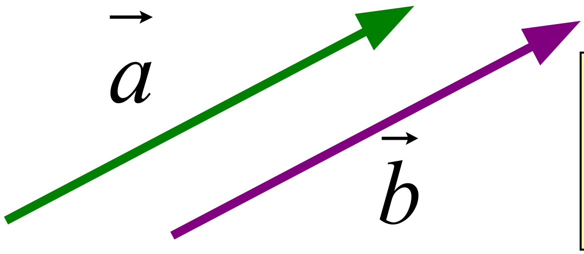
Угол между векторами. Скалярное произведение векторов

Повторение:

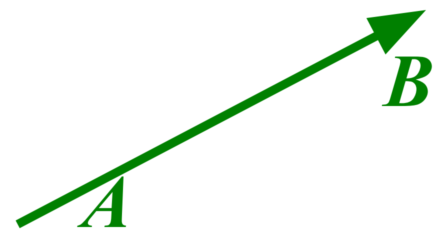
- ***Какие векторы называются равными?***



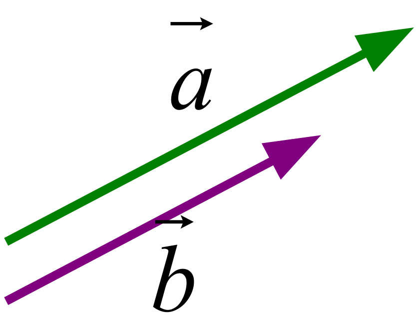
$$\vec{a} = \vec{b},\ \text{если}\quad \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|;\ \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

- ***Как найти длину вектора по координатам его начала и конца?***

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$$



- ***Какие векторы называются коллинеарными?***



$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \quad \textbf{\textit{или}} \quad \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$$

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} \qquad \begin{cases} x_1 = \lambda \cdot x_2 \\ y_1 = \lambda \cdot y_2 \\ z_1 = \lambda \cdot z_2 \end{cases}$$

Повторение. (Устно)

Векторы в пространстве.

1) Дано: $A(-3;-2;4)$ $B(-4;3;2)$

Найти: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

$\sqrt{30}$

2) Дано: $A(2;-3;1)$ $B(4;-5;0)$ $C(5;0;-4)$ $D(7;-2;-3)$

Равны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ **и** $\overrightarrow{CD}$ **?**

$\overrightarrow{AB}\{2;-2;-1\}$ $\overrightarrow{CD}\{2;-2;1\}$

3) Дано:

$A(1;-3;4)$

$B(9;1;-2)$

$C(2;0;1)$

$D(4;-2;2)$

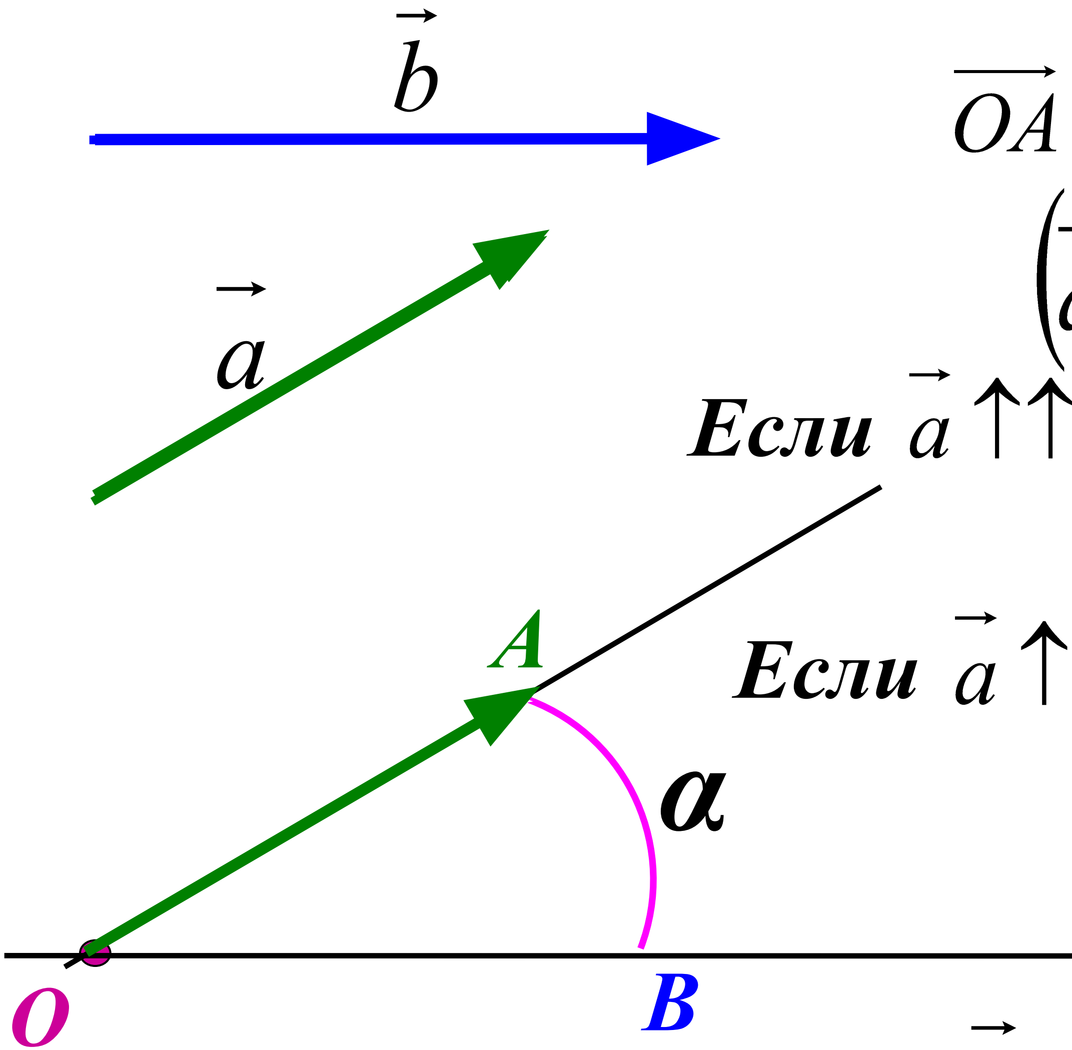
? Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ **и** $\overrightarrow{CD}$ **?**

$\overrightarrow{AB}\{8;4;-6\}$ $\overrightarrow{CD}\{2;-2;1\}$

Нет

ы и в е к т о р ы и м е ю т р а

Угол между векторами.



$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \qquad \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

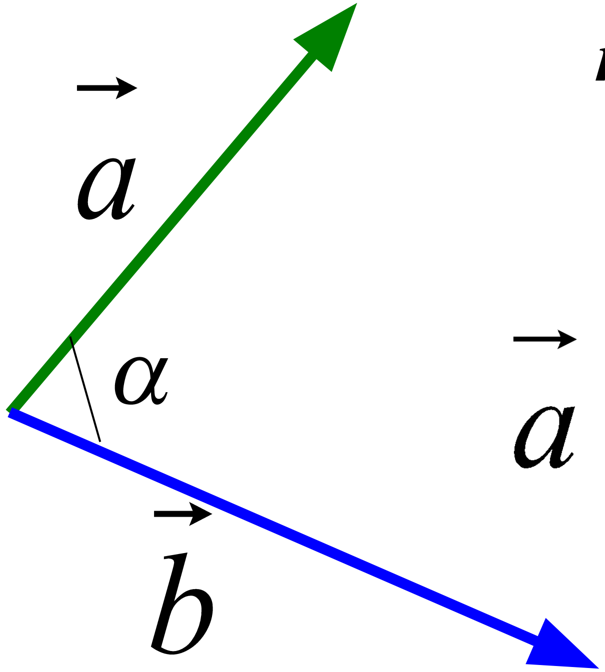
$$\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \alpha$$

Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, ***то*** $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = 0^0$

Если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ ***то*** $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = 180^0$

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$ ***то*** $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = 90^0$

Скалярное произведение векторов.



Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

Вспомним планиметрию…

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

Если $\vec{a}\perp\vec{b}$***, то*** $\cos 90^0 = 0 \Rightarrow \underline{\vec{a}\cdot\vec{b} = 0}$

Если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ ***, то*** $\cos 180^0 = -1 \Rightarrow \underline{\vec{a}\cdot\vec{b} = -\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$

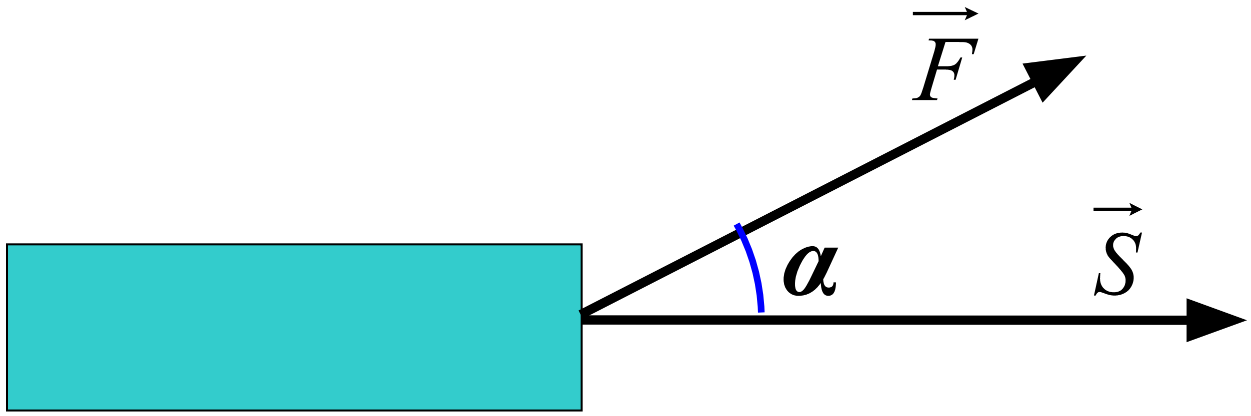
Если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ ***, то*** $\cos 0^0 = 1 \Rightarrow \underline{\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$

Если $\vec{a} = \vec{b}$ ***, то*** $\underline{\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{a}\right|^2 = \vec{a}^2}$

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ ***называется***

скалярным квадратом вектора

Пример применения скалярного произведение векторов в физике.



Если $\left(\widehat{\vec{F}\,\vec{S}}\right) = \alpha,$ ***то***

$$A = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \cos\alpha$$

Скалярное произведение векторов.

Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \qquad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

Косинус угла между ненулевыми векторами

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \qquad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Решение задач.

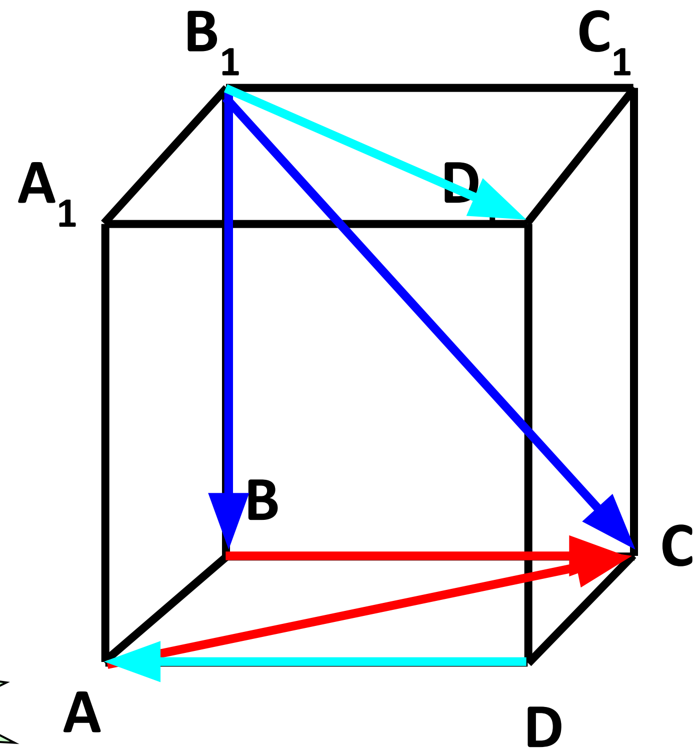
Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Найдите угол между векторами:

а) $\overrightarrow{B_1B}$ ***и*** $\overrightarrow{B_1C}$ ***45^0***

б) $\overrightarrow{BC}$ ***и*** $\overrightarrow{AC}$ ***45^0***

в) $\overrightarrow{DA}$ ***и*** $\overrightarrow{B_1D_1}$ ***135^0***



№ 443 (г)

Дано: ***куб*** $ABCDA_1B_1C_1D_1$***;***

$AB = a$

Найти: $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

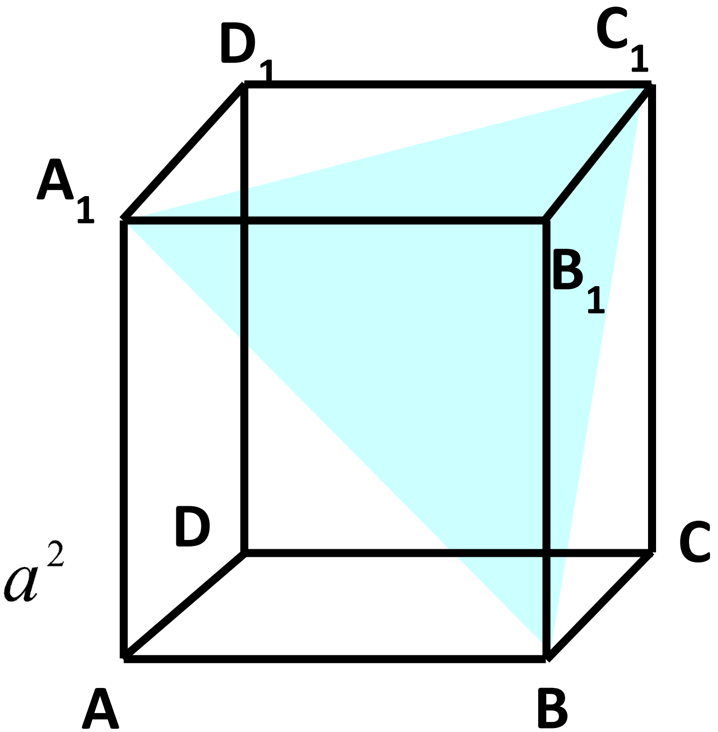
1 способ:

ΔBA_1C_1 – *правильный*

$BA_1 = BC_1 = a\sqrt{2}$

$\left(\overrightarrow{BA_1} \overset{\wedge}{\ } \overrightarrow{BC_1}\right) = 60^0$

$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 60^0 = a^2$



Ответ: a^2

№ 443 (г)

Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$;
$AB = a$

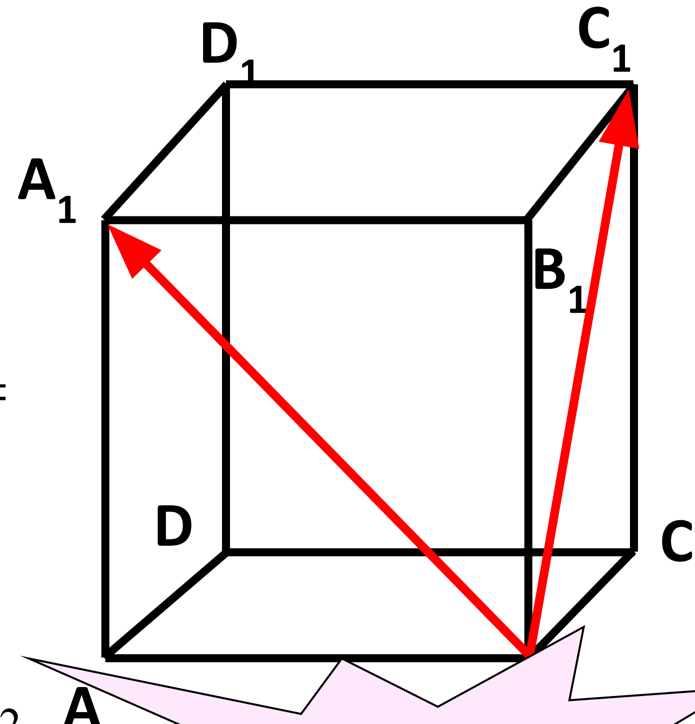
Найти: $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

2 способ:

$$\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1}$$
$$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}$$

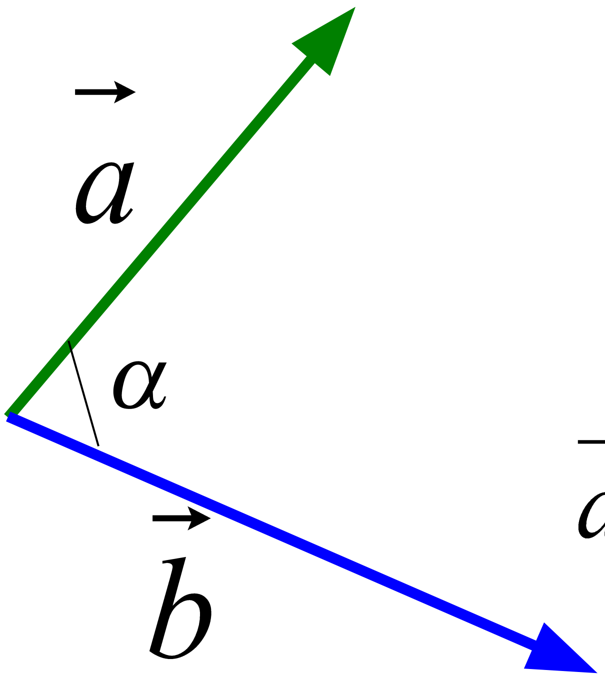
$$\boxed{\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} - ?}$$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}\right) =$$
$$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} +$$
$$+ \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CC_1} =$$
$$= 0 + 0 + 0 + a \cdot a \cdot \cos 0^0 = a^2$$



Ответ: a^2

Скалярное произведение векторов.



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

$$\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}\quad \vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$