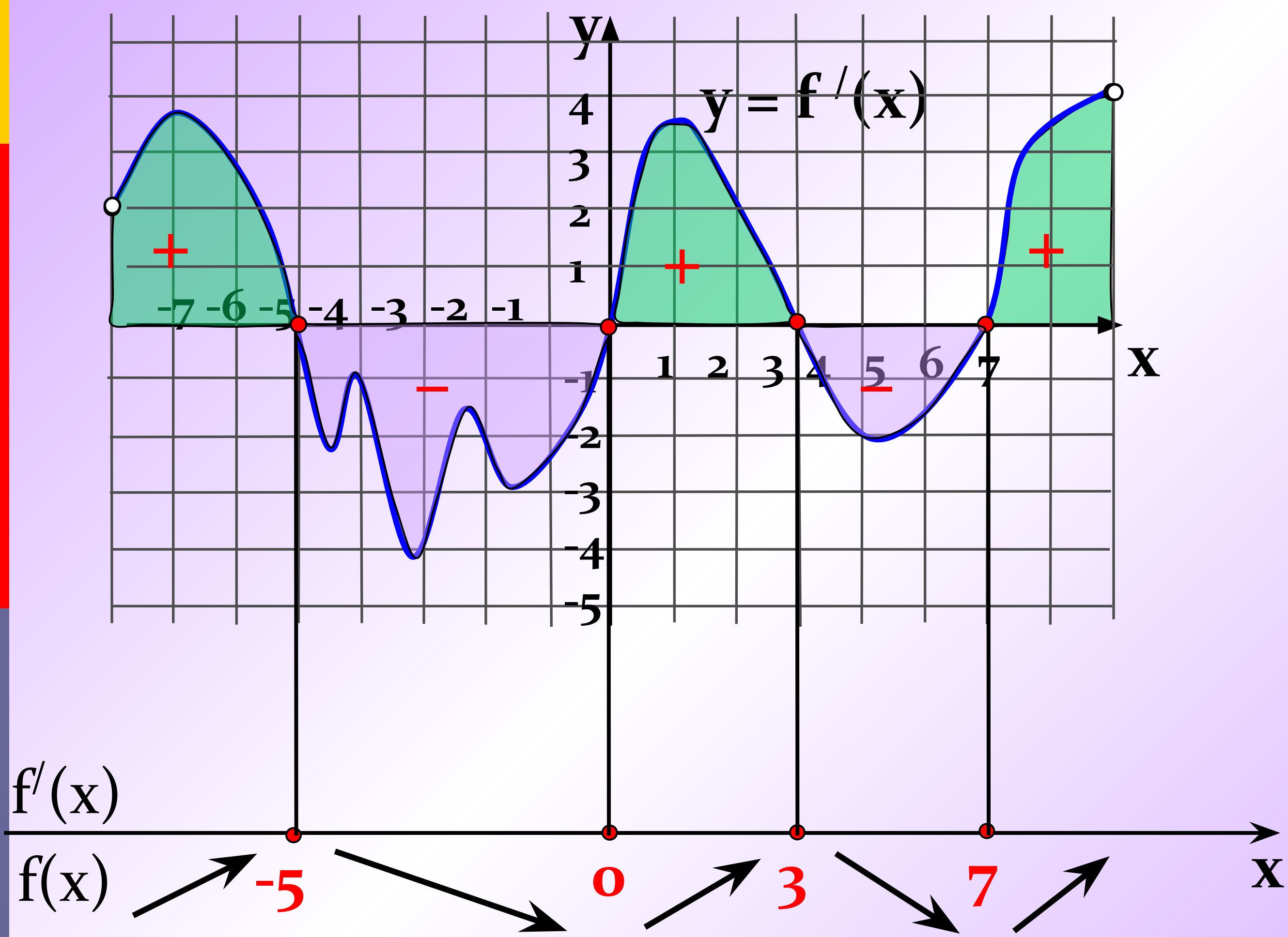
Убывает:

Максимум:

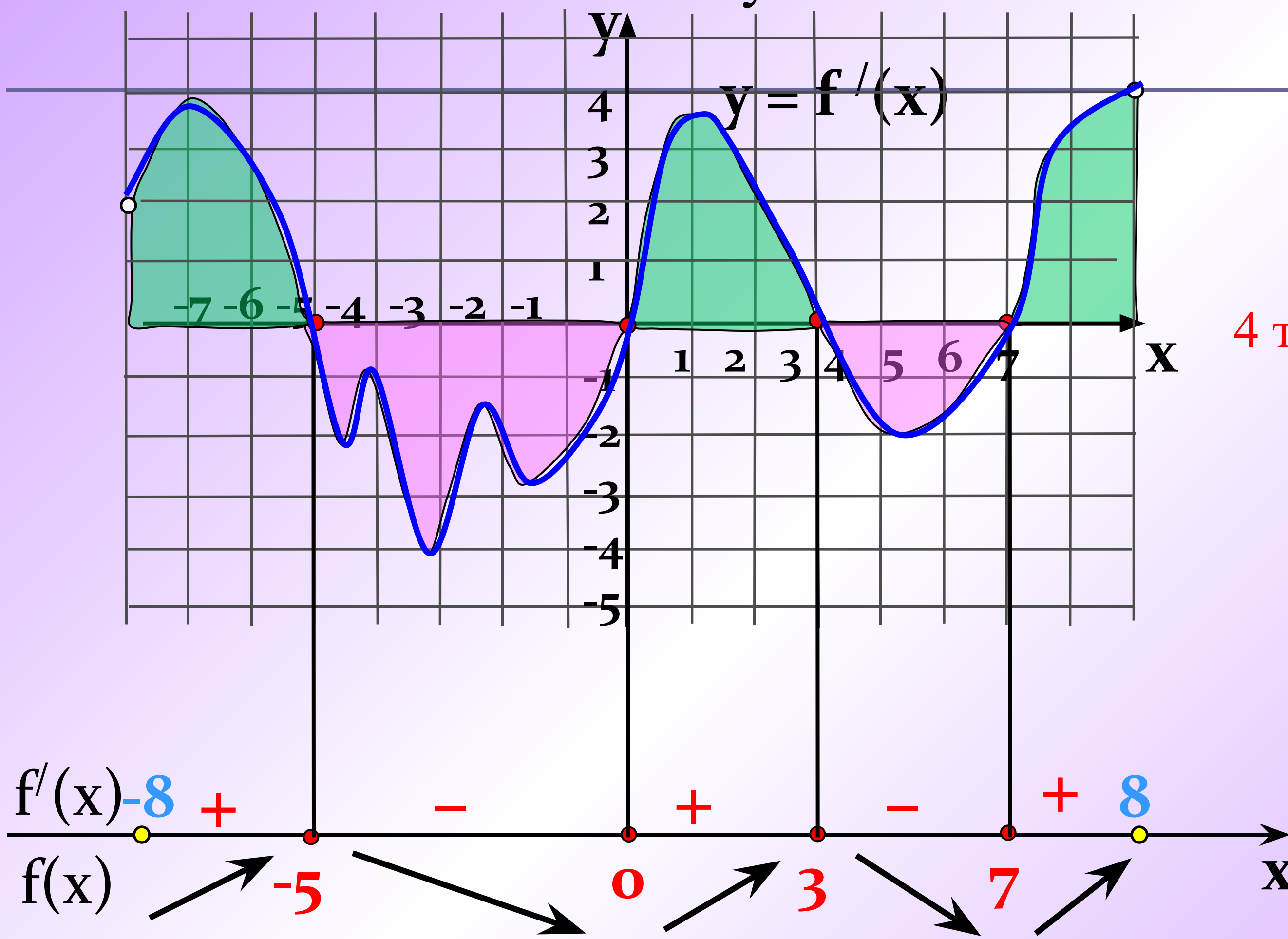
Минимум;

На рисунке изображен график производной функции у =f (x), заданной на промежутке (- 8; 8).

Найти точки, в которых f $^{/}$(x)=0 (это нули функции).



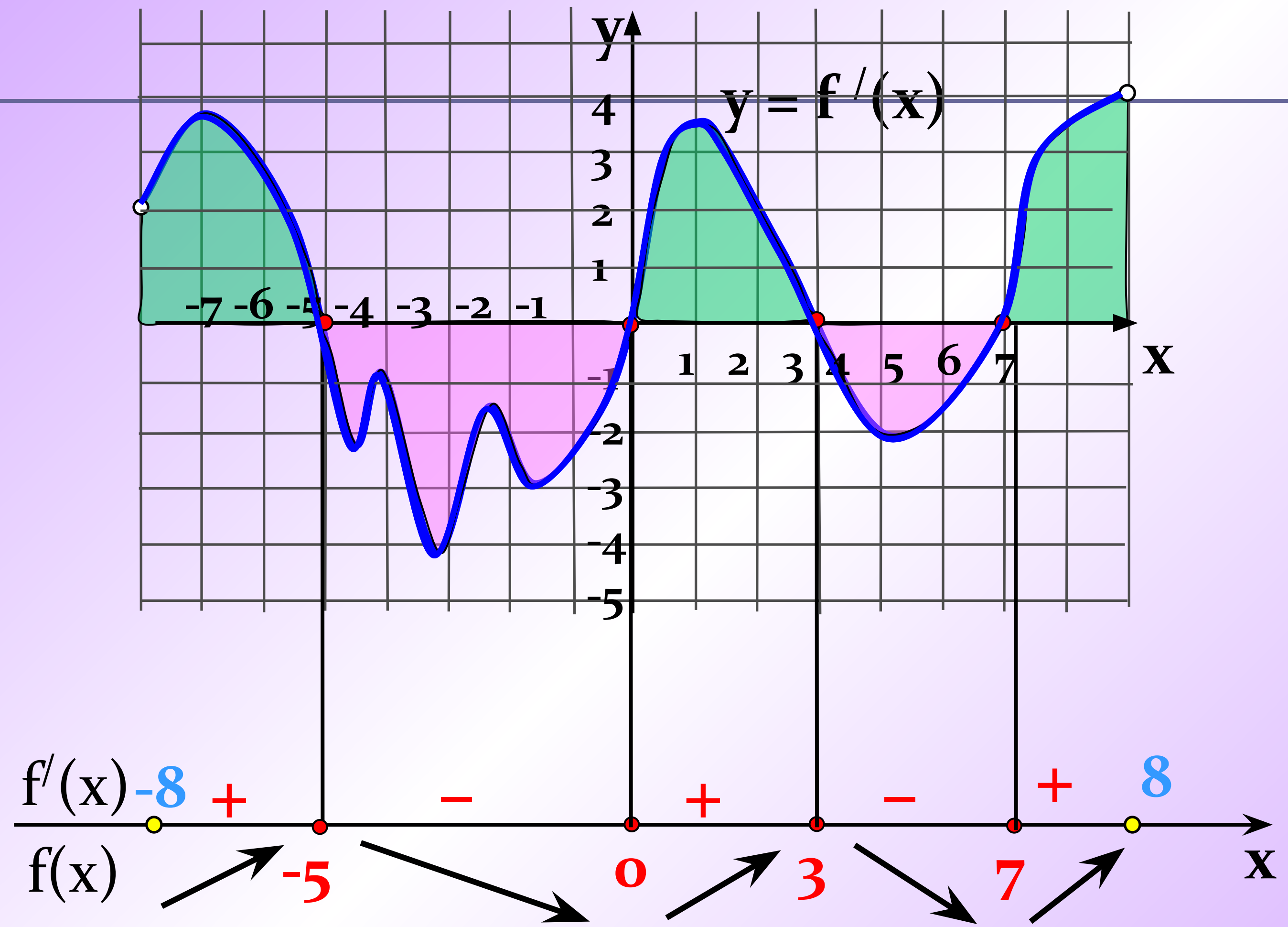
Исследуйте функцию y =f (x) на экстремум и укажите количество ее точек минимума.



4 точки экстремума

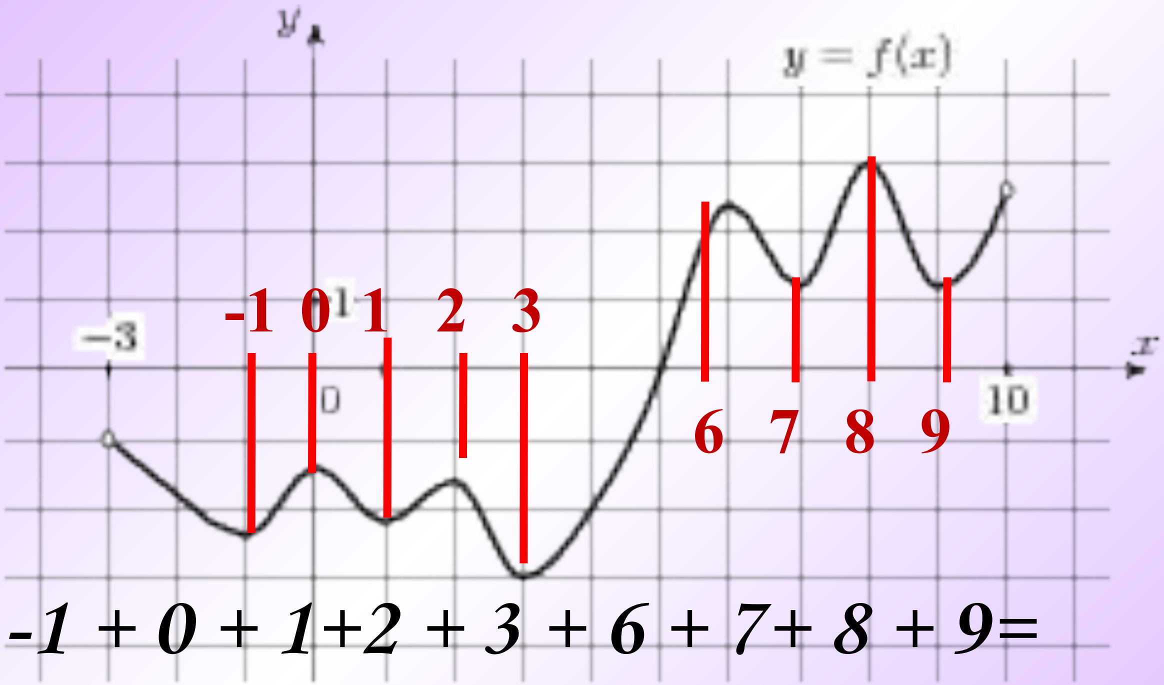
Ответ:2

Найдите количество точек экстремума функции y =f (x) на отрезке [– 3; 7]



Ответ: 3

На рисунке изображен график функции f(x), определенной на интервале (-3;10) . Найдите сумму точек экстремума функции f(x) .



-1 + 0 + 1+2 + 3 + 6 + 7+ 8 + 9= 35

Ответ: 35

Исследование функции на монотонность

- Найти D(f) и исследовать на непрерывность функцию f (x).
- Найти производную f ´.
- Найти стационарные и критические точки функции f (x).
- Отметить промежутки знакопостоянства f ´. и промежутки монотонности функции f (x).

Найти промежутки монотонности функции $y=2x^3-3x^2-36x+5$

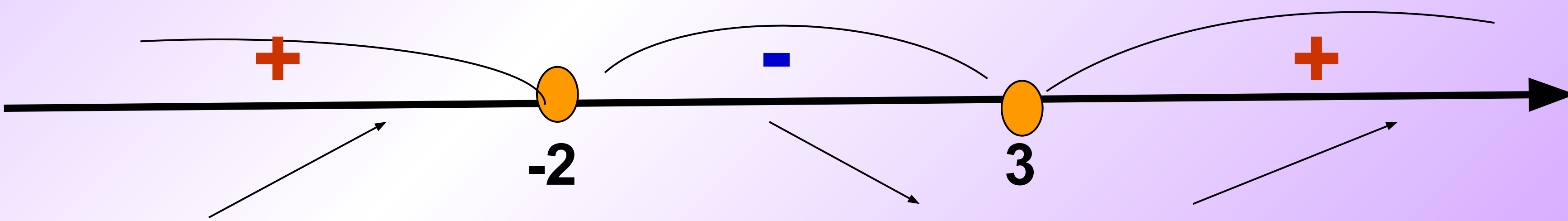
1. **Область определения**: R. Функция непрерывна.
2. **Вычисляем производную :** $y'=6x^2-6x-36$.
3. **Находим стационарные точки:** $y'=0$.

$$x^2-x-6=0$$

$$Д=1-4*(-6)*1=1+24=25$$

$$x_1=\frac{1-5}{2}=-2 \qquad x_2=\frac{1+5}{2}=3$$

4. **Делим область определения на интервалы:**



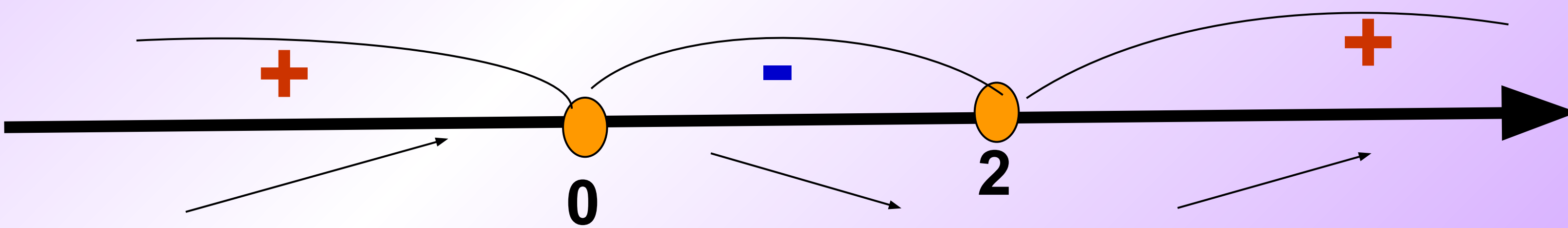
5.**Функция возрастает** при **x***ϵ* ***(-∞; -2)***$\cup$***(3; +∞)***,
функция ***убывает*** *при* **x***ϵ* ***(-2; 3)***.

Найти промежутки монотонности функции $y=x^3-3x^2$

1. **Область определения**: R. Функция непрерывна.
2. **Вычисляем производную :** $y'=3x^2-6x$.
3. **Находим критические точки:** $y'=0$.

$$x^2-2x=0$$
$$x(x-2)=0$$
$$x_1=0 \text{ и } x_2=2$$

4. **Делим область определения на интервалы:**



5. **Функция возрастает** при **$x\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$**,

функция **убывает** при **$x\in[0;2]$**.

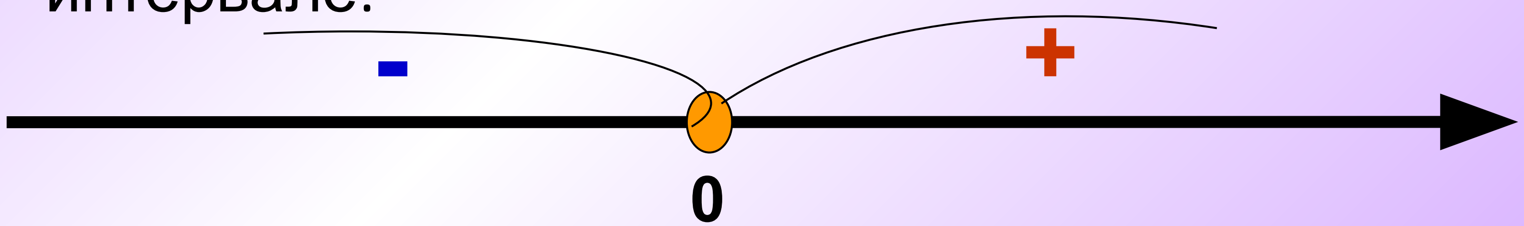
Алгоритм исследования функции f(x) на экстремум с помощью производной :

- Найти D(f) и исследовать на непрерывность функцию f (x).
- Найти производную f ´
- Найти стационарные и критические точки функции f(x) и на координатной прямой отметить промежутки знакопостоянства f ´.
- Посмотрев на рисунок знаков f ´, определить точки минимума и максимума функции и вычислить значения f(x) в этих точках.

Исследовать на экстремум функцию $y=x^2+2$.

Решение:

1. Находим область определения функции: D(y)=R.
2. Находим производную: $y'=(x^2+2)'=2x$.
3. Приравниваем её к нулю: $2x=0$, откуда $x=0$ – критическая точка.
4. Делим область определения на интервалы и определяем знаки производной на каждом интервале:



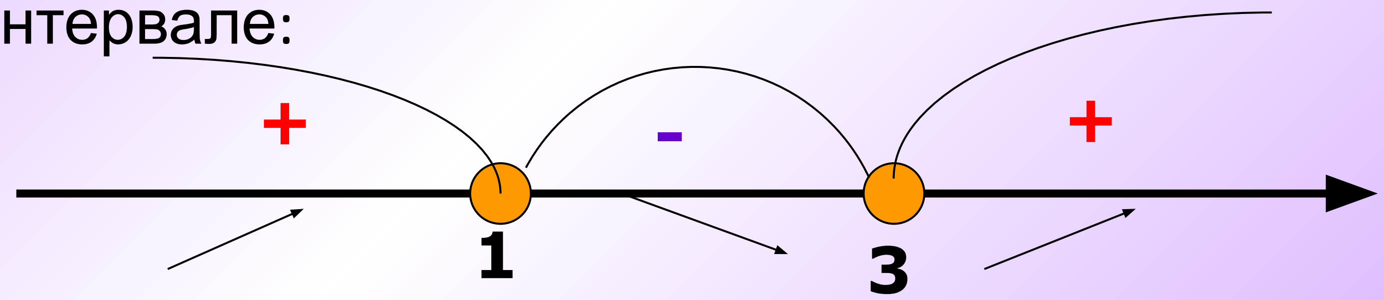
5. **x** =0 – точка минимума.

Найдём минимум функции $\mathbf{y}_{min}=2$.

Исследовать на экстремум функцию $y=1/3x^3-2x^2+3x+1$.

Решение:

1. Находим область определения функции: D(y)=R.
2. Находим производную: $y'=(1/3x^3-2x^2+3x+1)'=x^2-4x+3$.
3. Приравниваем её к нулю: $x^2-4x+3=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=3$ – критические точки.
4. Делим область определения на интервалы и определяем знаки производной на каждом интервале:



5. x=1 – точка максимума. Найдём максимум функции $y_{max}=7/3$.

x=3 – точка минимума. Найдём минимум функции: $y_{min}=1$.

Общая схема исследования функции

- Найти область определения функции f(x).
- Выяснить, обладает ли функция особенностями, облегчающими исследование, то есть является ли функция f(x):

а) четной или нечетной;

б) периодической.

- Вычислить координаты точек пересечения графика с осями координат.
- Найти промежутки знакопостоянства производной функции f(x) .
- Выяснить, на каких промежутках функция f (x) возрастает, а на каких убывает.
- Найти точки экстремума (максимум или минимум) и вычислить значения f (x) в этих точках.
- Исследовать поведение функции f (x) в окрестности характерных точек не входящих в область определения.
- Построить график функции.

Исследовать функцию $f(x)=x^4-2x^2-3$

- **Область определения**: **D (f)=R**

- **Четность – нечетность функции**:

$$f(-x)=x^4-2x^2-3,$$

значит f (-x) = f (x) для любого x, принадлежащего D (f) – функция является чётной.

- **Координаты точек пересечения графика с осями координат**

с ось Oy: $f(x)=0$: $(x^2-3)(x^2+1)=0$; $x=\pm\sqrt{3}$;

с осью Ox: $f(0)=-3$

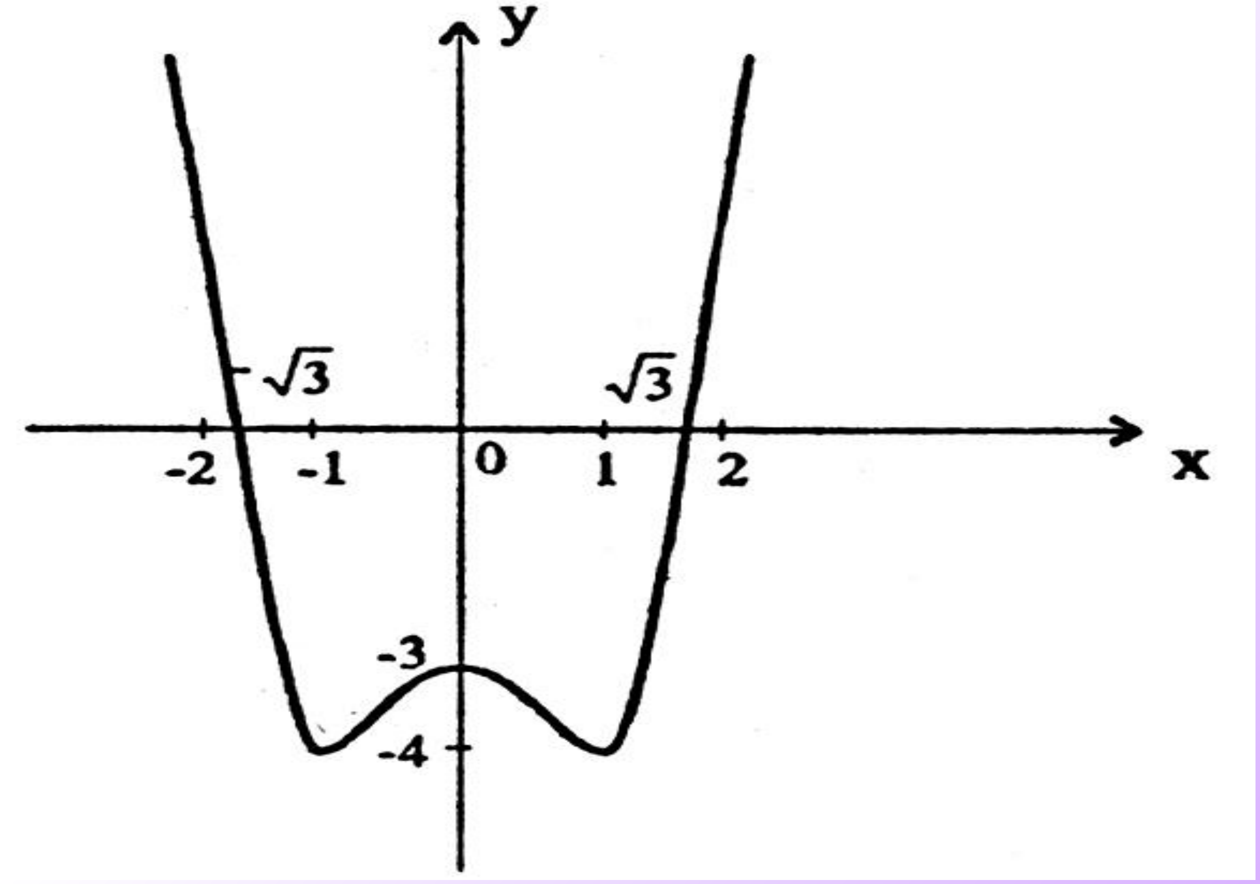
- **Промежутки знакопостоянства производной f'.**
- $f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x = -1; 0; 1.$

- Промежутки монотонности функция f(x).

- Точки экстремума и значения f в этих точках.
- Составить таблицу.

x	(- ∞; -1)	-1	(-1;0)	0	(0;1)	1	(1;+ ∞)
f′(x)	–	0	+	0	-	0	+
f(x)		-4		-3		-4	
		min		max		min	

❑ Построить график функции.



Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции f(x) на отрезке [a;b]

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции f(x) на промежутке [a;b], нужно

- вычислить её значения f(a) и f(b) на концах данного промежутка;
- вычислить её значения в критических точках, принадлежащих этому промежутку;
- Выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Записывают : $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ и $\min\limits_{[a;b]} f(x)$

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2};\ 2\right]$.

1) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6\frac{1}{8}$, $f(2) = 9\frac{1}{2}$.

2) $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{3x^4 - 3}{x^2}$, $3x^4 - 3 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Интервалу $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$ принадлежит одна стационарная точка $x_1 = 1$, $f(1) = 4$.

3) Из чисел $6\frac{1}{8}$, $9\frac{1}{2}$ и 4 наибольшее $9\frac{1}{2}$, наименьшее 4.

Ответ Наибольшее значение функции равно $9\frac{1}{2}$, наименьшее 4.