Признаки делимости

Лекция 6

курс 2

Задача

- Найдите сумму остатков, получившихся при делении числа

  x= 5.143.628.457.913.427

  на 2,3,4,5,9,25.
- 5квадриллионов 143 триллиона 628 миллиардов 457 миллионов 913 тысяч 427

- Для решения этой задачи необходимо знать признаки делимости на 2, на 3, на 4, на 5, на 9, на 25

Теорема: Признак делимости на 2

- Для того чтобы число x делилось на 2 необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась одной из цифр 0,2,4,6,8.

- A: десятичная запись числа x оканчивается одной из цифр 0,2,4,6,8.
- B:число x делится на 2.

$$A \Leftrightarrow B$$

Теорема разбивается на 2 части

1. $A \Rightarrow B$ достаточное условие
2. $B \to A$ необходимое условие

- 1. Докажем достаточное условие:
- Если десятичная запись числа x оканчивается одной из цифр 0,2,4,6,8, то число x делится на 2.

Доказательство :

- 1. Пусть натуральное число

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

и a_0 принимает значение 0,2,4,6,8.

Так как $10 \vdots 2,\ \text{то}\ 10^i \vdots 2,\quad i = 1,2,3,\ldots,n$

$$\text{Значит},\ (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 10) \vdots 2$$

По условию a_0 тоже делится на 2.

- Значит число х можно рассматривать как сумму двух слагаемых, каждое из которых делится на 2:

$$x = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + ... + a_1 \cdot 10) + a_0$$

Согласно признаку делимости суммы,

число х делится на 2

- 2. Докажем необходимое условие:

- Если натуральное число x делится на 2, то десятичная запись числа x оканчивается одной из цифр 0,2,4,6,8.

- Пусть натуральное число

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Преобразуем это равенство

$$a_0 = x - (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + ... + a_1 \cdot 10)$$

$$x \vdots 2 \;\; и \;\; (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + ... + a_1 \cdot 10) \vdots 2$$

По теореме о делимости разности : $a_0 \vdots 2.$

Значит a_0 оканчивается цифрой 0,2,4,6,8.

Что и требовалось доказать.

Следствие

- Если натуральное число x не делится на 2, то остаток от деления этого числа на 2 равен остатку от деления последней цифры на 2.

Значит число $x = 5.143.628.457.913.427$

на 2 не делится,

но остаток от деления x на 2 равен остатку от деления последней цифры этого числа на 2;

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

Значит остаток от деления числа x на 2 равен 1.

Теорема: признак делимости на 5

- Для того чтобы натуральное число x делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 0 или 5.

- Доказать самостоятельно

Следствие

- Если натуральное число x не делится на 5, то остаток от деления этого числа на 5 равен остатку от деления последней цифры на 5

Следовательно, число

$$x = 5.143.628.457.913.427$$

на 5 не делится,

но остаток от деления x на 5 равен остатку от деления последней цифры этого числа на 5;

$$7 = 5 \cdot 1 + 2$$

Значит остаток от деления числа x на 5 равен 2.

Теорема: признак делимости на 4

- Для того чтобы натуральное число x делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы на 4 делилось двузначное число, образованное двумя последними цифрами десятичной записи числа x.

- A: двузначное число, образованное последними двумя цифрами десятичной записи числа x,

  делится на 4
- B:число x делится на 4.

$$A \Leftrightarrow B$$

Теорема разбивается на 2 части

1. $A \Rightarrow B$ достаточное условие
2. $B \rightarrow A$ необходимое условие

- 1. Докажем достаточное условие:
- Если двузначное число, образованное двумя последними цифрами десятичной записи числа x делится на 4, то натуральное число x делится на 4.

- Пусть натуральное число

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

и $\overline{a_1 a_0} \vdots 4$ Так как 100:4, 1000:4,…,то сумма

$$(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 10^2) \vdots 4$$

Представим число х в виде суммы двух слагаемых, кратных 4:

$$x = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 10^2) + (a_1 \cdot 10 + a_0)$$

Согласно признаку делимости суммы, число х кратно 4.

- 2. Докажем необходимое условие:
- Если число x делится на 4, то число, образованное двумя последними цифрами десятичной записи числа x, делится на 4.

- Пусть натуральное число

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Преобразуем это равенство

$$a_1 \cdot 10 + a_0 = x - (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 10^2)$$

$$x \vdots 4 \;\; и \;\; (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^2) \vdots 4$$

По теореме о делимости разности : $(a_1 \cdot 10 + a_0) \vdots 4$

Что и требовалось доказать.

Следствие

- Если число x не делится на 4, то остаток от деления этого числа на 4 равен остатку от деления числа, составленного из двух последних цифр, на 4.

Тогда число $x = 5.143.628.457.913.427$

на 4 не делится.

Остаток от деления x на 4 равен остатку от деления числа 27на 4.

$$27 = 4 \cdot 6 + 3$$

Значит остаток от деления числа x на 4 равен 3.

Теорема: признак делимости на 25

- Для того чтобы число x делилось на 25, необходимо и достаточно, чтобы на 25 делилось двузначное число, образованное двумя последними цифрами десятичной записи числа x.

- Доказать самостоятельно

Следствие

- Если число x не делится на 25, то остаток от деления этого числа на 25 равен остатку от деления числа, составленного из двух последних цифр, на 25.

Число $x = 5.143.628.457.913.427$

и на 25 не делится.

Остаток от деления x на 25 равен остатку от деления числа 27на 25.

$$27 = 25 \cdot 1 + 2$$

Значит остаток от деления числа x на 25 равен 2

Теорема: признак делимости на 9

- Для того чтобы число x делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 9.

- А: Сумма цифр его десятичной записи делится на 9
- В: число х кратно 9.

- Теорема разбивается на 2 части:
- 1. достаточное условие $A \Rightarrow B$

- 2. необходимое условие $B \to A$

Лемма:
вспомогательная теорема

- Число вида $\left(10^n - 1\right) \vdots 9$

Например, 1000 -1 =

$$10^3 - 1 = 1000 - 1 = 999 = 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 9$$

- Доказательство:
- Преобразуем число x = $\left(10^{n}-1\right)$

$$x=10^{n}-1=\left(9\cdot 10^{n-1}+10^{n-1}\right)-1=$$

$$=\left(9\cdot 10^{n-1}+9\cdot 10^{n-2}+10^{n-2}\right)-1=\ldots$$

$$=\left(9\cdot 10^{n-1}+9\cdot 10^{n-2}+\ldots+10\right)-1=$$

$$=9\cdot 10^{n-1}+9\cdot 10^{n-2}+\ldots+9$$

По теореме о делимости суммы делаем вывод, что число x кратно 9.

Доказательство:
(достаточное условие)

- Дано:

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots +$$

$$+ a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \quad \textit{и}$$

$$(a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_0) \vdots 9$$

- Доказать, что x кратно 9

- Для доказательства вычтем из числа x, а затем прибавим к нему сумму

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_0$$

- Получим:

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots +$$

$$+ a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 -$$

$$-(a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_0) +$$

$$+(a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_0) =$$

Применив правила вычитания, имеем:

$$= \left(a_n \cdot 10^n - a_n\right) + \left(a_{n-1} \cdot 10^{n-1} - a_{n-1}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(a_1 \cdot 10 - a_1\right) + \left(a_0 - a_0\right) +$$

$$+ \left(a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_0\right)$$

- Используя дистрибутивность умножения относительно вычитания, имеем:

$$x = a_n\left(10^n - 1\right) + a_{n-1}\left(10^{n-1} - 1\right) + \ldots + a_1\left(10 - 1\right) +$$
$$+ (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0)$$

На основании теоремы о делимости суммы можно сделать вывод: число x кратно 9

Необходимое условие

- Дано: $x \,\vdots\, 9$
- Доказать, что $(a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_0) \,\vdots\, 9$

Доказательство:

- Из равенства

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots +$$

$$+ a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

выделим сумму $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_0$

- После преобразований получим:

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_0 =$$

$$= x - \left[a_n\left(10^n - 1\right) + a_{n-1}\left(10^{n-1} - 1\right) + ... + a_1(10 - 1)\right]$$

Так как уменьшаемое и вычитаемое кратно 9, следовательно и разность будет кратна 9.

Что и требовалось доказать.

Проверим делится ли число x = 5.143.628.457.913.427 на 9.

5+1+4+3+6+2+8+4+5+7+9+1+3+4+2+7=71,

но $\overline{71:9}$

Остаток от деления x на 9 равен остатку от деления числа 71на 9.

$$71 = 9 \cdot 7 + 8$$

Значит остаток от деления числа x на 9 равен 8.

Теорема: признак делимости на 3

- Для того чтобы число x делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 3.
- Доказать самостоятельно

Проверим делится ли число х = 5.143.628.457.913.427 на 3.

5+1+4+3+6+2+8+4+5+7+9+1+3+4+2+7=71,

но $\overline{71:3}$

Остаток от деления х на 3 равен остатку от деления числа 71на 3.

$$71 = 3 \cdot 23 + 2$$

Значит остаток от деления числа х на 3 равен 2.

- Ответ:
- Остаток от деления числа
  X=5143628457913427
- На 2 равен 1
- На 3 равен 2
- На 4 равен 3
- На 5 равен 2
- На 9 равен 8
- На 25равен 2.
- Сумма остатков равна 1+2+3+2+8+2= 18.

Задание:

- Сформулируйте признак делимости

на 8 и 125; 16 и 225.

Спасибо за внимание