

НАДЁЖНОСТЬ ПОДВИЖНОГО СОСТАВА

Автор:

кандидат технических наук, доцент
кафедры «Вагоны и вагонное хозяйство»
Александр Анатольевич Иванов

ТЕМА 4

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ТОЛКОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЁЖНОСТИ

- 4.1. ИСПЫТАНИЯ НА НАДЁЖНОСТЬ. ВИДЫ ИСПЫТАНИЙ**
 - 4.2. ПЛАНЫ ИСПЫТАНИЙ НА НАДЁЖНОСТЬ**
 - 4.3. КОЛИЧЕСТВО ИСПЫТЫВАЕМЫХ ОБЪЕКТОВ**
 - 4.4. КЛАССИФИКАЦИЯ ВЫБОРОК**
 - 4.5. ИСТОЧНИКИ ПЕРВИЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ О НАДЁЖНОСТИ ВАГОНОВ**
 - 4.6. ЭТАПЫ ОБРАБОТКИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ**
 - 4.7. ПРОВЕРКА ОДНОРОДНОСТИ ВЫБОРКИ**
 - 4.8. МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ**
 - 4.9. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ**
 - 4.10. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ**
 - 4.11. ПРОВЕРКА КАЧЕСТВА ОЦЕНОК. КРИТЕРИЙ КОЛМОГОРОВА**
 - 4.12. КОНТРОЛЬНЫЕ ИСПЫТАНИЯ НА НАДЁЖНОСТЬ**
-

4.9. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Точечные оценки параметров закона распределения эффективны, только когда в выборке большое количество наработок до отказов. Для высоконадёжных деталей эффективность точечных оценок резко падает.

Поэтому возникает необходимость контроля качества точечных оценок, для чего используются интервальные оценки, т.е. определяется интервал $[\psi_1; \psi_2]$, который с заданной (требуемой) вероятностью $1-\alpha$ накрывает неизвестное оценённое значение параметра Q_i .

$$P\{\psi_1 \leq Q_i \leq \psi_2\} = 1 - \alpha$$

причём интервал указывают для каждого из параметров Q_i .

Отрезок $[\psi_1; \psi_2]$ называют доверительным интервалом для параметра Q_i . В зависимости от результатов опытов точечная оценка параметра может принять любое значение в этом интервале с вероятностью $1-\alpha$.

ψ_1 – нижняя доверительная граница интервала

ψ_2 – верхняя доверительная граница интервала

α – уровень значимости ошибки. Это вероятность ошибки, которой допустимо пренебречь в рамках решения конкретной задачи (0,05-0,1)

Рассмотрим пример получения доверительного интервала.

Пусть $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ – полная выборка.

Пусть выборка подчиняется нормальному закону распределения:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \text{EXP} \left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2} \right),$$

a и σ^2 – параметры закона распределения

(математическое ожидание и дисперсия наработки до отказа)

Рассмотрим одну из задач: определим доверительный интервал для параметра a , при условии, что σ^2 известен

Поскольку каждый элемент выборки – можно трактовать как случайную величину, которая подчиняется нормальному закону распределения, то статистическое среднее значение наработки до отказа для полной выборки:

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i,$$

также является случайной величиной с нормальным законом распределения. Тогда случайная величина:

$$\xi = \frac{\bar{t} - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n},$$

также имеет нормальное распределение, но с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной 1.

Эта величина имеет закон распределения, называемый

стандартным нормальным распределением и его значения приведены в спец.таблицах нормального распределения

Зададим доверительную вероятность α , а по таблицам нормального распределения найдём величину (t_α) квантиля нормального закона распределения уровня α .

Это равносильно записи: $P\{\xi < t_\alpha\} = 1 - \alpha$,

$$\text{т.е.} \quad P\left\{\left|\frac{\bar{t} - a}{\sigma}\right| \cdot \sqrt{n} < t_\alpha\right\} = 1 - \alpha.$$

Разрешим неравенство, заключённое в скобках, получим:

$$P\left\{\bar{t} - \frac{\sigma \cdot t_\alpha}{\sqrt{n}} \leq a \leq \bar{t} + \frac{\sigma \cdot t_\alpha}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha.$$

Тогда неизвестный параметр a расположен в интервале :

$$\left[\bar{t} - \frac{\sigma \cdot t_\alpha}{\sqrt{n}}; \bar{t} + \frac{\sigma \cdot t_\alpha}{\sqrt{n}}\right]$$

с вероятностью, равной $1 - \alpha$.

Например, при $\alpha = 0,001$ по таблицам нормального распределения $t_\alpha = 3$.

4.10. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

С любой упорядоченной по возрастанию выборкой можно связать статистический аналог функции распределения, который называют *эмпирической* (выборочной) функцией распределения.

Для полной выборки значения эмпирической функции распределения можно получить:

$$\hat{F}_n(t) = \frac{\sum_{i=1}^n h(t - \tau_i)}{n}$$

где

n – количество наработок до отказов;

$h(t - \tau_i)$ – единичная функция Хевисайда;

τ_i – наработка до i -го отказа.

Единичная функция Хевисайда имеет вид:

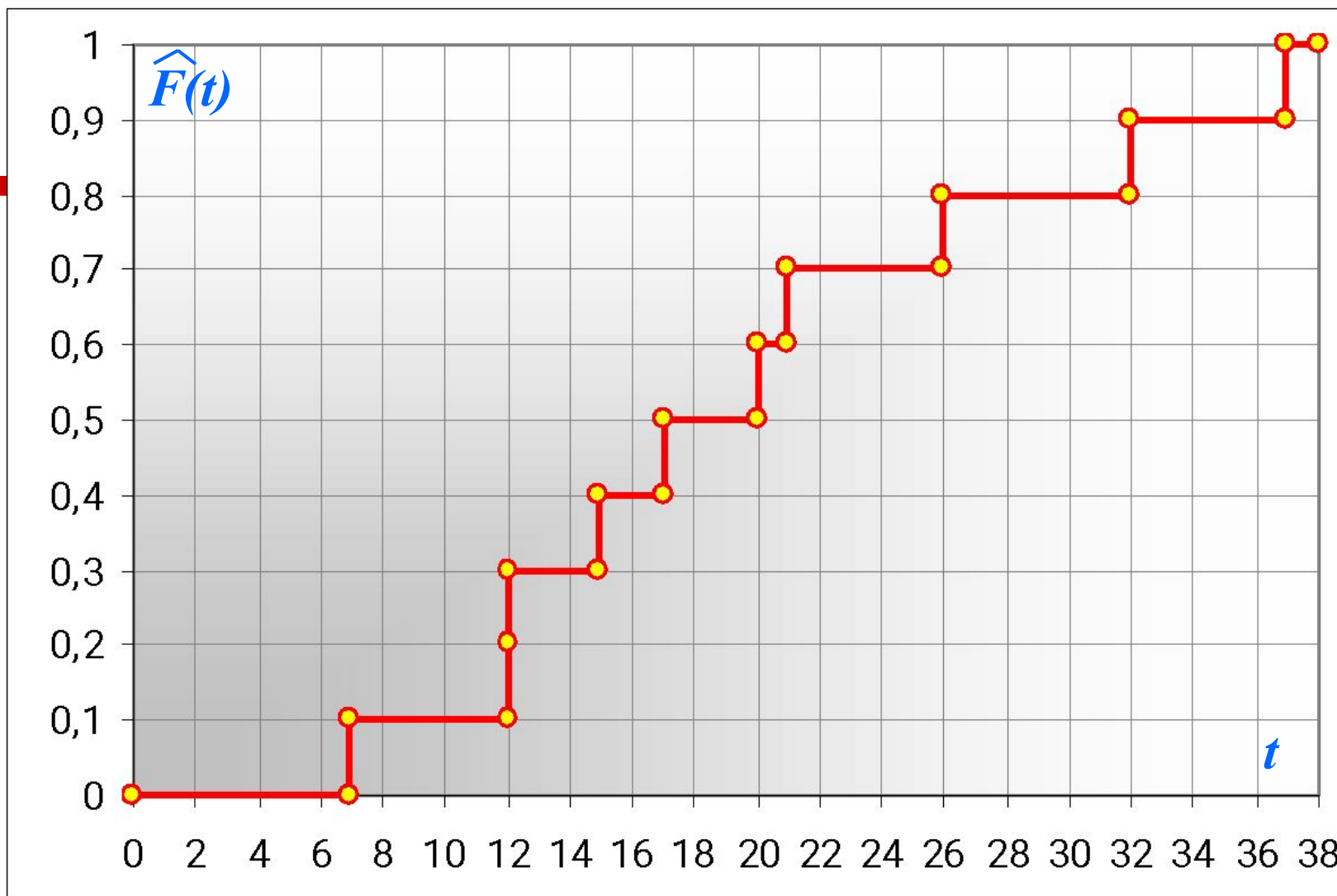
$$h(t - \tau_i) = \begin{cases} 1, & \text{при } t > \tau_i; \\ 0, & \text{при } t \leq \tau_i. \end{cases}$$

Рассмотрим пример:

Пусть получена полная выборка, состоящая из 10 элементов: $\tau_1=7, \tau_2=12, \tau_3=12, \tau_4=15, \tau_5=17, \tau_6=20, \tau_7=21, \tau_8=26, \tau_9=32, \tau_{10}=37$ ($i=\overline{1,10}$)

Получим значения эмпирической функции распределения, используя табличную форму.

t	t	$h(t-\tau_i)$										Σh	$\hat{F}(t)$
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$	$i=10$		
		$\tau_1=7$	$\tau_2=12$	$\tau_3=12,1$	$\tau_4=15$	$\tau_5=17$	$\tau_6=20$	$\tau_7=21$	$\tau_8=26$	$\tau_9=32$	$\tau_{10}=37$		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
...
$t=\tau_1-dt$	6,999	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
$t=\tau_1$	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
$t=\tau_1+dt$	7,001	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,10
...
$t=\tau_2-dt$	11,999	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,10
$t=\tau_2$	12	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,10
$t=\tau_2+dt$	12,001	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0,20
$t=\tau_3-dt$	12,099	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0,20
$t=\tau_3$	12,1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0,20
$t=\tau_3+dt$	12,101	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	3	0,30
...
$t=\tau_{10}+dt$	37,001	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1,00



Эмпирическая функция распределения для полной выборки

ЗАМЕЧАНИЕ:

Аналогичным образом можно выполнить построение для однократно усечённой выборки, только в знаменателе вместо n необходимо поставить N – объём выборки.

$$\hat{F}_n(t) = \frac{\sum_{i=1}^n h(t - \tau_i)}{N}$$

Для неполных (усечённых) выборок эмпирические функции получают с помощью формулы Фисибейна, либо формулы Джонсона.

Получение этих функций начинают с построения вариационного ряда.

Вариационный ряд – это таблица, в которой все наработки выборки (до отказов и безотказные) расставлены по возрастанию.

Пусть имеем неполную выборку:

наработки до отказов: 15, 19, 25,

безотказные наработки: 14, 19, 22, 27

Вариационный ряд

l	i	τ	j	t_j
1		i	1	14
2	1	15		
3	2	19		
4			2	19
5			3	22
6	3	25		
7			4	27

l – порядковый номер наработки в вариационном ряду

В каждой строчке – содержится только одна наработка

Если в выборке есть безотказная наработка, равная наработке до отказа, то в вариационном ряду сначала ставят наработку до отказа

ФОРМУЛА Фисшбейна:

$$\hat{F}_{\Phi}(t) = \frac{i}{v+1-j^*}$$

i – порядковый номер наработки до отказа
 v – количество элементов в выборке
 j^* – порядковый номер безотказной наработки, ближайшей в вариационном ряду к i сверху

ФОРМУЛА Джонсона:

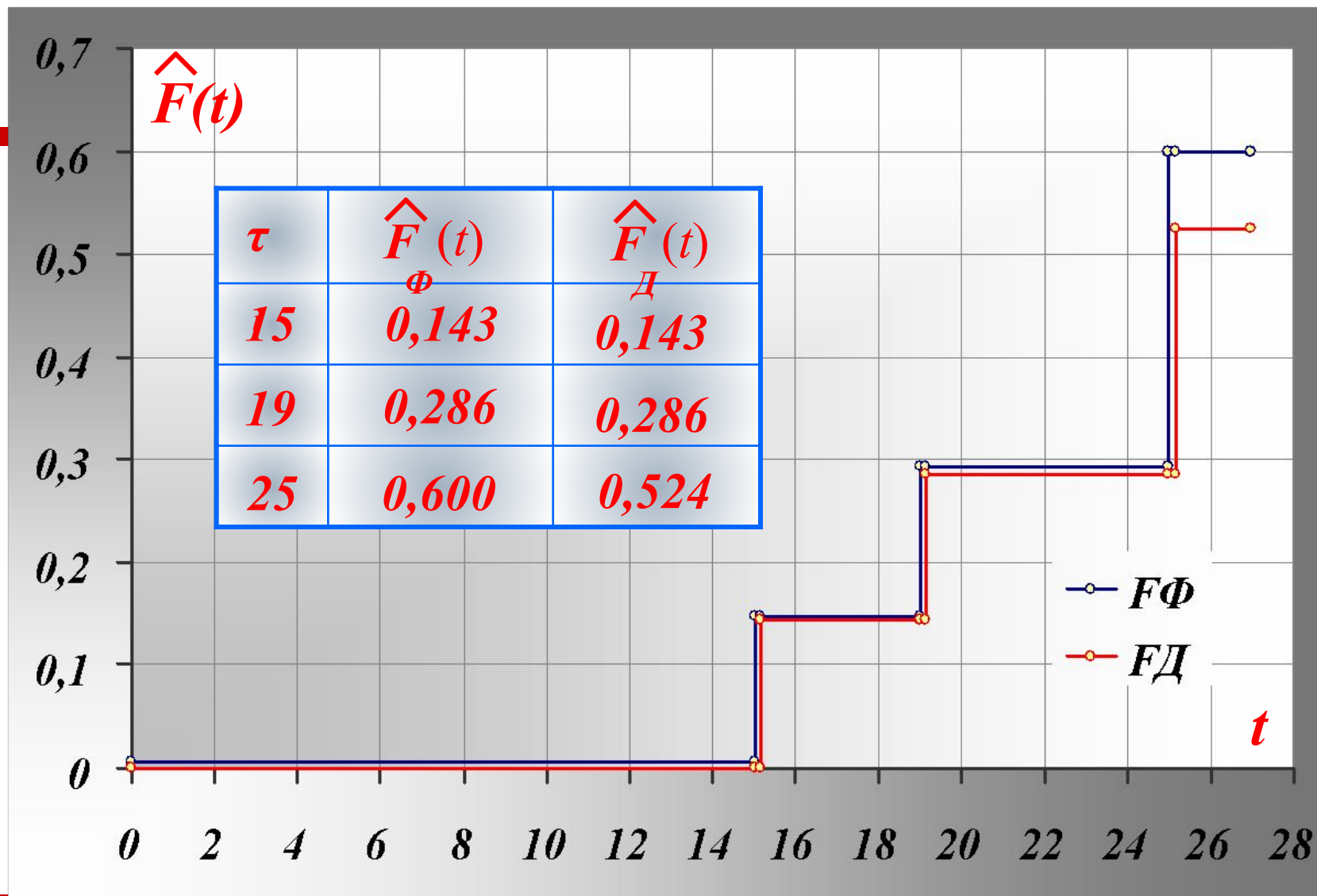
$$\hat{F}_{\text{Д}}(t) = \frac{r_i}{v+1}$$

где r_i – вспомогательный коэффициент

$$r_i = r_{i-1} + \frac{v+1-r_{i-1}}{v+2-l} \quad r_i = 0$$

l – порядковый номер i -й наработки до отказа в вариационном ряду

Результаты расчёта



Как видно, Эмпирические функции распределения:

- кусочно-постоянные функции (между моментами отказов не меняют своего значения);*
 - существуют только в пределах эксперимента, прогнозировать с их помощью показатели надёжности не представляется возможным.*
-

4.11. ПРОВЕРКА КАЧЕСТВА ОЦЕНОК. КРИТЕРИЙ КОЛМОГОРОВА

С помощью эмпирической функции распределения невозможно определить, какой закон распределения в наибольшей степени соответствует выборке.

Критерий Колмогорова позволяет судить о близости известной теоретической функции распределения $F(t)$ и эмпирической функции $\hat{F}_n(t)$ по наибольшей разности между ними, т.е. по величине:

$$D_n = \sup_t \left| \hat{F}_n(t) - F(t) \right|.$$

Статистика D_n – это случайная величина, функция распределения которой имеет следующее свойство:

при $n \rightarrow \infty$ для любой непрерывной функции $F(t)$ имеет место предельное соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\sqrt{n} \cdot D_n \leq t\} = K(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \cdot e^{-2m^2 t^2}, (t > 0)$$

на основе которого строится критерий Колмогорова. Здесь $K(t)$ – функция распределения Колмогорова (табулирована)

Практическое применение критерия согласия:

Если объём выборки n достаточно большой, то находится максимальная разность D_n , затем по таблице распределения Колмогорова находят квантиль t_α из условия:

$$K(t_\alpha) = 1 - \alpha$$

Практическое применение критерия согласия:

Если для данной выборки окажется, что $D_n \cdot \sqrt{n} > t_\alpha$, то расхождение между теоретическим и эмпирическим распределениями следует признать существенным и отвергнуть гипотезу о согласованности (близости) теоретического и эмпирического распределений.

При этом вероятность ошибки не превышает α

Если $D_n \cdot \sqrt{n} \leq t_\alpha$, то эмпирическую и теоретическую функции распределения считают согласованными, т.е. стоит принять гипотезу о близости теоретического и эмпирического распределений.

Критерий Пирсона (критерий χ^2 или «хи»-квадрат)

Часто в качестве критерия согласия используют критерий «хи»-квадрат.

Используется также мера расхождения в виде следующего статистического ряда:

$$\chi_n^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(v_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}.$$

$$\chi_n^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(v_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}.$$

1. Формулируют гипотезу, что выборке соответствует теоретическая функция распределения $F(t)$.
2. Выбирают точки z_i : $0 < z_1 < z_2 < \dots < z_r$.
 Выбор осуществляют таким образом, чтобы $n \cdot p_k \geq 10$ и $n_k \geq 10$,
 здесь n – объём выборки, $p_k = F(t_k) - F(t_{k-1})$, t_k – k -я наработка в вариационном ряду (в эксперименте).
3. v_k – число тех элементов t_i , которые попадают в соответствующий интервал: $z_{k-1} < t_i \leq z_k$
4. Формируют статистику χ_n^2

$$\chi_n^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(v_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}.$$

Распределение χ_n^2 при $n \rightarrow \infty$ сходится к распределению «хи»-квадрат с $(r-1)$ -й степенью свободы:

$$[\chi^2]_{(r-1)}$$

Значения $[\chi^2]_{(r-1)}$ приведены в специальных таблицах.

Задают уровень значимости ошибки α и по таблице ищут допустимое значение $[\chi^2]_{(r-1)}$.

$$P\left\{[\chi^2]_{(r-1)} \in (0, t_\alpha)\right\} = 1 - \alpha$$

Гипотеза о близости принимается, если $\chi_n^2 \leq [\chi^2]_{(r-1)}$ и наоборот.

ТЕМА 4 СТАТИСТИЧЕСКОЕ ТОЛКОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЁЖНОСТИ

ДАНО: Полная выборка

Теоретическая кривая – экспоненциальное распределение с параметром $\alpha=0,404$ мес.⁻¹

Объём полной выборки равен $n=162$.

Максимальное значение наработки до отказа 6 мес.

Рассмотрим 6 равных по величине интервалов:

№1: $0 - z_1$, т.е. 0 – 1 мес.

№2: $z_1 - z_2$, т.е. 1 – 2 мес.

№3: $z_2 - z_3$, т.е. 2 – 3 мес.

№4: $z_3 - z_4$, т.е. 3 – 4 мес.

№5: $z_4 - z_5$, т.е. 4 – 5 мес.

№6: $z_5 - z_6$, т.е. 5 – 6 мес.

ПРОВЕРИТЬ:

Гипотезу о близости теоретического распределения

(экспоненциального с параметром $\alpha=0,404$ мес.⁻¹) и

статистических данных.

Пусть в каждый интервал попадает следующее количество наработок:

$z_{k-1}-z_k$	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
v_k	56	39	28	19	13	7

Теоретическая вероятность попадания наработки в интервал

$$t_{k-1}-t_k: p_k = e^{-atk} - e^{-at(k-1)}$$

$t_{k-1}-t_k$	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
p_k	0,332	0,222	0,148	0,099	0,066	0,044
$n \cdot p_k$	$162 \cdot 0,332 = 53,84$	35,95	24	16,02	10,7	7,143
$\frac{(v_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}$	0,087	0,259	0,667	0,553	0,495	0,003

$$\chi_n^2 = 2,064$$

Для получения $[\chi^2]_{(r-1)}$ используем возможности EXCEL:

ФУНКЦИЯ: ХИОБР(1- α ;r-1)

(r-1) – число степеней свободы

для примера равно 6-1=5

α – уровень значимости ошибки (примем 0,05)

$r-1$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$[\chi^2]_{(r-1)}$	1,15	1,64	2,17	2,73	3,33	3,94	4,57	5,23	5,89	6,57	7,26	7,96

Вывод: гипотезу о близости двух функций следует отбросить с вероятностью ошибки не большей 0,05

4.12. КОНТРОЛЬНЫЕ ИСПЫТАНИЯ НА НАДЁЖНОСТЬ

ЗАМЕЧАНИЕ:

*РАНЕЕ РАССМОТРЕННЫ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЕ ИСПЫТАНИЯ НА НАДЁЖНОСТЬ,
В КОТОРЫХ ИСПОЛЬЗОВАНЫ ДАННЫЕ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ
ДЛЯ ОЦЕНКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЁЖНОСТИ*

Контрольные испытания на надёжность предназначены для проверки соответствует ли объект требуемому уровню надёжности.

Контролируемыми показателями могут быть:

- средняя наработка до отказа,
 - ВБР,
 - интенсивность отказов,
 - интенсивность потока отказов,
 - гамма-процентный ресурс,
 - коэффициент готовности и др.
-

На основе результатов испытаний принимают одно из следующих решений:

- *признать изделие годным;*
- *забраковать изделие;*
- *продолжить испытание.*

В первом случае, считают, что справедлива

НУЛЕВАЯ ГИПОТЕЗА = {изделие годное},

Во втором случае –

АЛЬТЕРНАТИВНАЯ ГИПОТЕЗА – {изделие бракованное}.

ЗАМЕЧАНИЕ:

***ДАЛЕЕ В КАЧЕСТВЕ КОНТРОЛИРУЕМОГО ПОКАЗАТЕЛЯ
БУДЕМ РАССМАТРИВАТЬ ВЕРОЯТНОСТЬ БЕЗОТКАЗНОЙ
РАБОТЫ ЗА НЕКОТОРОЕ ВРЕМЯ T.***

Исходные данные для контрольных испытаний.

Изготовитель и заказчик согласовывают:

α – номинальное значение риска изготовителя (вероятность ошибки I рода, т.е. вероятность того, что будет забраковано хорошее изделие);

β – номинальное значение риска заказчика (вероятность ошибки II рода, т.е. вероятность того, что будет принято в эксплуатацию бракованное изделие).

Приёмочное значение показателя надёжности

T_α , например, $(ВБР - P_\alpha)$;

Браковочное значение показателя надёжности

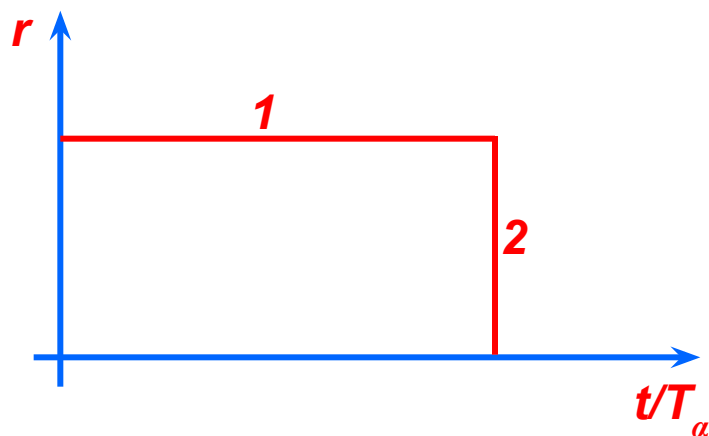
T_β , $(ВБР - P_\beta)$

Разрешающий коэффициент,

например для ВБР: $D = (1 - P_\beta) / (1 - P_\alpha)$

Различают три вида контрольных испытаний.

1. Одноступенчатые (ограниченные продолжительностью или числом отказов)



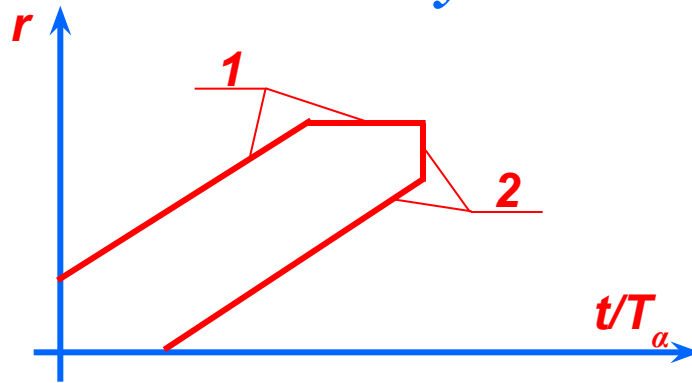
r – число учитываемых отказов;

t/T_α – суммарная учитываемая наработка.

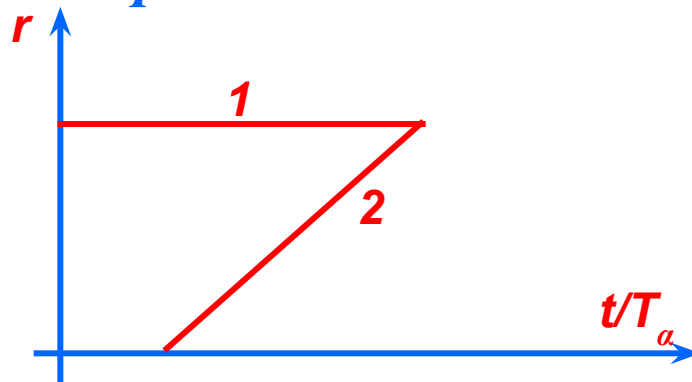
1 – граница браковки;

2 – граница приёмки.

2. Последовательные усечённые испытания



3. Комбинированные испытания



Для одноступенчатого контроля обосновывают:

- время испытаний t_u ,
- объём выборки n ,

- приёмочное число C – это максимально возможное число отказавших за время испытания изделий, при котором партия изделий считается годной

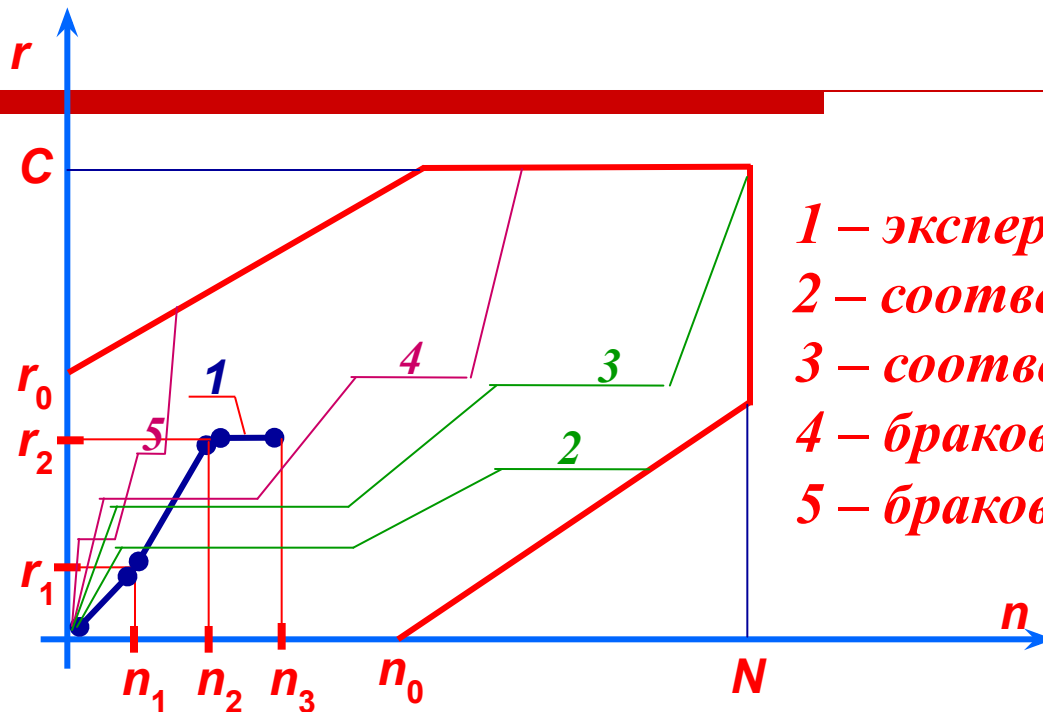
Из одной партии отбираются n деталей. Если в эксперименте число отказавших изделий не больше C , партия принимается, иначе – бракуется.

При этом, если не известен закон распределения показателя надёжности, время испытаний t_u берут равным времени, для которое задана вероятность безотказной работы P_β

При последовательных испытаниях общее число испытываемых изделий заранее не задают, а определяют по результатам предыдущих наблюдений. Одно или несколько изделий (количество указано в программе испытаний) ставят на испытания. По их результатам принимают решение о приёмке партии, об отбраковке партии или о продолжении испытаний.

Если испытания продолжают, то на испытания ставят столько же изделий, как и на предыдущем этапе и т.д. При этом последовательно суммируют число наблюдений n и число отказов r . По полученным суммам строят график.

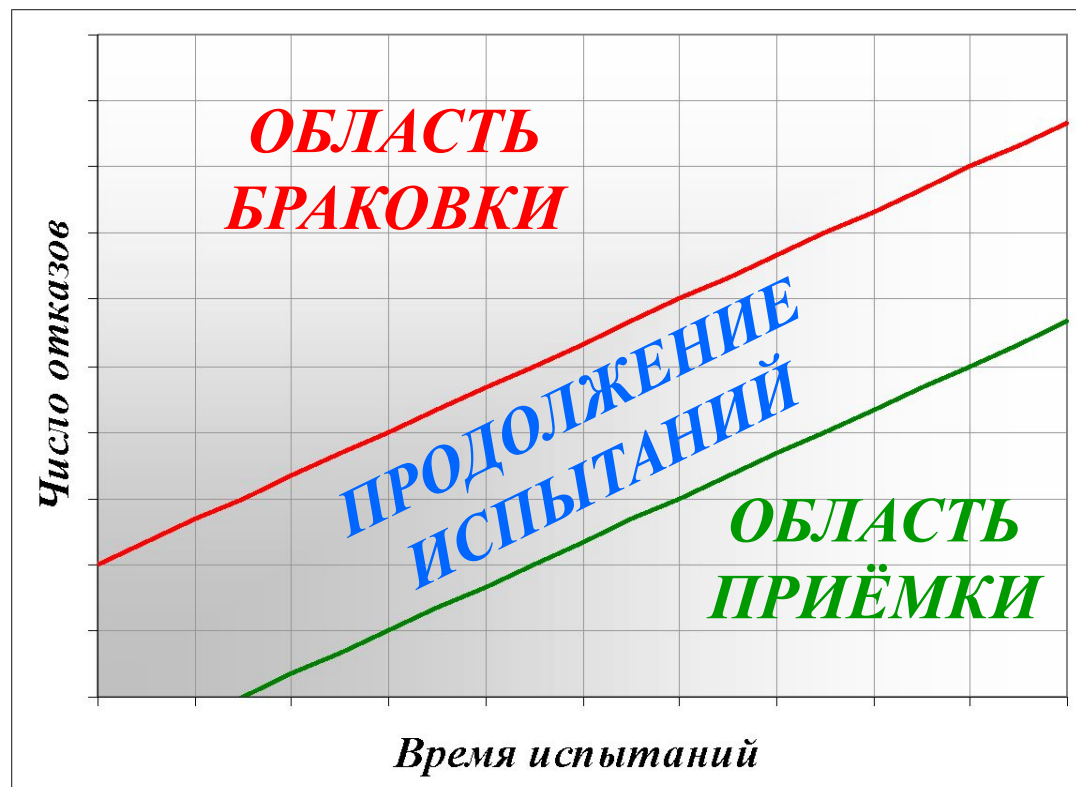
Порядок поведения испытаний.



- 1 – экспериментальная кривая
- 2 – соответствует приёмке
- 3 – соответствует приёмке
- 4 – браковка
- 5 – браковка

n – суммарное число испытанных изделий на данный момент,
 r – суммарное число отказов на данный момент,
 C – браковочное суммарное число отказов,
 N – максимально возможное количество наблюдений до
 принятия решения.

Можно заранее построить график приёмочного контроля, который содержит три области: браковки, приёмки и продолжения испытаний.



Линия несоответствия рассчитывается:

$$r = an + r_0.$$

Линия соответствия (приемки) рассчитывается:

$$r = a(n - n_0).$$

При этом:

$$a = \frac{\ln(P_\alpha / P_\beta)}{\ln D + \ln(P_\alpha / P_\beta)}$$

$$r_0 = \frac{\ln((1 - \beta) / \alpha)}{\ln D + \ln(P_\alpha / P_\beta)}$$

$$n_0 = \frac{\ln((1 - \alpha) / \beta)}{\ln(P_\alpha / P_\beta)}$$

$$D = \frac{(1 - P_\beta)}{(1 - P_\alpha)}$$

Можно принять решение о соответствии или несоответствии показателей качества и без построения графиков – аналитически.

В процессе последовательных испытаний определяют величину отношения правдоподобия:

$$\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}}$$

$P_{1,n}$ – вероятность того, что в n испытаниях справедлива альтернативная гипотеза;

$P_{0,n}$ – вероятность того, что в n испытаниях справедлива нулевая гипотеза.

Если $\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}} \leq \frac{\beta_0}{1 - \alpha_0}$, то принимают нулевую гипотезу

Если $\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}} \geq \frac{1 - \beta_0}{\alpha_0}$, то принимают – альтернативную

Если $\frac{\beta_0}{1 - \alpha_0} < \frac{P_{1,n}}{P_{0,n}} < \frac{1 - \beta_0}{\alpha_0}$, испытания продолжают