Российский университет дружбы народов
Институт гостиничного бизнеса и туризма

В. Дихтяр

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Раздел 3. **Введение в теорию вероятностей**

Тема *3-3.* Действия над конечными случайными величинами

Москва 2017

Содержание

Конечная случайная величина

$$\Omega: A = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix} \to X(\omega) = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_\mathrm{n} \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$$

⇒ закон распределения конечной случайной величины

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}, p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

Примеры*

1. (M) $\boldsymbol{X}$: {количество «орлов»} = 0 и 1, $\boldsymbol{p}$ = ½

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2. Постоянная случайная величина

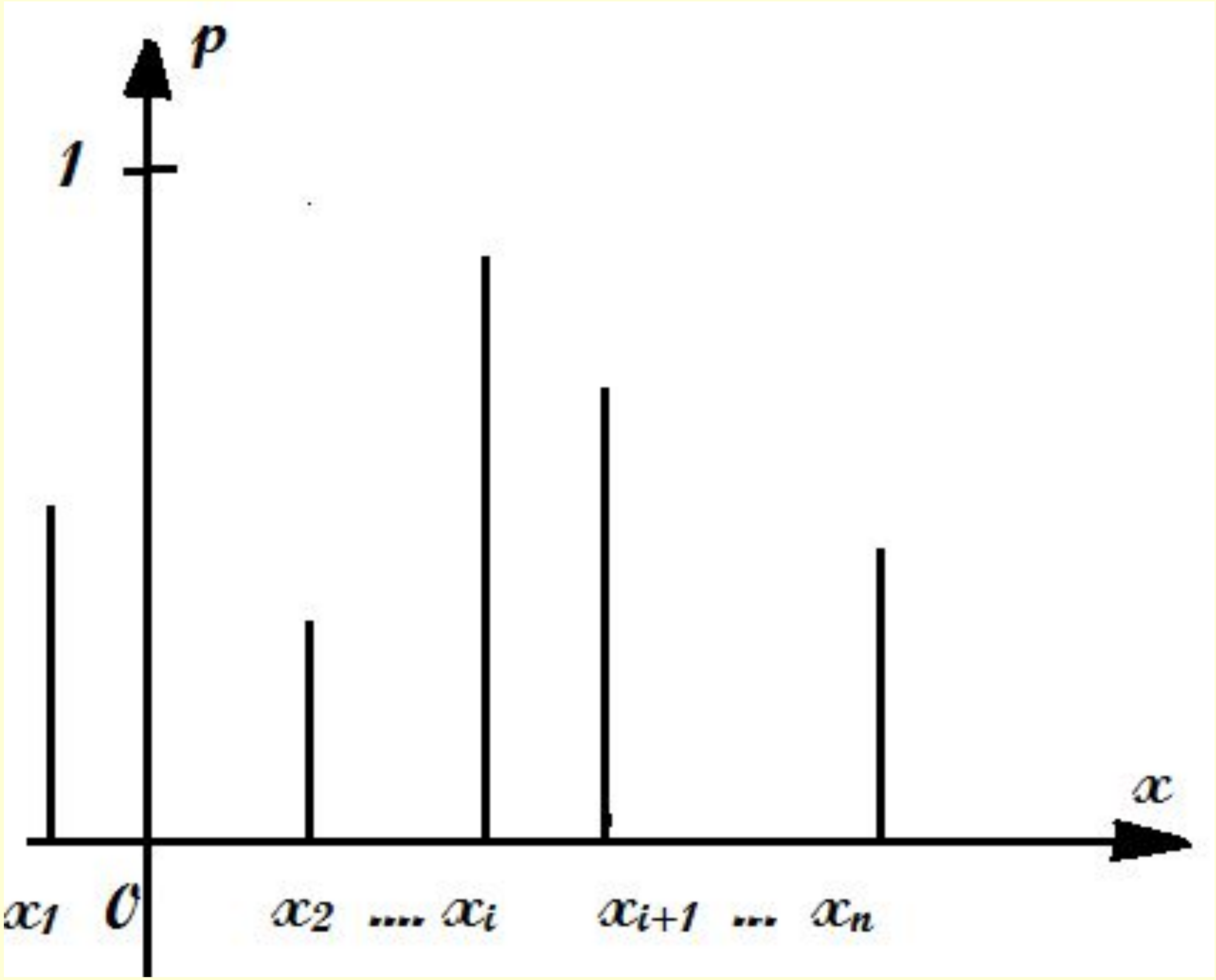
$$c = \begin{pmatrix} \mathrm{c} \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Биноминальная величина

$$B_{n,p} = \begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots. & n-1 & \mathrm{n} \\ q^n & npq^{n-1} & \ldots & C_n^k p^k q^{n-k} & \ldots. & np^{n-1}q & p^n \end{pmatrix}$$

График функции вероятностей конечной случайной величины



1. Совместное распределение X

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_m \\ p_1 & p_2 & \ldots\ldots & p_m \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_n \\ q_1 & q_2 & \ldots\ldots & q_n \end{pmatrix}$$

2. Совместные вероятности

$$p_{ij} = P(X = x_i,\ Y = y_j),$$

$$i = 1,2,\ldots,m;\ \ j = 1,2,\ldots.,n.$$

2. Совместное распределение $(\{x_i, y_j\}; p_{ij})$

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

Таблица совместного распределения

Y / X	y_1	y_2	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_n	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1n}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2j}	$\ldots$	p_{2n}	p_2
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{in}	p_i
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\ldots$	p_{mj}	$\ldots$	p_{mn}	p_m
	q_1	q_2	$\ldots$	q_j	$\ldots$	q_n	1

Таблица совместного распределения X и Y

Y / X	y_1	…	y_j	…	y_n	p	Σ_j
X_1	N_{11}	…	N_{1j}	…	N_{1n}	p_1	$N_{1\bullet}$
$\vdots$						$\vdots$	
X_i	N_{i1}	…	N_{ij}	…	N_{in}	p_i	$N_{i\bullet}$
$\vdots$						$\vdots$	
X_m	N_{m1}	…	N_{mj}	…	N_{mn}	p_m	$N_{m\bullet}$
Σ_i	$N_{\bullet 1}$		$N_{\bullet j}$		$N_{\bullet n}$		N
q	q_1	…	q_j	…	q_n	1	

Совместное распределение

$$\sum \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{ij}\ (j\,=\,1\ldots n)} = \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{i}},\ \sum \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{ij}\ (i\,=\,1\ldots n)} = \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{j}}$$

- Зная совместное распределение X и Y, можно восстановить законы распределения величин X и Y
- Обратное утверждение неверно. Распределения X и *Y* называют маржинальными по отношению к их совместному распределению.

Независимые X

X, Y – независимы $\equiv \{X = x_i\}, \{Y = y_j\}$ независимы, $i=1,2, \ldots, m; j=1, 2, \ldots, n;$

$$\Rightarrow \quad p_{ij} = P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_i q_j$$

Действия над конечными случайными величинами

$$X+Y \Rightarrow X_i+y_j; \; XY \Rightarrow X_i y_j;$$

Свойства:

$(X + Y) + X = X + (Y + Z), \; (XY)z = X(YZ)$

$X + Y = Y + X, \; XY = YX$

$X(Y + Z) = XY + XZ$

Теорема:

- Пусть независимые $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n$ бернуллиевы случайные величины:

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{B_{n,p} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n}$$

Свойства:

1. $Mc = c \Rightarrow Mc = c \bullet 1 = c$ $\quad c = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$

2. X$\geq 0 \Rightarrow$ MX ≥ 0

3. M(cX) = cMX

4. $M(X \pm Y) = \sum_{i,j} (x_i \pm y_j) p_{ij} = M(X) \pm M(Y)$

5. $M(c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_n X_n) = c_1 M X_1 + c_2 M X_2 + \ldots + c_n M X_n$

$\mathcal{MX}$ биномиальной $\mathcal{X}$

$$B_{n,p} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Бернуллиевы величины

где $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad MB_{n,p} = MX_1 + MX_2 + \ldots + MX_n$$

$$MX_i = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$MB_{n,p}$ сумма n одинаковых слагаемых, равных p, т.е.

$$MB_{n,p} = np$$

Пример

U*: {*W*=4, *B*=6}** наугад вынимают шар и возвращают обратно. Опыт повторяют 10 раз = ***W шар. ***X*** — число успешных испытаний.

Биномиальная случайная величина при $\boldsymbol{n} = 10$ и $\boldsymbol{p} = 0{,}4$ (вероятность успеха)

$\Rightarrow \boldsymbol{MX = MB_{10,\ 0,\ 4}} = 10 \cdot 0{,}4 = 4$

Свойство 5

$$M(X - MX) = MX - M(MX) = MX - MX = 0$$

Центрированная $Y = X - MX$, при $MY = 0$

Свойство 6

$$M(X \bullet Y) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij}$$

Для независимых случайных величин $p_{ij} = p_i q_j$

$$M(X \bullet Y) = \sum_{i,j} x_i y_j p_i q_j = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i p_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j q_j\right) = MX \bullet MY$$

Дисперсия

$$DX = M(X - MX)^2.$$

Случайная величина $(X - MX)^2$ распределена по закону

$$\begin{pmatrix} (x_i - MX)^2 \\ p_i \end{pmatrix},$$

$$DX = \sum_{i=1}^{n} (x_i - MX)^2 p_i = \left| X_i - MX \right|_{P_0}^2$$

Среднеквадратичное отклонение

$\boldsymbol{\sigma^2(x)}$ ∨ $\boldsymbol{\sigma x^2}$

∨ стандартное отклонение X

$$\sigma_x = \sqrt{DX}$$

Свойства:

- $\boldsymbol{DX \geq 0}$
- $\boldsymbol{D(cX) = c^2 DX}$
- $\boldsymbol{D(X + c) = DX}$; $\boldsymbol{D(aX + b) = a^2 DX}$
- $\boldsymbol{D(X + Y) = DX + DY}$ (X и Y независимы)
- $\boldsymbol{DX = MX^2 - (MX)^2}$

Пример с $\mathcal{U}$…

U: B=3, W=2. Из U наугад вынимают 2 шара. X — число W среди вынутых. закон распределения X

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{MX} = 0 \bullet 0{,}3 + 1 \bullet 0{,}6 + 2 \bullet 0{,}1 = 0{,}8$

$\boldsymbol{DX} = (0 - 0{,}8)^2 \cdot 0{,}3 + (1 - 0{,}8)^2 \cdot 0{,}6 + (2 - 0{,}8)^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}64$

$\cdot 0{,}3 + 0{,}04 \cdot 0{,}6 + 1{,}44 \cdot 0{,}1 = 0{,}36$

по формуле **5** X^2 имеет распределение $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

и $\boldsymbol{MX^2 = 1}$

$\Rightarrow \boldsymbol{DX} = 1 - 0{,}8^2 = 0{,}36$

$\mathcal{DB}_{n,p}$

$$X_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, i = 1,2,\ldots,n.$$

$$Db_{n,p} = DX_1 + DX_2 + \ldots + DX_n$$

$$\wedge\ X^2 = X \text{ u } MX = MX^2 = p$$

$$\Rightarrow DX_i = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

$$DB_{n,p} = npq$$

Стандартизация X

не меняет *дисперсии*

$$D\overset{\circ}{X} = M(X - MX - 0)^2 = DX.$$

Случайная величина

$$X^* = \frac{\overset{\circ}{X}}{\sqrt{DX}} = \frac{X - MX}{\sqrt{DX}}$$

называется стандартизованной (по отношению к X) или просто стандартизацией ***X***

$$MX^* = \frac{1}{\sqrt{DX}} M(X - MX) = 0,$$

$$DX^* = \frac{1}{DX} D(X - MX) = \frac{1}{DX} DX = 1.$$

Ковариация X и Y

$$cov(X,Y) = M(\mathring{X}\mathring{Y}) = M[(X - MX)(Y - MY)].$$

Свойства:

1. $Cov(X, Y) = M(X \cdot Y) - MX \cdot MY$
2. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
3. $cov(X, X) = DX$
4. $D(X + Y) = DX + DY + 2cov(X, Y)$
5. $cov(X, Y) = 0$, для независимых (X, Y)

$$\operatorname{cov}(X,Y) = M\mathring{X}\,M\mathring{Y} = 0$$

Коэффициент корреляции между случайными величинами:

$$r_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Свойства

1. $r_{X,Y} = M(X^*Y^*)$
2. $r_{X,Y} = r_{X^*,Y^*}$ т.к. $MX^* = MY^* = 0,\ DX^* = DY^* = 1$

$$r_{X^*,Y^*} = \frac{M[(X^* - MX^*)(Y^* - MY^*)]}{\sqrt{DX^*}\sqrt{DY^*}} = M(X^*Y^*) = r_{X,Y}.$$

3. $|\, r_{X,Y} \,| \le 1$
4. X *и* Y *независимы* $\Rightarrow r_{X\,Y} = 0$
5. коэффициент корреляции равен $\pm 1 \equiv$ случайные величины линейно зависимы $|\, r_{X,Y} \,| = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$