## *Теорема Ербрана*

Ця теорема є основою більшості сучасних алгоритмів доведення теорем. Вона тісно зв' язана з теоремою про те, що множина диз' юнктів S суперечлива тоді і тільки тоді коли S фальшива при всіх H-інтерпретаціях.

**Теорема** (Ербрана). Для того, щоб множина диз'їюнктів була суперечливою достатньо, щоб існувала скінченна суперечлива множина основних прикладів диз'юнктів.

**Доведення**. Нехай існує скінченна суперечлива множина $S'$ основних прикладів диз’юнктів $S$. Так як кожна інтерпретація $I$ для $S$ містить інтерпретацію $I'$ множини $S'$ і $I'$ заперечує $S'$, то $I$ також повинна заперечувати $S'$. Але $S'$заперечується в кожній інтерпретації $I'$. Отже, $S'$заперечується в кожній інтерпретації $I$ множини $S$. Тому $S$ заперечується в кожній інтерпретації множини $S'$. Отже, $S$ суперечлива.

**Приклад (a).** Нехай $S = \{P(x), \neg P(f(x))\}$. Існує суперечлива множина основних прикладів диз'юнктів

$$S' = \{P(f(a)), \neg P(f(a))\}.$$

Отже, S – суперечлива.

(b). Нехай $S = \{\neg P(x) \vee Q(f(x),x), P(g(b)), \neg Q(y,z)\}$. Існує суперечлива множина основних прикладів диз'юнктів

$$S' = \{\neg P(g(b)) \vee Q(f(g(b)), g(b)), P(g(b)), \neg Q(f(g(b)), g(b))\}.$$

Отже, S – суперечлива.

**Приклад**. Нехай $S = \{\neg P(x,y,u) \vee \neg P(y,z,v) \vee \neg P(x,v,w) \vee P(u,z,w), \neg P(x,y,u) \vee \neg P(y,z,v) \vee \neg P(u,z,w) \vee P(x,v,w), P(g(x,y), x, y), P(x, h(x,y), y), P(x,y,f(x,y)), \neg P(k(x),x, k(x))\}$. В цьому ви-падку нелегко знайти скінченну суперечливу множину основних прикладів множини S.

Одна з них:

$S' = \{P(a, h(a,a),a), \neg P(k(h(a,a),h(a,a), k(h(a,a))), P(g(a,k(h(a,a))), a, k(h(a,a))), \neg P(g(a,k(h(a,a))), a, k(h(a,a))) \vee \neg P(a, h(a,a), a) \vee$

$\neg P(g(a,k(h(a,a))), a, k(h(a,a))) \vee P(k(h(a,a))$

## *Застосування теореми Ербрана*

Теорема Ербрана для доведення суперечливості множини диз'юнктів припускає процедуру спростування. Це означає, що для доведення суперечливості множини диз'юнктів S повинна існувати машинна процедура, яка породжує множини $S_1$, ..., $S_n$, ... основних прикладів диз'юнктів із S і встановлює їх суперечливість.

Одним із перших використав цю ідею Гілмор. Але метод Гілмора виявився неефективним. Більш ефективний метод, що грунтується на цій ідеї був запропонований Девісом і Патнемом. Але в більшості випадків послідовність основних прикладів росте експоненціально. Щоб це побачити, розглянемо **приклад**.

Нехай $S = \{P(x,g(x),y,h(x,y),z,k(x,y,z)), \neg P(u,v,e(v),w,f(v,w),x)\}$.

Так як

$H_0 = \{a\}$,

$H_1 = \{a, g(a), h(a,a), k(a,a,a), e(a), f(a,a)\}$,

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

число елементів в $S_0$, $S_1$, … є 2, 1512, ... відповідно. Перша суперечлива множина – це $S_5$, яка має $10^{256}$ елементів. Таким чином, перевірити цю множину на суперечливість неможливо.

Тому виникла потреба в створенні іншого методу, в якому не потрібно було б породжувати множини основних прикладів диз’юнктів. Такий метод був створений і називається він *методом резолюцій*.

Основна ідея методу полягає в перевірці, чи містить S пустий диз’юнкт ٱ. Якщо S містить пустий диз’юнкт ٱ, то S суперечли-ва. Далі розглянемо метод резолюцій для логіки висловлювань.

## *Метод резолюцій для логіки висловлювань*

Розглянемо наступні диз'юнкти:

$C_1$: P

$C_2$: $\neg P \vee Q$.

**Df**. Якщо A – атом, то говорять, що дві літери A і ¬A контрарні одна одній і множина {A, ¬A} називається контрарною парою.

Відзначимо, що диз'юнкт є тавтологією, якщо він містить контрарну пару.

Викреслюючи контрарну пару із $C_1$ і $C_2$ одержимо дизюнкт:

$C_3$: Q.

Узагальнюючи це правило, одержимо наступне правило – *правило резолюцій*.

Для будь-яких двох диз'юнктів $C_1$ і $C_2$, якщо існує літера $L_1$ в $C_1$, яка контрарна літері $L_2$ в $C_2$, то викреслюючи $L_1$ і $L_2$ з $C_1$ і $C_2$ відповідно, утворимо диз'юнкцію диз'юнктів, що залишились. Одержаний диз'юнкт є резольвентою $C_1$ і $C_2$.

**Приклад**. Розглянемо наступні дизюнкти:

$C_1$: $P \vee Q$,

$C_2$: $\neg P \vee Q$.

Диз'юнкт $C_1$ містить літеру P, контрарну літері $\neg P$ в $C_2$. Отже, викреслюючи P і $\neg P$ із $C_1$ і $C_2$ відповідно і утворюючи диз'юнкцію решти диз'юнктів R і Q, одержимо резольвенту $R \vee Q$.

**Приклад**. Розглянемо диз'юнкти

$C_1$: $\neg P \vee Q \vee R$,

$C_2$: $\neg Q \vee S$.

Резольвента $C_1$ і $C_2$ є $\neg P \vee R \vee S$.

**Приклад**. Розглянемо диз'юнкти

$C_1$: $\neg P \vee Q$,

$C_2$: $\neg P \vee R$.

Так як не існує контрарної пари для цих диз'юнктів, то не існує резольвенти $C_1$ і $C_2$.

Важливою властивістю резольвенти є те, що

**Теорема**. Резольвента C диз'юнктів $C_1$ і $C_2$ є логічним наслідком $C_1$ і $C_2$.

**Доведення**. Нехай $C_1$, $C_2$ і C є наступними формулами: $C_1 = L \vee C'_1$, $C_2 = \neg L \vee C'_2$ і $C = C'_1 \vee C'_2$, де $C'_1$ і $C'_2$ диз'юнкції літер.

Припустимо, що $C_1$ і $C_2$ істинні в інтерпретації I. Покажемо, що тоді резольвента C також істинна в I.

Припустимо спочатку, що L – фальшива в I. Тоді $C'_1$ повинен бути істинним в I. Отже, резольвента C, тобто $C'_1 \vee C'_2$ є істинним в I. Аналогічно можна показати, що якщо $\neg L$ фальшиве в I, то $C'_2$ повинен бути істинним в I. Отже, резольвента C є істинною в I.

*Зауваження*. Якщо ми маємо два одиничних диз'юнкта, то їх резольвента, якщо вона існує є пустим диз'юнктом أ. Більш суттєво те, що для суперечливої множини диз'юнктів можна породити пустий диз'юнкт.

**Df**. Нехай S – множина диз’юнктів. *Резолютивне виведення* C із S є така скінченна послідовність $C_1$, …, $C_k$ диз’юнктів, що кожний $C_i$ або належить S або є резольвентою диз’юнктів, попередніх $C_i$ і $C_k$=C. Виведення أ із S називається спростуванням S.

**Приклад**. Нехай S = {(1)$\neg P \vee Q$, (2) $\neg Q$, (3) P}. Із (1) і (2) одержимо резольвенту (4) $\neg P$ . Із (4) і (3) одержимо резольвенту أ. Отже, أ – логічний наслідок S.

Далі множину диз’юнктів будемо записувати в стовпчик.

**Приклад**. Для множини

(1) $P \vee Q$,

(2) $\neg P \vee Q$,

(3) $P \vee \neg Q$,

(4) $\neg P \vee \neg Q$

можна побудувати наступні резольвенти:

(5) $Q$ із (1), (2),

(6) $\neg Q$ із (3), (4),

(7) أ із (5), (6).

Отже, أ – логічний наслідок S.

Далі ми сформулюємо правило резолюцій для логіки першого порядку. Також доведемо повноту методу резолюцій з тим, щоб показати, що множина S диз’юнктів суперечлива тоді і тільки тоді, коли існує виведення пустого диз’юнкта із S.

## *Підстановка і уніфікація*

Для застосування правила резолюцій суттєвим є наявність контрарних літер в різних диз’юнктах. Для диз’юнктів, що не містять змінних (логіка висловлювань), це дуже просто. Однак, для диз’юнктів із змінними, це ускладнюється. Наприклад, розглянемо диз’юнкти

$$C_1: P(x) \vee Q(x),$$

$$C_2: \neg P(f(x)) \vee R(x).$$

Не існує ніякої літери в $C_1$, контрарної літері в $C_2$. Однак, якщо ми підставимо f(a) замість x в $C_1$ і a замість x в $C_2$, то одержимо

$$C_1': P(f(a)) \vee Q(f(a)),$$

$$C_2': \neg P(f(a)) \vee R(a).$$

Тут $C_1'$ і $C_2'$ є основними прикладами $C_1$ і $C_2$ відповідно, а P(f(a)) і ¬P(f(a)) утворюють контрарну пару. Отже, з $C_1'$ і $C_2'$ можемо одержати резольвенту

$$C_3': Q(f(a)) \vee R(a).$$

В загальному випадку, якщо підставити f(x) замість x в $C_1$, то одержимо

$$C_1^*: P(f(x)) \vee Q(f(x)).$$

Цей диз'юнкт є прикладом $C_1$. В той же час літера P(f(x)) в $C_1^*$ контрарна літері ¬P(f(x)) в $C_2$. Отже, ми можемо одержати резольвенту із $C_1^*$ і $C_2$:

$$C_3: Q(f(x)) \vee R(x).$$

Цей диз'юнкт є найбільш загальним диз'юн-ктом в тому розумінні, що всі резольвенти $C_1$ і $C_2$ – це основні приклади $C_3$.

Диз’юнкт $C_3$ теж будемо називати резольвентою $C_1$ і $C_2$.

Одержання резольвенти потребує підстановки замість змінних. Тому

**Df**. *Підстановка* – це скінченна множина виду $\{t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n\}$, де кожна $v_i$ – змінна, $t_i$ – терм, відмінний від $v_i$, всі $v_i$ – різні. Якщо $t_1$, …, $t_n$ – основні приклади, то підстановка називається *основною*. Підстановка, яка не містить елементів, називається *пустою* і позначається ε.

**Приклад**. Наступні дві множини є підстановками:

$$\{f(z)/x,\ y/z\},\ \{a/x,\ g(y)/y,\ f(g(b))/z\}.$$

**Df**. Нехай $\theta = \{t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n\}$ – підстановка і E – вираз. Тоді $E\theta$ - вираз, одержаний з E заміною одночасно всіх входжень змінної $v_i$ $(1 \le i \le n)$ в E на терм $t_i$. $E\theta$ називається *прикладом* E.

**Приклад**. Нехай $\theta = \{a/x, f(b)/y, c/z\}$ і $E = P(x,y,z)$. Тоді $E\theta = P(a, f(b), c)$.

**Df**. Нехай $\theta = \{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$ і $\lambda = \{u_1/y_1, \ldots, u_m/y_m\}$ – дві підстановки. Тоді *композиція* $\theta$ і $\lambda$ є підстановка (позначається $\theta \circ \lambda$), яка одержується із множини

$$\{t_1\lambda/x_1, \ldots, t_n\lambda/x_n, u_1/y_1, \ldots, u_m/y_m\}$$

викреслюванням всіх елементів $t_j\lambda/x_j$, для яких $t_j\lambda = x_j$, і всіх елементів $u_i/y_i$ таких, що $y_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$.

**Приклад**. Нехай $\theta = \{t_1/x_1, t_2/x_2\} = \{f(y)/x, z/y\}$, $\lambda = \{u_1/y_1, u_2/y_2, u_3/y_3\} = \{a/x, b/y, y/z\}$. Тоді

$$\{t_1\lambda/x_1, t_2\lambda/x_2, u_1/y_1, u_2/y_2, u_3/y_3\} = \{f(b)/x, y/y, a/x, b/y, y/z\}.$$

Але $t_2\lambda/x_2 = x_2$, тому $t_2\lambda/x_2 = y/y$ повинно бути викреслене з множини. Крім того, викреслюємо $a/x$ і $b/y$ так як $y_1$ і $y_2$ належать множині $\{x_1, x_2\}$. В результаті одержимо

$$\theta\circ\lambda = \{f(b)/x, y/z\}.$$

Зазначимо, що композиція підстановок асоціативна, тобто $(\theta\circ\lambda)\circ\mu = \theta\circ(\lambda\circ\mu)$ і $\varepsilon\circ\theta = \theta\circ\varepsilon$ для всіх $\theta$, $\lambda$, $\mu$.

В процедурі доведення за методом резолюцій для знаходження контрарних пар літер, ми повинні будемо вміти уніфікувати два або більше виразів, тобто знаходити підстановку уніфікації.

**Df**. Підстановка $\theta$ називається *уніфікатором* для множини $\{E_1, \ldots, E_k\} \Leftrightarrow E_1\theta = \ldots = E_k\theta$.

**Df**. Множина $\{E_1, \ldots, E_k\}$ *уніфікується*, якщо для неї існує уніфікатор.

**Df**. Уніфікатор σ для множини $\{E_1, \ldots, E_k\}$ називається *найбільш загальним* уніфікатором ⇔ для кожного уніфікатора θ цієї множини існує підстановка λ така, що $\theta=\sigma\circ\lambda$.

**Приклад**. Множина {P(a,y), P(x, f(b))} уніфікується, так як підстановка θ = {a/x, f(b)/y} є уніфікатором цієї множини.

## *Алгоритм уніфікації*

Далі буде приведений алгоритм для знаходження найбільш загального уніфікатора для скінченної множини виразів, що уніфікується. Якщо множина не уніфікується, алгоритм буде видавати цей факт.

Розглянемо два не тотожні вирази P(a) і P(x). Щоб їх ототожнити, необхідно спочатку знайти неузгодженість, а потім спробувати її вилучити.

Для P(a) і P(x) неузгодженість – це множина {a, x}. Замінивши x на a ми позбудемося неузгодженості. В цьому полягає ідея алгоритму уніфікації.

**Df**. *Множина неузгодженостей* непустої множини виразів W одержується знаходженням першої (зліва) позиції, на якій не для всіх виразів з W стоїть один і той же символ з наступним виписуванням із кожного виразу в W підвиразу, який починається символом, що займає цю позицію.

**Приклад**. Якщо W = {P(x, f(y,z)), P(x,a), P(x, g(h(k(x))))}, то перша позиція, в якій не всі вирази мають однаковий символ – п'ята. (Всі вирази мають однакові перші чотири символи P(x,).

Таким чином, множина неузгодженостей складається з відповідних підвиразів, які починаються з п'ятої позиції і це є множина {f(y,z), a, g(h(k(x)))}.

*Алгоритм уніфікації*

*Крок* 1. $k = 0$, $W_k = W$, $\sigma_k = \varepsilon$.

*Крок* 2. Якщо $W_k$ – одиничний диз'юнкт, то зупинка: $\sigma_k$ - найбільш загальний уніфікатор для W. В іншому випадку знаходимо множину $D_k$ неузгодженостей для $W_k$.

*Крок* 3. Якщо існують такі елементи $v_k$ і $t_k$ в $D_k$, що $v_k$ змінна, яка не входить в $t_k$, то перейти на крок 4. В іншому випадку зупинка: W не уніфікується.

*Крок* 4. Нехай $\sigma_{k+1} = \sigma_k\{t_k/v_k\}$ і $W_{k+1} = W_k\{t_k/v_k\}$. (Зазначимо, що $W_{k+1} = W\sigma_{k+1}$).

*Крок* 5. Присвоїти значення k=k+1 і перейти на крок 2.

**Приклад**. Знайти найбільш загальний уніфікатор для

$$W = \{P(a, x, f(g(y))), P(z, f(z), f(u))\}.$$

1. $\sigma_0=\varepsilon$ і $W_0=W$. Так як $W_0$ – не одиничний диз'юнкт, то $\sigma_0$ не є найбільш загальним уніфікатором для W.

2. Множина неузгодженостей $D_0 = \{a, z\}$. В $D_0$ існує змінна $v_0 = z$, яка не зустрічається в $t_0 = a$.

3. Нехай $\sigma_1 = \sigma_{0\circ}\{t_0/v_0\} = \varepsilon_\circ\{a/z\} = \{a/z\}$,

$W_1 = W_0\ \{t_0/v_0\} = \{P(a, x, f(g(y))), P(z, f(z), f(u))\}\ \{a/z\} = \{P(a, x, f(g(y))), P(a, f(a), f(u))\}$.

4. $W_1$ – не одиничний дизюнкт. Множина неузгодженостей $D_1$ для $W_1$: $D_1 = \{x, f(a)\}$.

5. Із $D_1$ знаходимо, що $v_1 = x$, $t_1 = f(a)$.

6. Нехай $\sigma_2 = \sigma_1 \circ \{t_1/v_1\} = \{a/z\} \circ \{f(a)/x\} = \{a/z, f(a)/x\}$,

$W_2 = W_1 \{t_1/v_1\} = \{P(a, x, f(g(y))), P(a, f(a), f(u))\} \{f(a)/x\} = \{P(a, f(a), f(g(y))), P(a, f(a), f(u))\}$.

7. $W_2$ – не одиничний дизюнкт. Множина неузгодженостей $D_2$ для $W_2$: $D_2 = \{g(y), u\}$. Із $D_2$ знаходимо, що $v_2 = u$, $t_2 = g(y)$.

8. Нехай $\sigma_3 = \sigma_2 \circ \{t_2/v_2\} = \{a/z, f(a)/x\} \circ \{g(y)/u\} = \{a/z, f(a)/x, g(y)/u\}$,

$W_3 = W_2\ \{t_2/v_2\} = \{P(a, f(a), f(g(y))), P(a, f(a), f(u))\}\ \{g(y)/u\} = \{P(a, f(a), f(g(y))), P(a, f(a), f(g(y)))\} = \{P(a, f(a), f(g(y)))\}$.

9. Так як $W_3$ – одиничний дизюнкт, то $\sigma_3 = \{a/z, f(a)/x, g(y)/u\}$ є найбільш загальним уніфікатором для W.

**Приклад**. Знайти найбільш загальний уніфікатор для

$$W = \{Q(f(a), g(x)), Q(y,y)\}.$$

1. $\sigma_0 = \varepsilon$ і $W_0 = W$.

2. $W_0$ – не одиничний диз'юнкт. Множина неузгодженостей $D_0 = \{f(a), y\}$. В $D_0$ існує змінна $v_0 = y$, яка не зустрічається в $t_0 = f(a)$.

3. Нехай $\sigma_1 = \sigma_0 \circ \{t_0/v_0\} = \varepsilon \circ \{f(a)/y\} = \{f(a)/y\}$,

$W_1 = W_0\{t_0/v_0\} = \{Q(f(a), g(x)), Q(y,y)\}\{f(a)/y\} = \{Q(f(a), g(x)), Q(f(a), f(a))\}$.

4. $W_1$ – не одиничний дизюнкт. Множина неузгодженостей $D_1$ для $W_1$: $D_1 = \{g(x), f(a)\}$.

5. Нема елемента, який був-би змінною. Отже, множина не уніфікується і алгоритм закінчує роботу.

Зазначимо, що алгоритм уніфікації завжди завершує роботу для будь-якої непустої множини виразів. Інакше утворилася б нескінченна послідовність $W\sigma_0, W\sigma_1, W\sigma_2$, … непустих множин, в якій кожна наступна множина містить на одну змінну менше попередньої.

**Теорема (**унiфiкацiї). Якщо W – скiнчен-на непуста множина виразiв, яка унiфiкується, то алгоритм унiфiкацiї завжди буде закiнчувати роботу на кроцi 2 і остання $\sigma_k$ буде найбiльш загальним унiфiкатором для W.

## *Метод резолюцій для логіки першого порядку*

Ввівши алгоритм уніфікації, можна розглянути метод резолюцій для логіки предикатів.

**Df**. Якщо дві або більше літер (з однаковим знаком) диз’юнкту C мають найбільш загальний уніфікатор σ, то Cσ називається *склейкою* C. Якщо Cσ - одиничний диз’юнкт, то *склейка* називається *одиничною*.

**Приклад**. Нехай $C=P(x) \vee P(f(y)) \vee \neg Q(x)$. Тоді перша і друга літери мають найбільш загальний уніфікатор $\sigma = \{f(y)/x\}$. Отже, $C\sigma = P(f(y)) \vee \neg Q(x)$ є склейкою C.

Нехай $C_1$ і $C_2$ – два диз'юнкта, які не мають однакових змінних.

**Df**. Нехай $L_1$ і $L_2$ – дві літери в $C_1$ і $C_2$ відповідно. Якщо $L_1$ і $\neg L_2$ мають найбільш загальний уніфікатор σ, то диз'юнкт $(C_1\sigma - L_1\sigma) \cup C_2\sigma - L_2\sigma)$ називається *бінарною резольвентою* $C_1$ і $C_2$.

**Приклад**. Нехай $C_1 = P(x) \vee Q(x)$ і $C_2 = \neg P(a) \vee R(x)$. Так як x входить в $C_1$ і $C_2$, то замінюємо змінну в $C_2$, тобто нехай $C_2 = \neg P(a) \vee R(y)$. Вибираємо $L_1 = P(x)$ і $L_2 = \neg P(a)$. Так як $\neg L_2 = P(a)$, то $L_1$ і $\neg L_2$ мають найбільш загальний уніфікатор $\sigma = \{a/x\}$. Отже, $(C_1\sigma - L_1\sigma) \cup C_2\sigma - L_2\sigma) = (\{P(a), Q(a)\} - \{P(a)\}) \cup (\{\neg P(a), R(y)\} - \{\neg P(a)\}) = \{Q(a)\} \cup \{R(y)\} = \{Q(a), R(y)\} = Q(a) \vee R(y)$. Таким чином, $Q(a) \vee R(y)$ – бінарна резольвента $C_1$ і $C_2$.

**Df**. *Резольвентою* диз'юнктів $C_1$ і $C_2$ є одна із наступних резольвент:

1. Бінарна резольвента $C_1$ і $C_2$.
2. Бінарна резольвента $C_1$ і склейки $C_2$.
3. Бінарна резольвента $C_2$ і склейки $C_1$.
4. Бінарна резольвента склейки $C_1$ і склейки $C_2$.

**Приклад**. Нехай $C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y))$ і $C_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(b)$. Склейка $C_1$ є $C'_1 = P(f(y)) \vee R(g(y))$. Бинарная резольвента $C'_1$ і $C_2$ є $R(g(g(a))) \vee Q(b)$, отже резольвента $C'_1$ і $C_2$

Отже, правило резолюцій є правило виведення, яке породжує резольвенти для множини диз'юнктів. Воно більш ефективне, ніж попередні процедури доведення. Крім того, метод резолюцій *повний*, тобто при допомозі цього методу для будь-якої суперечливої множини диз'юнктів можна вивести пустий диз'юнкт.

**Приклад**. Показати, що внутрішні різносторонні кути, утворені діагоналлю трапеції, рівні.

Аксіоматизуємо це твердження. Нехай T(x,y,u,v) означає, що x,y,u,v – трапеція з верхньою лівою вершиною x, верхньою правою вершиною y, нижньою правою вершиною u і нижньою лівою вершиною v. Нехай P(x,y,u,v) означає, що відрізок xy паралельний відрізку uv, і нехай E(x,y,z,u,v,w) означає, що кут xyz дорівнює куту uvw.

Тоді будемо мати наступні аксіоми:

А1. $(\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v)(T(x,y,u,v) \to P(x,y,u,v))$ (визначення трапеції),

А2. $(\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v)(P(x,y,u,v) \to E(x,y,v,u,v,y))$ (внутрішні різносторонні кути для паралельних прямих рівні),

А3. $T(a,b,c,d)$ (задана трапеція).

Із цих аксіом ми повинні вивести, що твердження $E(a,b,d,c,d,b)$ істинне, тобто

$$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \to E(a,b,d,c,d,b)$$

є істинною формулою.

Отже, треба показати, що

$$\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \rightarrow E(a,b,d,c,d,b))$$

є суперечливою.

Для цього перетворимо цю формулу до стандартного вигляду. Множина дизюнктів

$S = \{\neg T(x,y,u,v) \vee P(x,y,u,v), \neg P(x,y,u,v) \vee E(x,y,v,u,v,y), T(a,b,c,d), \neg E(a,b,d,c,d,b)\}.$

Тепер методом резолюцій доведемо, що ця множина суперечлива.

1. $\neg T(x,y,u,v) \vee P(x,y,u,v)$,
2. $\neg P(x,y,u,v) \vee E(x,y,v,u,v,y)$,
3. $T(a,b,c,d)$,
4. $\neg E(a,b,d,c,d,b)$,
5. $\neg P(a,b,c,d)$ (резольвента 2,4),
6. $\neg T(a,b,c,d)$ (резольвента 1,5),
7. $\square$

Так як виводиться пустий диз'юнкт, то S – суперечлива.

**Теорема** (повнота методу резолюцій). Множина S диз’юнктів суперечлива тоді і тільки тоді, коли існує виведення пустого диз’юнкта.

Далі покажемо, як можна ефективно використовувати метод резолюцій для доведення теорем.

**Приклад**. Покажемо, що формула $((P \to S) \wedge (S \to U) \wedge P) \to U$ істинна. Для цього треба показати, що заперечення цієї формули суперечливе.

Таким чином, маємо:

1. $\neg P \vee S$,
2. $\neg S \vee U$,
3. $P$,
4. $\neg U$,
5. $S$ (резольвента 3,1),
6. $U$ (резольвента 5,2),
7. $\square$ (резольвента 6,4).

**Приклад**. Розглянемо формулу

$$((\forall x)(C(x)\rightarrow(W(x)\wedge R(x))) \wedge (\exists x)(C(x) \wedge O(x)) \rightarrow (\exists x)(O(x)\wedge R(x)).$$

Покажемо, що вона істинна. Для цього заперечення цієї формули перетворимо до стандартного вигляду. Одержимо наступні п'ять диз'юнктів:

1. $\neg C(x) \vee W(x)$,
2. $\neg C(x) \vee R(x)$,
3. $C(a)$,
4. $O(a)$,
5. $\neg O(x)\vee\neg R(x)$

Ця множина диз’юнктів суперечлива. Дійсно, за методом резолюцій будемо мати:

6. $R(a)$ (резольвента 3,2),

7. $\neg R(a)$ (резольвента 5,4),

8. □ (резольвента 7,6).

Таким чином, заперечення формули суперечливе.

**Приклад**. Якщо студенти – громадяни, то голоси студентів це голоси громадян.

Якщо $S(x)$, $C(x)$, $V(x,y)$ означають “x-студент”, “x-громадянин”, “x є голос y”, то

Аксіоматизація має вигляд:

$(\forall y)(S(y) \rightarrow C(y)) \rightarrow (\forall x)((\exists y)(S(y) \wedge V(x,y)) \rightarrow (\exists z)(C(z) \wedge V(x,z)))$

Стандартна форма для заперечення твердження є

1. $\neg S(y) \vee C(y)$,
2. $S(b)$,
3. $V(a,b)$,
4. $\neg C(z) \vee \neg V(a,z)$,

Доведення завершується наступним чином:

5. C(b) (резольвента 1,2),
6. ¬V(a,b) (резольвента 5,4),
7. □ (резольвента 6,3).

## *Стратегії методу резолюцій*

Необмежене застосування методу резолюцій може викликати генерацію великої кількості диз’юнктів.

Наприклад, припустимо, що ми хочемо показати методом резолюцій, що множина $S = \{P \vee Q, \neg P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q\}$ суперечлива.

Виконання методу резолюцій для цієї множини полягає в побудові всіх можливих резольвент множини S першого рівня, другого рівня і т. д. Таким чином можна породити дизюнкти:

1. $P \vee Q$,
2. $\neg P \vee Q$,
3. $P \vee \neg Q$,
4. $\neg P \vee \neg Q$,
5. $Q$ (1,2)
6. $P$ (1,3)
7. $Q \vee \neg Q$ (1,4),
8. $P \vee \neg P$ (1,4),
9. $Q \vee \neg Q$ (2,3),
10. $P \vee \neg P$ (2,3).

. . . . . . . . . . . . . . . . . .

Таким чином генерується багато лишніх або однакових дизюнктів.

Насправді для доведення суперечливості достатньо породити лише 3 дизюнкти:

Q, ¬Q, □.

Для розвязання цієї проблеми надлишковості існують різні *стратегії* методу резолюцій.