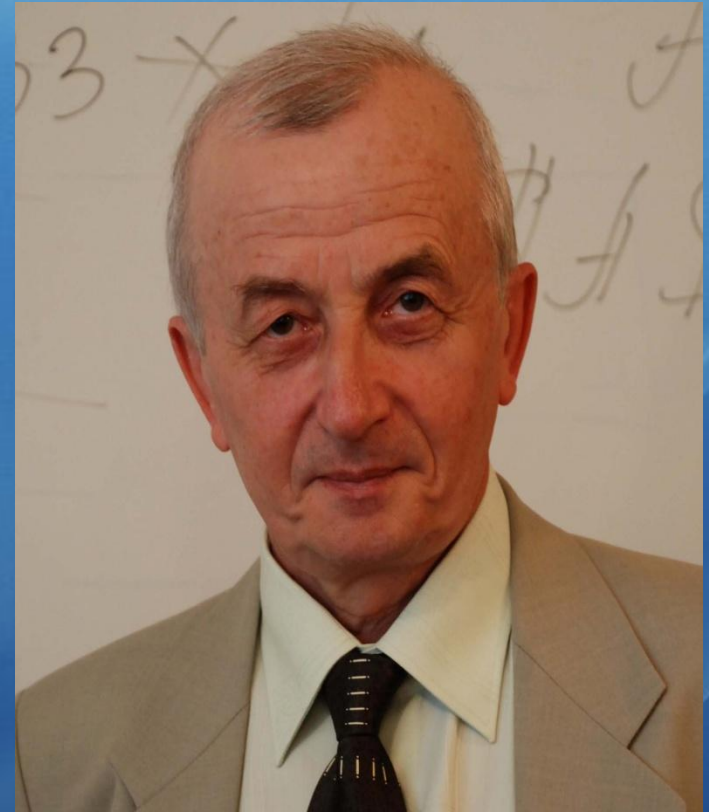


Количественное описание математических объектов

Косьмин Сергей
Николаевич



© КсН, 2011-2016

Количественное описание математических объектов

- Алгебраические структуры
- Системы счисления
- Запись чисел в позиционной системе счисления
- Экспоненциальная форма числа
- Перевод числа из любой системы в десятичную
- Перевод числа из десятичной системы счисления
- Перевод чисел в системах кратных двум

Алгебраической структурой называется множество вместе с операциями, определёнными на нём.

Алгебраическая структура вместе с правилами вычислений, правилами вывода и всеми теоремами называется **алгебраической системой**.

Полугруппой называется множество S с определённой на нём бинарной операцией \oplus , которая ассоциативна:

$$x \oplus y \oplus z = (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = y \oplus (x \oplus z), \text{ где } x \in S, y \in S, z \in S.$$

Пример полугруппы:

$(\mathbb{N}; +)$ - алгебра натуральных чисел.

Моноидом называется множество M с определённой на нём бинарной операцией \otimes , которая

- ассоциативна

$$x \otimes y \otimes z = (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z) = y \otimes (x \otimes z), \text{ где } x \in M, y \in M, z \in M, \text{ и}$$

- имеет единичный элемент e по отношению к данной операции: $e \otimes x = x = x \otimes e$.

Полугруппы и моноиды используются в теории языков при обработке строк СИМВОЛОВ.

Группой называется множество G с \otimes бинарной операцией, которая $\forall (x), x \in G$

ассоциативна на этом множестве;

имеет единицу: $e \otimes x = x = x \otimes e$

и обратный элемент: $x \otimes y = e = y \otimes x$ по отношению к данной операции.

Пример группы:
 $(\mathbb{Z}; +)$ - алгебра целых чисел.

Кольцом называется множество R с двумя определёнными на нём бинарными операциями \oplus \otimes , которые:

Обе \oplus \otimes ассоциативны;

Вторая \otimes операция: ассоциативна, коммутативна и имеет единицу, называемую нулём; имеет обратные элементы и дистрибутивна по отношению к первой операции.

Пример кольца:

$(\mathbb{Z}; +; *)$ - алгебра целых чисел.

Числовым кольцом называется множество, элементами которого являются числа, а операциями: сложение и умножение.

Областью целостности называется кольцо без ненулевых делителей нуля (то есть без отличных от нуля элементов, произведение которых равно нулю).

Всякое числовое кольцо является областью целостности!

Коммутативным кольцом называется кольцо с коммутативной второй операцией (умножения).

Ассоциативным кольцом называется кольцо с ассоциативной второй операцией (умножения).

Кольцом с единицей называется кольцо с второй операцией (умножения), имеющей нейтральный по отношению к ней элемент (единицу).

Полукольцом называется множество, на котором определены операции сложения и умножения, образующие коммутативную полугруппу относительно сложения, а умножение дистрибутивно относительно сложения.

Пример полукольца:

$(\mathbb{N}; +; *)$ - алгебра натуральных чисел.

Поле называется коммутативное и ассоциативное кольцо с единицей, в котором для любого отличного от нуля элемента найдётся обратный ему элемент ($a * a^{-1} = e$).

Пример поля:

$(\mathbb{Q}; +; *)$ - алгебра рациональных чисел.

Числовым полем называется поле, элементами которого являются числа.

Вычисляя, мы возделываем числовое поле!

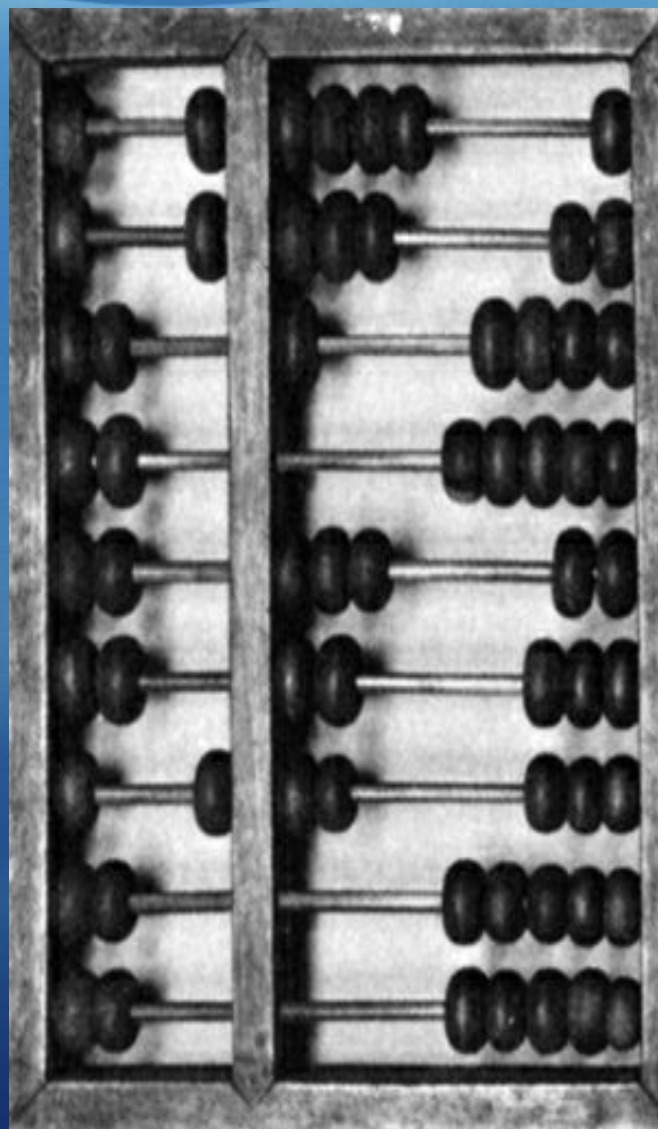
Количественное описание математических объектов

- Алгебраические структуры
- Системы счисления
- Запись чисел в позиционной системе счисления
- Экспоненциальная форма числа
- Перевод числа из любой системы в десятичную
- Перевод числа из десятичной системы счисления
- Перевод чисел в системах кратных двум

Системой счисления называется система, позволяющая представлять на письме счётные величины и выполнять над ними арифметические операции: сложения, вычитания, умножения, деления.

Человечество училось считать
более 2600 лет.
Завершением обучения принято
считать событие
“нахождения нуля на Абаке”,
произошедшее
в Индии в VI веке нашей эры.

АБАК



Русские счёты



Вычисления на них проводились путем перемещения счетных костей и камешков (калькушек) в продольных углублениях досок из бронзы, камня, слоновой кости, цветного стекла. Эти счеты сохранились до эпохи Возрождения, а в видоизмененном виде сначала как "допятый счет" и как русские счеты до настоящего времени.

На первом этапе:

счётная величина представлялась в записи, как картина, с помощью иероглифов, изображающих представимые, для производящего счет, величины.

Местоположение иероглифа не имело никакого значения для записи счётной величины.

Такие **системы счисления** ныне называются **непозиционные**.

Непозиционными системами счисления

называются системы счисления, в которых положение знака (цифры) в записи числа не влияет на значение счетной величины.

Непозиционные системы счисления являются исторически первыми.

На первом этапе люди учились представлять счётные величины знаками.

На втором этапе:

значение счетной величины становится

зависимым от положения знака в записи числа.

Запись значения счётной величины производится, с помощью конечного числа знаков - цифр, изображающих представимые, для производящего счет, величины.

Это переходный этап к построению позиционных систем счисления для записи счетной величины.

На данном этапе **человечество ищет**

эффективный метод кодирования в представлении записи числа.

На третьем этапе:

запись значения счётной величины производится, с помощью конечного числа знаков – цифр базиса системы счисления, изображающих представимые, для производящего счет, величины.

Построены позиционные системы счисления для записи счетной величины.

Найдена формула числа и основные алгоритмы арифметических операций для позиционных систем счисления.

Позиционными системами счисления

называются системы счисления, в которых положение знака (цифры) в записи числа влияет на значение счетной величины.

Позиционные системы счисления позволяют, опираясь на единые алгоритмы выполнения арифметических действий, выполнять счёт разными базисами.

Количественное описание математических объектов

- Алгебраические структуры
- Системы счисления
- Запись чисел в позиционной системе счисления
- Экспоненциальная форма числа
- Перевод числа из любой системы в десятичную
- Перевод числа из десятичной системы счисления
- Перевод чисел в системах кратных двум

Счёт – это измерение мощности множества **счётной величины** мощностью эталонного множества, называемого **базисом системы счисления**.

Результат счёта показывает сколько эталонов содержится в **счётной величине**.

Требования к эталону:

1. Эталон и измеряемая величина должны быть одной природы.
2. Элементы (состояния) эталонного множества должны быть представимы системе производящей счёт.
3. Счёт можно производить эталоном любой мощности.

Элементы эталонного множества обозначаются **цифрами**.

Цифра выражает мощность подмножества эталонного множества.

В десятичной системе счисления для записи состояний эталонного множества используются арабские цифры: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Расширение базиса производится буквами латинского алфавита.

Если счётная величина не превосходит базис системы счисления, то она выражается на письме **цифрой**.

Так записывается в этом случае мощность множества счётной величины.

Если счётная величина превышает по мощности базис системы счисления (хотя бы на единицу), то на письме она выражается **ЧИСЛОМ**.

Так записывается в этом случае мощность множества счётной величины.

Переход от ЦИФРЫ к
числу означает выход
СЧЁТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ
за пределы БАЗИСА
системы счисления.

В позиционных системах счисления число представляется ПОЛИНОМОМ:

Свёрнутая форма представления числа

Развёрнутая форма представления числа

$$abc_p = a \cdot P^2 + b \cdot P^1 + c \cdot P^0$$

Базис

Базис

Нулевой порядок числа

(Число нулевого порядка - ЦИФРА)

Первый порядок числа

(Число первого порядка представлено двумя разрядами.)

Второй порядок числа

(Число второго порядка представлено тремя разрядами ...)

Считать можно базисами
любой мощности!!!

ПРИНЯТО:

Для десятичной системы счисления НЕ указывать нижним индексом мощность базиса системы счисления в свёрнутой форме представления числа.

Для иных систем счисления нижний индекс ОБЯЗАТЕЛЕН!!!

ПРАВИЛО ПРОВЕРКИ ЗАПИСИ ЧИСЛА

Число любой (P -ичной) позиционной системы счисления записано правильно, если в записи числа, в свёрнутой форме, используются цифры не превышающие базис системы счисления:

abc_p , где $a < P; b < P; c < P$.

Операции с числами

Числа можно:

1. Складывать (+),
2. Вычитать (-),
3. Умножать (*),
4. Делить (: или /).

Оперировать числами – значит оперировать мощностями множеств счётных величин которые характеризуют эти числа.

Операции над числами изучает арифметика.

Правила выполнения
арифметических
операций ЕДИНЫ для
любых позиционных
систем счисления!

Операции с числами выполнимы, если:

- операнды (участники операции) записаны верно, и
- они относятся к одной системе счисления.

Операции над числами ввёл Абу Джафар Мохаммед бен Муса аль Хорезми (Отец Джафара Мохаммед сын Мусы из Хорезма). Он научил народы Земли считать!



Мухаммед бен Муса
Аль-Хорезми
(787 – 850)

Среднеазиатский математик и астроном. Написал основополагающие трактаты по арифметике и алгебре, которые оказали большое влияние на развитие математики. Он впервые отделил алгебру от арифметики и стал рассматривать её как самостоятельный предмет.

Абу Джафар Мохаммед бен Муса аль Хорезми



Во всех системах счисления первое число выглядит одинаково:

$\{0, 1\}$ – базис двоичной
системы счисления

$$\begin{array}{r} 1_2 \\ + 1_2 \\ \hline 10_2 \end{array}$$

$\{0, 1, 2\}$ - базис троичной
системы счисления

$$\begin{array}{r} 2_3 \\ + 1_3 \\ \hline 10_3 \end{array}$$

$\{0, 1, 2, 3\}$ - базис четверичной
системы счисления

$$\begin{array}{r} 3_4 \\ + 1_4 \\ \hline 10_4 \end{array}$$

Оно утверждает, что счётная величина состоит из одного базиса.

В позиционных системах счисления число представляется ПОЛИНОМОМ:

Свёрнутая форма представления числа

Развёрнутая форма представления числа

$$abc_p = a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0$$

Базис

Базис

Нулевой порядок числа

(Число нулевого порядка - ЦИФРА)

Первый порядок числа

(Число первого порядка представлено двумя разрядами.)

Второй порядок числа

(Число второго порядка представлено тремя разрядами ...)

Если операнды (участники операции):

Записаны не верно, и (или)

Относятся к разным системам счисления, то

операция невозможна; и (или)

Следует привести числа к одной системе счисления!

Количественное описание математических объектов

- Алгебраические структуры
- Системы счисления
- Запись чисел в позиционной системе счисления
- Экспоненциальная форма числа

- Перевод числа из любой системы в десятичную
- Перевод числа из десятичной системы счисления
- Перевод чисел в системах кратных двум

При высокоточных вычислениях на
ограниченной разрядной сетке машины
число представляют в
экспоненциальной форме двумя
параметрами:

МАНТИССА

ПОРЯДОК

$$256 = 0,256 * 10^3$$

Количественное описание математических объектов

- Алгебраические структуры
- Системы счисления
- Запись чисел в позиционной системе счисления
- Экспоненциальная форма числа
- Перевод числа из любой системы в десятичную
- Перевод числа из десятичной системы счисления
- Перевод чисел в системах кратных двум

Перевод числа из любой системы в десятичную

При переводе числа из любой системы счисления в десятичную расчёт производится по полиномной формуле числа по правилам, принятым в десятичной системе счисления, и с базисом, выраженным десятичной цифрой. Десятичная запись результата будет искомым числом.

Количественное описание математических объектов

- Алгебраические структуры
- Системы счисления
- Запись чисел в позиционной системе счисления
- Экспоненциальная форма числа
- Перевод числа из любой системы в десятичную
- Перевод числа из десятичной системы счисления

- Перевод чисел в системах кратных двум

Перевод числа из десятичной системы счисления

Число делится в десятичной системе счисления на основание P -ичной системы счисления, выраженное десятичной цифрой. Остаток от деления даёт последнюю цифру P -ичной записи числа.

Неполное частное снова делится на основание P -ичной системы счисления, формируя предпоследнюю цифру P -ичной записи числа. Процесс продолжается, пока неполное частное не станет меньше основания системы счисления.

Количественное описание математических объектов

- Алгебраические структуры
- Системы счисления
- Запись чисел в позиционной системе счисления
- Экспоненциальная форма числа
- Перевод числа из любой системы в десятичную
- Перевод числа из десятичной системы счисления
- Перевод чисел в системах кратных двум

Перевод чисел в системах с базисами, кратными двум

ДВОИЧНАЯ

0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

ВОСЬМЕРИЧНАЯ

ДЕСЯТИЧНАЯ

8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

шестнадцатеричная

Перевод чисел в системах с базисами кратными двум

Переход от двоичной системы счисления к восьмеричной и обратно производится через разбиение (по арабски) с права на лево записи числа на триады двоичных цифр с последующей заменой триад на восьмеричную запись числа.

Переход от двоичной системы счисления к шестнадцатеричной и обратно производится через замену тетрад двоичных цифр на шестнадцатеричную запись числа.

© KcH, 2011-2016