

# Кривые поверхности

**Кривые поверхности** формируются перемещением в пространстве по определенному закону линии  $l$  или поверхности  $\Sigma$ , которые называются образующими.

Наибольшее распространение среди них получили **поверхности вращения**: цилиндр, конус, сфера, тор, эллипсоид и др., образующиеся вращением вокруг неподвижной оси **линии  $l$  или поверхности  $\Sigma$** .

Для решения позиционных задач на кривых поверхностях применяется каркасный способ.

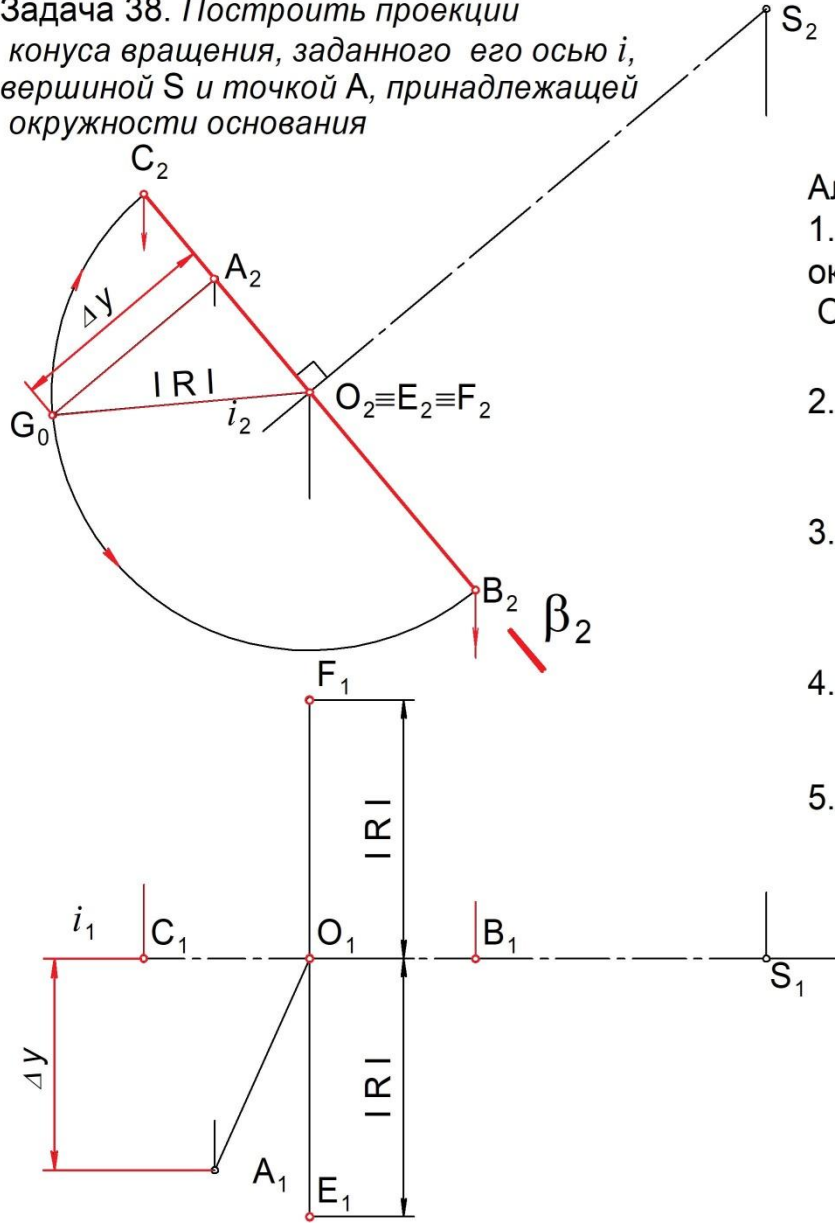
**Каркасом** поверхности называется совокупность линий, таким образом ее заполняющих, что в общем случае через любую точку поверхности проходит единственная линия каркаса.

При решении задач на поверхностях вращения используют каркасы:

- а) линейчатый - совокупность прямых линий, заполняющих поверхность;
- б) циклический – совокупность окружностей, заполняющих поверхность.

**Очерком (очертанием)** кривой поверхности является совокупность линий, образующихся в результате пересечения с плоскостью

Задача 38. Построить проекции конуса вращения, заданного его осью  $i$ , вершиной  $S$  и точкой  $A$ , принадлежащей окружности основания

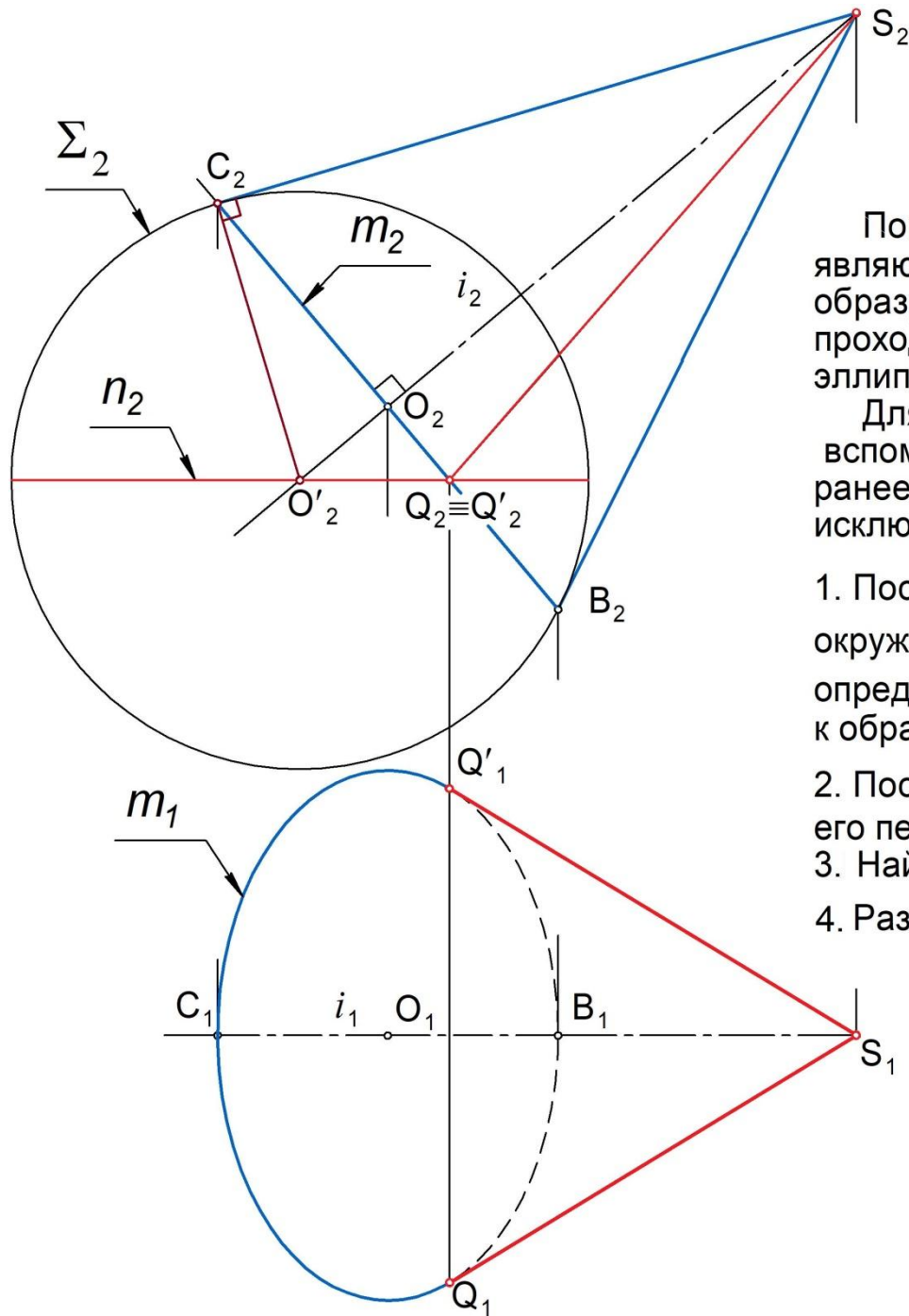


Алгоритм построения:

1. Т.к. ось конуса  $i \parallel \Pi_2$ , то плоскость  $\beta$ , в которой расположена окружность основания конуса, является фронтальнопроецирующей. Она проходит через точку  $A$  перпендикулярно оси конуса  $i$ , :  
 $(\beta \perp \Pi_2) \Rightarrow \beta_2 \perp i_2; \beta_2 \ni A_2$ .
2. Построив эту плоскость на  $\Pi_2$ , находим центр  $O$  окружности основания конуса:  
 $O = i \cap \beta : O_2 = i_2 \cap \beta_2$ .
3. Определяем НВ радиуса окружности основания конуса, для чего используем алгоритм построения прямоугольного треугольника  $O_2A_2G_0$ , гипотенуза которого является искомой величиной.
4. Строим точки  $C$  и  $B$ , определяющие на  $\Pi_1$  малую ось эллипса, являющегося проекцией основания конуса на эту плоскость проекций.
5. Строим точки  $E$  и  $F$ , определяющие на  $\Pi_1$  большую ось эллипса, являющегося проекцией основания конуса на эту плоскость проекций.



Для построения промежуточных точек, принадлежащих горизонтальной проекции основания конуса в виде эллипса можно использовать его большую и малую оси как оси симметрии, что показано на примере построения четырех точек  $A$ . Кроме этого можно использовать процедуру обратной замены плоскостей проекций:  $X_{24} \rightarrow X_{12}$ , что показано на примере построения двух точек  $1$ .



Покажем построение образующих  $SQ$ ,  $SQ'$ , являющихся горизонтальными очерковыми образующими конуса. Эти образующие проходят через вершину  $S$  конуса касательно эллипса - искаженной проекции его основания.

Для удобства восприятия удалены все вспомогательные построения, выполненные ранее. Новые построения выполняются исключительно на  $\Pi_2$ .

1. Построим сферу  $\Sigma$ , касающуюся конуса по окружности  $m$  его основания, центр которой  $O'$  определяется проведением перпендикуляра  $CO'$  к образующей  $SC$ .
2. Построив экватор  $n$  сферы  $\Sigma$ , находим точки  $Q$   $Q'$  его пересечения с окружностью основания конуса.
3. Найдя эти точки на  $\Pi_1$ , соединяем их с вершиной  $S$ .
4. Разграничиваем видимость основания  $m$  конуса.



Далее обычно рассматриваются поверхности вращения, ось которых перпендикулярна  $\Pi_1$ . При этом нужно строить недостающие проекции точек, расположенных на этих поверхностях. Указанные точки делятся на две группы:

1. Опорные (характерные), проекции которых расположены на линиях  $l^\phi$ ,  $l^n$ ,  $m$  чертежа. В рассматриваемом примере это точки В, D, E, F. Построение этих точек обязательно.
2. Обычные (регулярные), положение которых выбирается произвольно: точки А и С.

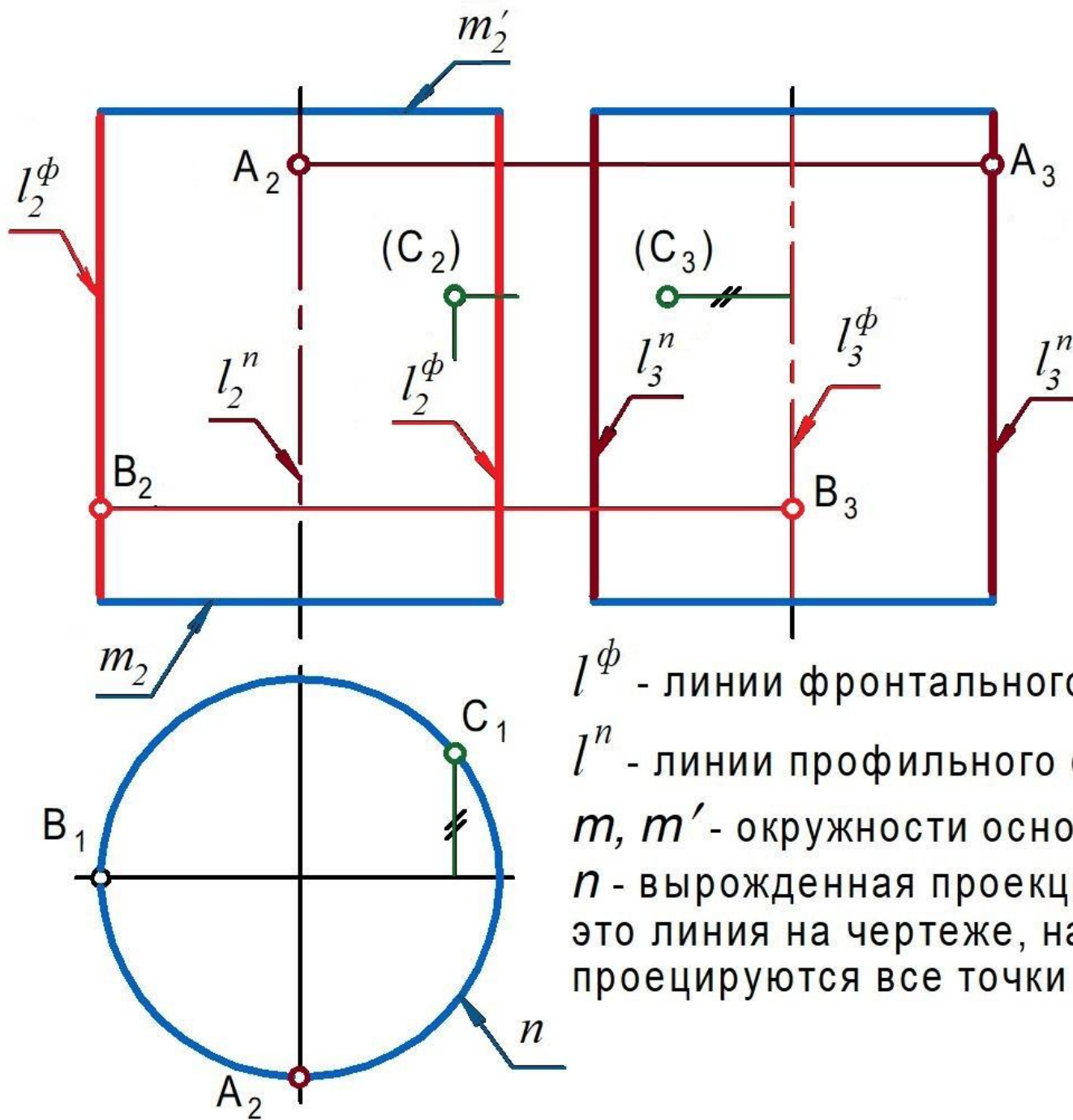
Здесь  $l^\phi$  - линии фронтального очерка;  
 $l^n$  - линии профильного очерка.  
 $m$  - окружность основания.



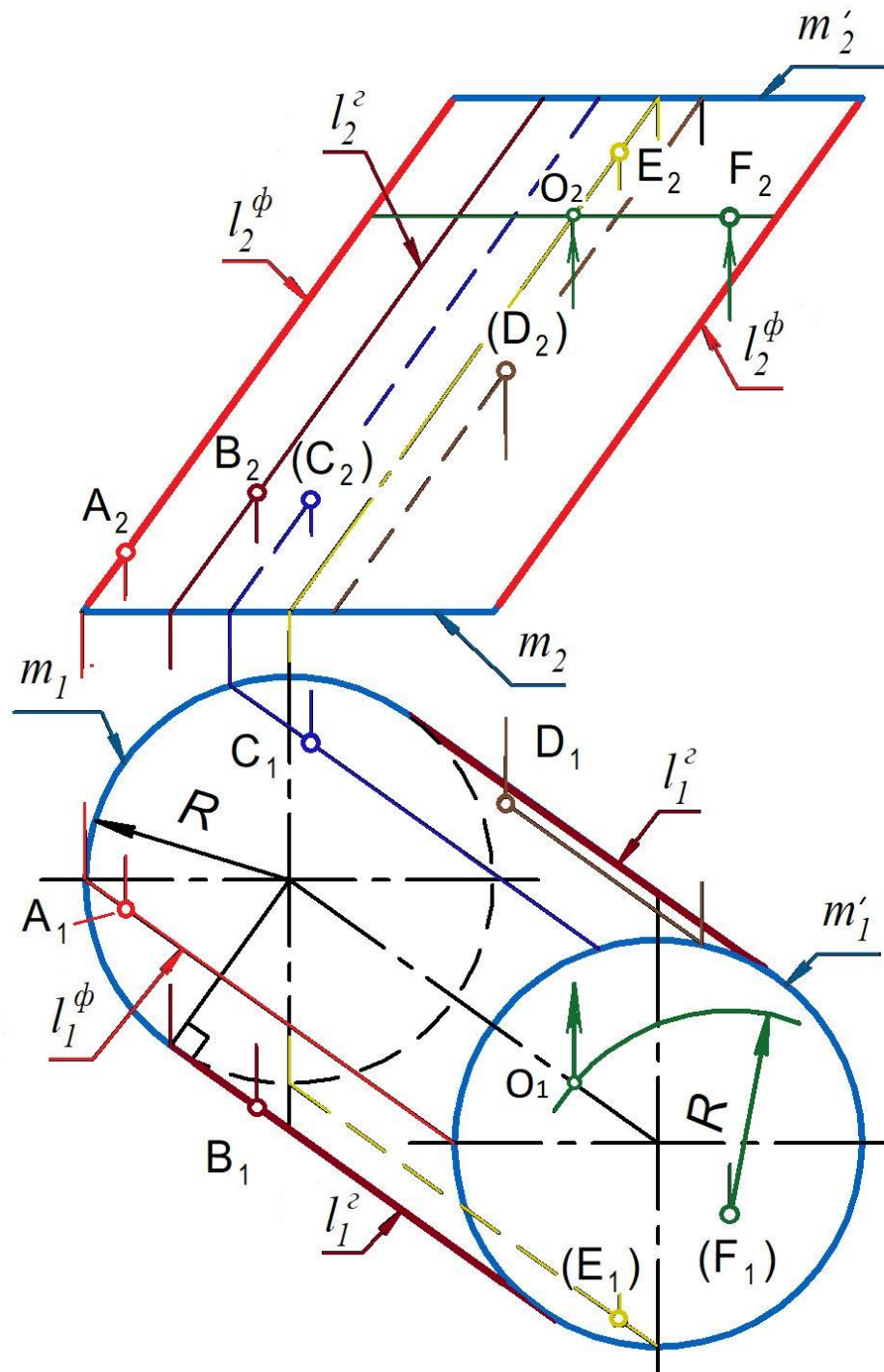
$l^\phi$  - линия фронтального очерка сферы;  
 $l^e$  - линия горизонтального очерка сферы;  
 $l^n$  - линия профильного очерка сферы.

Опорные точки  $A, C, D$  строятся по принадлежности соответствующей линии очерка.

Регулярные точки  $B$  и  $E$  строятся с помощью окружностей каркаса.



$l^{\phi}$  - линии фронтального очерка;  
 $l^n$  - линии профильного очерка;  
 $m, m'$  - окружности оснований.  
 $n$  - вырожденная проекция цилиндра -  
 это линия на чертеже, на которую  
 проецируются все точки цилиндра.



$l^\phi$  - линии фронтального очерка;  
 $l^zeta$  - линии горизонтального очерка;  
 $m, m'$  - окружности основания.

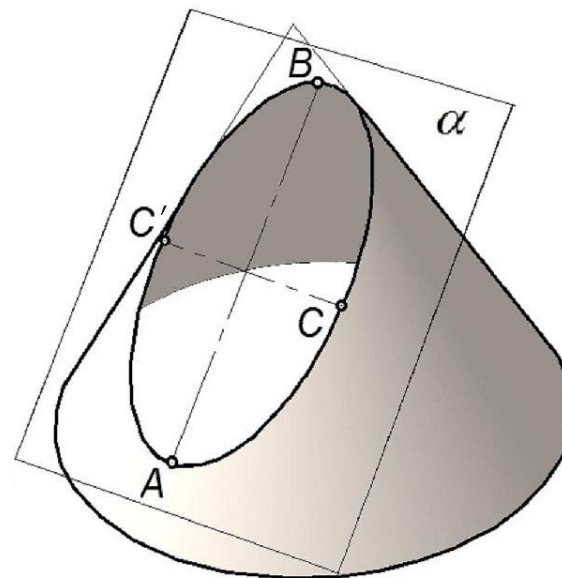
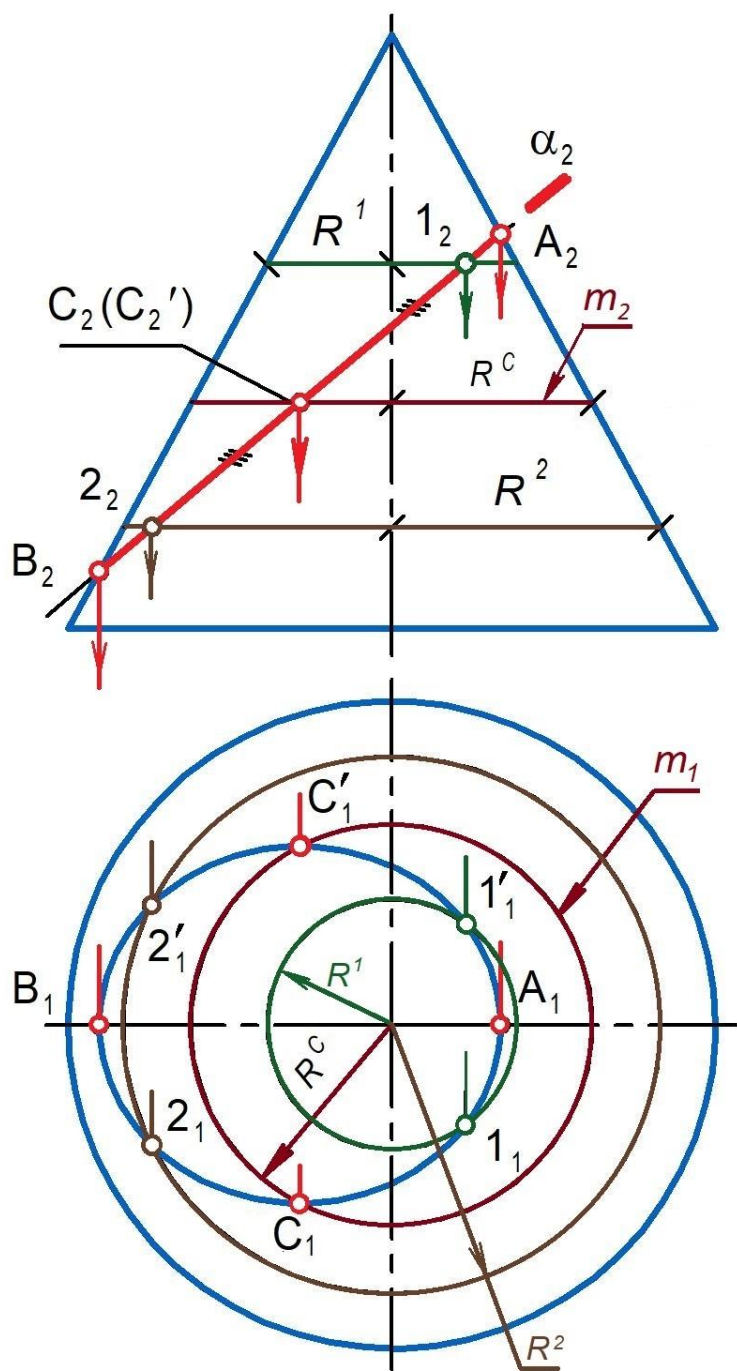
Рассматриваемая поверхность носит название наклонного или эллиптического цилиндра. Она не является поверхностью вращения.

Каркас такой поверхности может быть  
 а) циклическим в виде набора окружностей, параллельных основаниям цилиндра;  
 б) линейчатым в виде набора прямолинейных образующих, параллельных оси.

Построение недостающих проекций точек, расположенных на цилиндре удобно строить с помощью линейчатого каркаса в виде прямолинейных образующих, параллельных оси (линии центров) цилиндра.

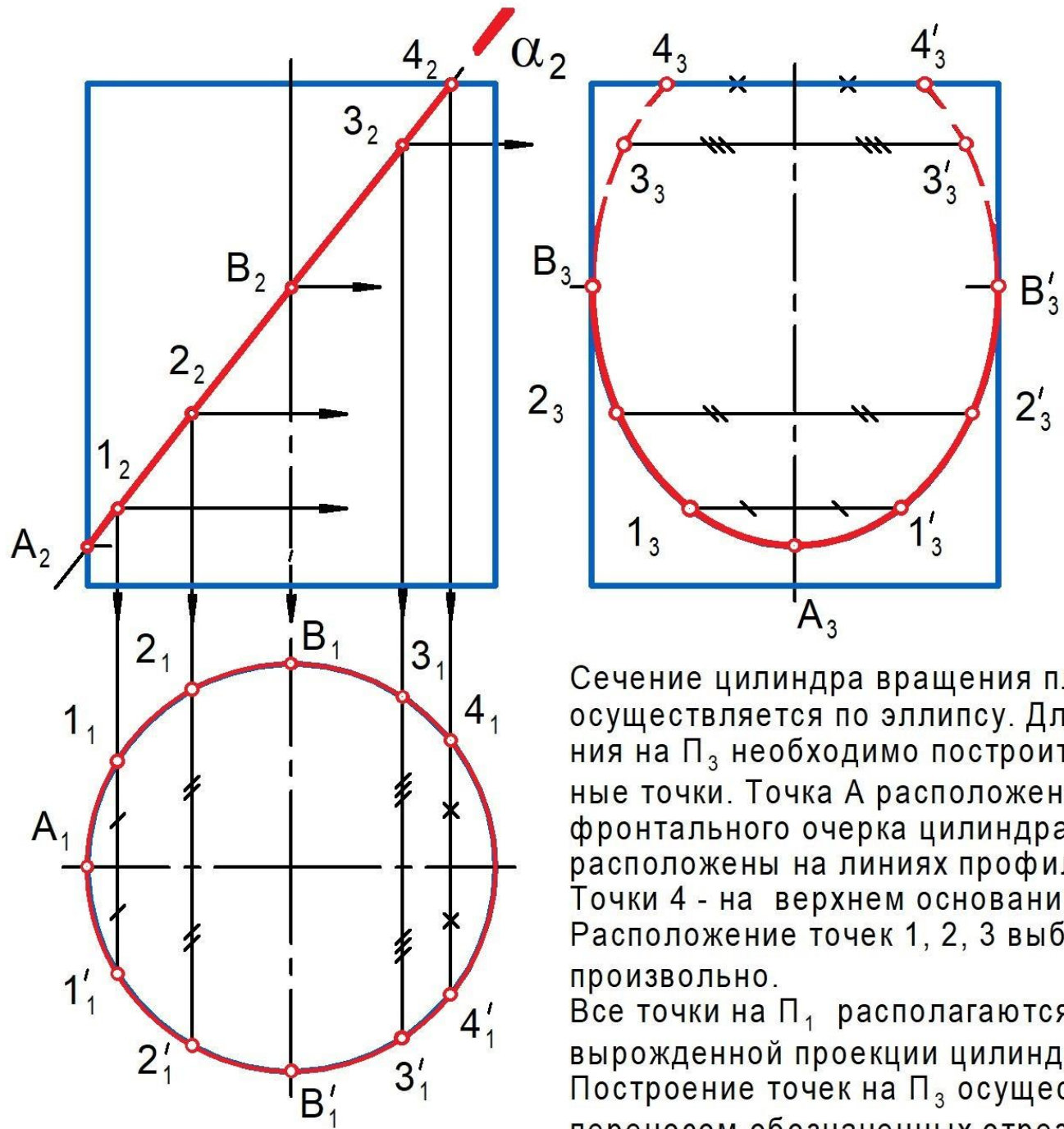
На примере точки F показано применение циклического каркаса в виде окружности с радиусом  $R$ , центр  $O$  которой определяется на  $\Pi_1$ .



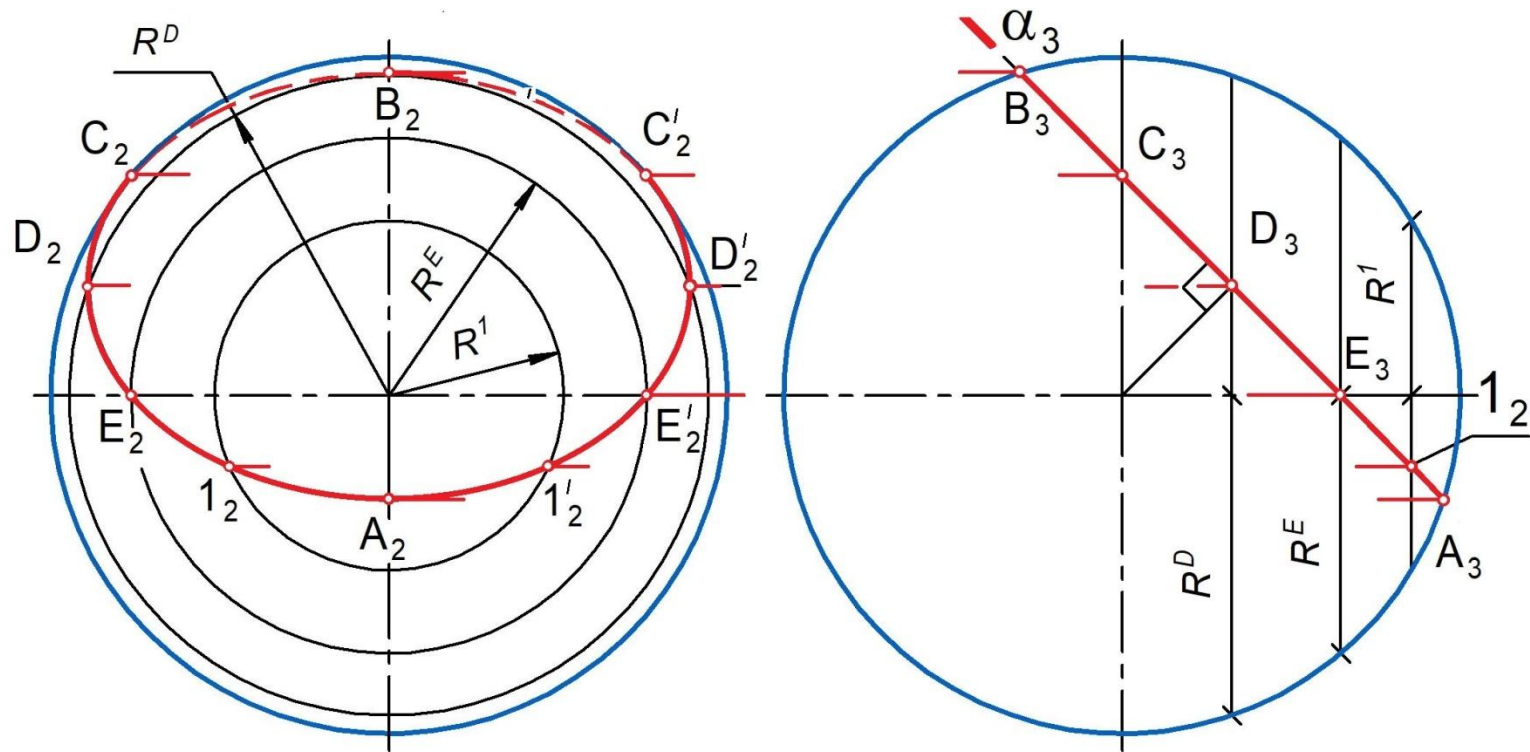


Сечение конуса вращения рассматриваемой плоскостью  $\alpha$  осуществляется по эллипсу. При этом известен размер большой его оси - это отрезок  $AB$  на  $\Pi_2$ . Для построения малой оси  $CC'$  поделим указанный отрезок пополам и через полученную точку  $C$  построим окружность  $m$  каркаса с радиусом  $R^C$ . Начертив эту окружность на  $\Pi_1$  находим точки  $C$  и  $C'$  малой оси эллипса.

Для нахождения промежуточных точек  $1$  и  $2$  произвольно выберем их на  $\Pi_2$  в окрестностях точек  $A$  и  $B$ , а затем с помощью окружностей каркаса с радиусами  $R^1$  и  $R^2$  построим их на  $\Pi_1$ . Через все точки, построенные на  $\Pi_1$ , проведем замкнутую лекальную кривую.



Сечение цилиндра вращения плоскостью  $\alpha$  осуществляется по эллипсу. Для его построения на  $\Pi_3$  необходимо построить обозначенные точки. Точка А расположена на линии фронтального очерка цилиндра. Точки В расположены на линиях профильного очерка. Точки 4 - на верхнем основании цилиндра. Расположение точек 1, 2, 3 выбирается на  $\Pi_2$  произвольно. Все точки на  $\Pi_1$  располагаются на окружности - вырожденной проекции цилиндра. Построение точек на  $\Pi_3$  осуществляется переносом обозначенных отрезков координат Y.



Сечение сферы плоскостью всегда осуществляется по окружности.

В рассматриваемом случае секущая плоскость  $\alpha \perp$  плоскости  $\Pi_3$ , где эта окружность изображена вырожденно - в виде отрезка АВ, который определяет ее диаметр. На  $\Pi_2$  окружность проецируется искаженно в виде эллипса, малая ось которого определяется точками А и В, а большая  $DD'$  равна диаметру этой окружности.

Намечаем на  $\alpha_3$  точки для построения эллипса: А, В лежат на линии профильного очерка; С, С' – на линии фронтального очерка; Е, Е' – на линии горизонтального очерка; D, D' определяют большую ось эллипса, 1, 1' строим произвольно в окрестности точки А. Через точки 1, Е и D проводим окружности каркаса  $\Pi_2$  и с их помощью строим указанные точки на  $\Pi_2$ . Соединяем на  $\Pi_2$  все точки замкнутой лекальной кривой с учетом их видимости.

## Задача 41

Найти точки  $A, B$  пересечения прямой  $l$  с заданными кривыми поверхностями  $\Phi$

Алгоритм решения:

1. Через прямую  $l$  проводим проецирующую плоскость  $\beta$ :  $\beta \supset l$  ( $\beta \perp \Pi_1$  или  $\beta \perp \Pi_2$ ).

В рассматриваемом случае  $\beta \perp \Pi_2$ .

2. Строим линию  $m$  пересечения тора с пл.  $\beta$ :

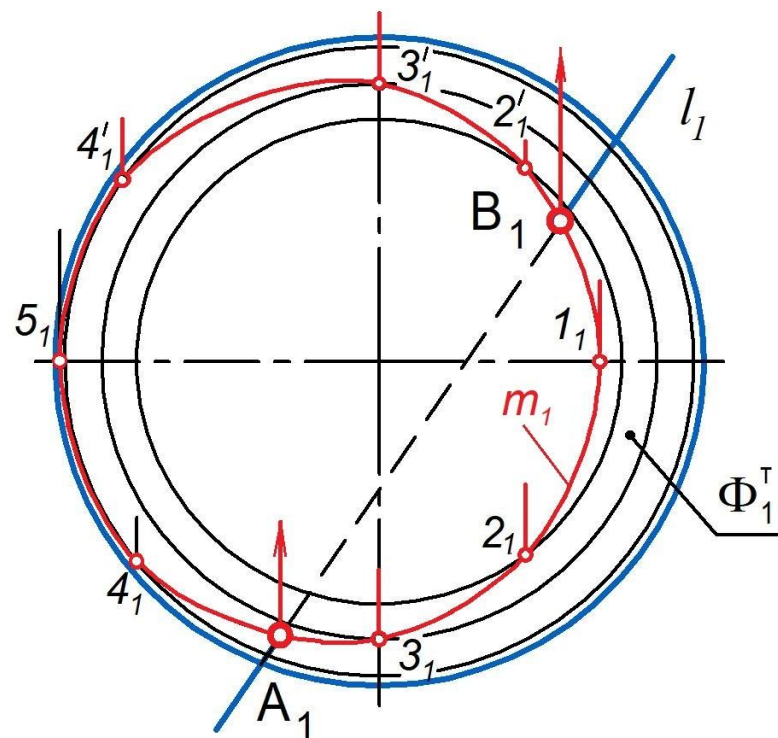
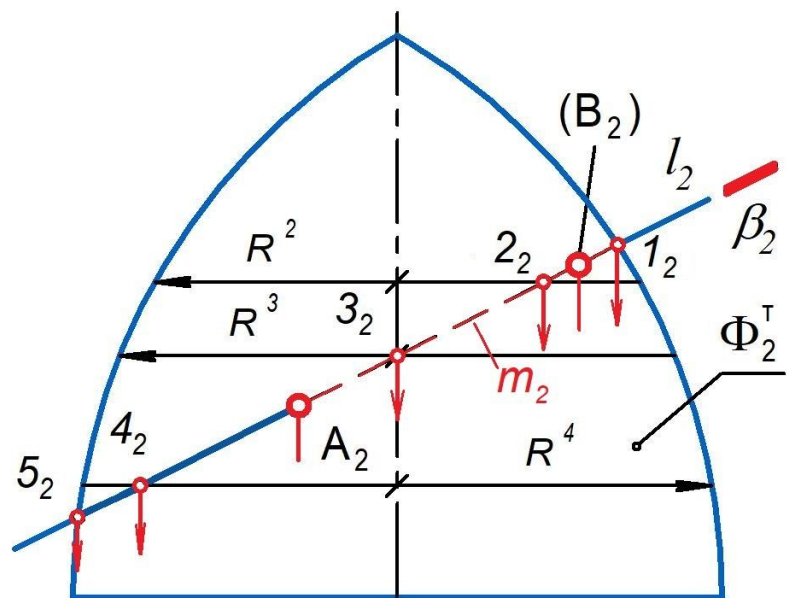
$$m = \Phi^T \cap \beta$$

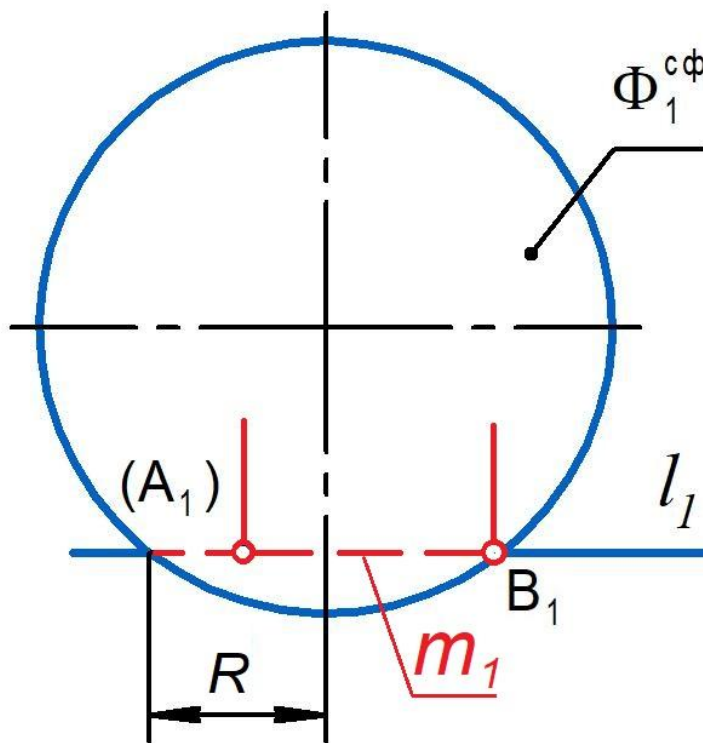
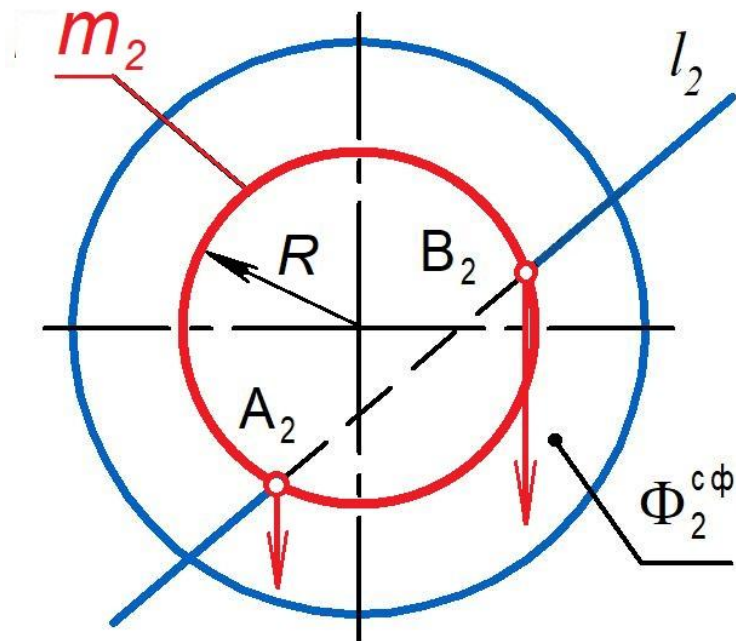
Построение этой линии осуществляем каркасным способом:

- на  $\beta_2$  намечаем произвольные точки  $1, \dots, 5$ ;
- через эти точки проводим окружности каркаса, изображаемые вырожденно в виде отрезков прямых;
- измерив радиусы, строим эти окружности на  $\Pi_1$ .
- на этих окружностях находим недостающие проекции вспомогательных точек  $1, \dots, 5$  и через них проводим замкнутую лекальную кривую  $m_1$ .

3. Находим искомые точки  $A$  и  $B$ :  $(A, B) = m \cap l$ ;

4. Разграничиваем видимость прямой  $l$  относительно тора.





Алгоритм построения:

1.  $\beta \supset l, \beta \perp \Pi_2$ ;

2.  $m = \Phi^T \cap \beta$   
 $m$  - окружность;

3.  $(A, B) = m \cap l$ ;

4. Видимость  $A, B, l$

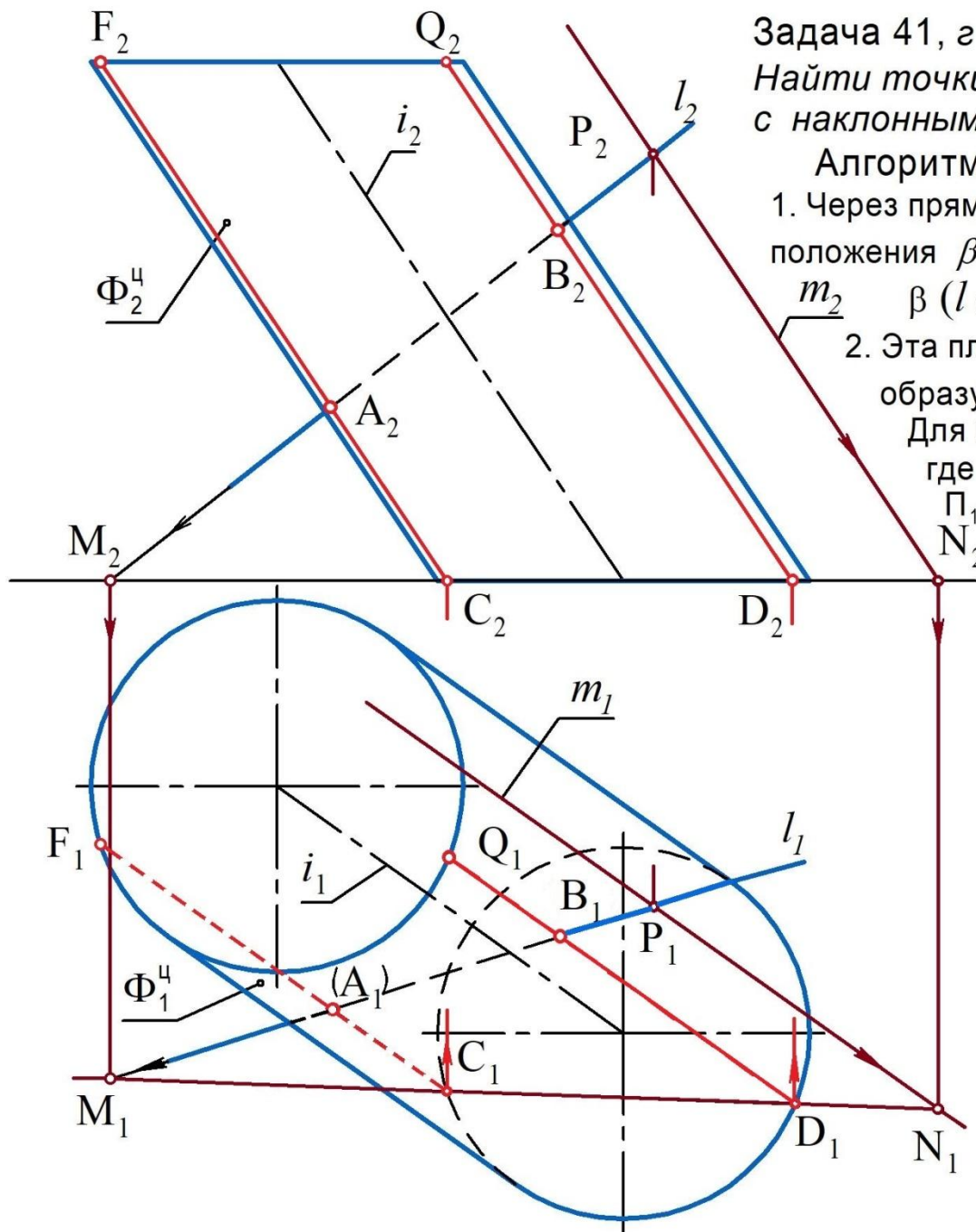




1. Для удобства решения этой задачи предварительно выполним преобразование чертежа по алгоритму задачи 1 на преобразования, чтобы прямая  $l$  в новой системе плоскостей проекций стала линией уровня:

$$X_{12} \rightarrow X_{24}: X_{24} \parallel l_2 \Rightarrow l \parallel \Pi_4.$$

2. Далее через прямую  $l$  проведем плоскость  $\beta \parallel \Pi_4$ , построим окружность  $m$  пересечения сферы этой плоскостью и с помощью линии  $m$  найдем искомые точки А и В (см. алгоритм решения задачи 41, б).



### Задача 41, а

Найти точки А, В пересечения прямой  $l$  с наклонным цилиндром

Алгоритм построения:

1. Через прямую  $l$  проведем плоскость общего положения  $\beta$  ( $l \cap m$ )  $\parallel i$  (линия центров):

$m_2$   $\beta$  ( $l \cap m$ ):  $m \parallel i, P = m \cap l$ .

2. Эта плоскость рассекает цилиндр по двум образующим  $FC$  и  $QD$ :  $(FC, QD) = \Phi^u \cap \beta$ .

Для их построения найдем точки  $M$  и  $N$ , где прямые  $l$  и  $m$  пересекают плоскость  $\Pi_1$  нижнего основания цилиндра:

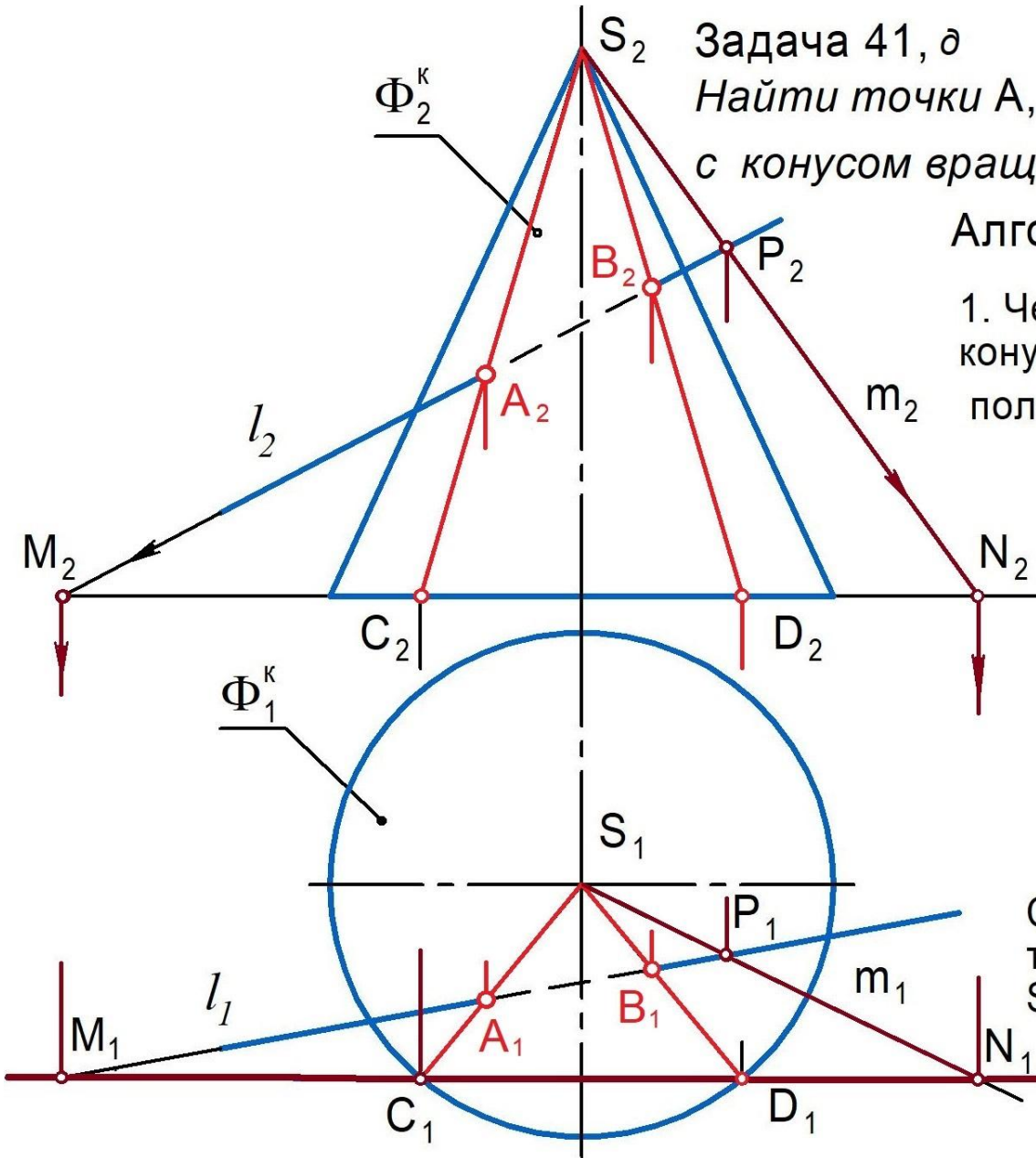
$M = l \cap \Pi_1, N = m \cap \Pi_1$ .

Прямая  $MN$  пересечет окружность нижнего основания в точках  $C$  и  $D$ , через которые проходят указанные образующие.

3. Строим искомые точки:

$A = FC \cap l; B = QD \cap l$

и разграничиваем видимость прямой  $l$  относительно цилиндра.



**Задача 41, а**

Найти точки А, В пересечения прямой  $l$  с конусом вращения  $\Phi^k$

**Алгоритм построения:**

1. Через прямую  $l$  и вершину  $S$  конуса проведем плоскость общего положения  $\beta$ .

$$\beta (l \cap m): \beta \supset l, \beta \ni S.$$

2. Эта плоскость пересекает конус по двум образующим  $SC$  и  $SD$ :  $(SC, SD) = \Phi^k \cap \beta$ . Для их построения найдем точки  $M$  и  $N$ , где прямые  $l$  и  $m$  пересекают плоскость  $\Pi_1$  основания конуса:

$$M = l \cap \Pi_1, N = m \cap \Pi_1.$$

Соединив точки  $M$  и  $N$ , находим точки  $C$  и  $D$ . Построив образующие  $SC$  и  $SD$ , находим искомые точки:

$$A = SC \cap l; B = SD \cap l$$

и разграничиваем видимость прямой  $l$  относительно конуса.



# Пересечение кривых

## поверхностей

Заданы две пересекающиеся поверхности  $\Phi$  и  $\Omega$ .

Необходимо построить линию  $l$  их пересечения.

Обычно решение поставленной задачи начинается с построения опорных (характерных) точек этой линии.

К таким точкам относятся:

- **экстремальные**, лежащие в общей плоскости симметрии пересекающихся поверхностей. Здесь **экстремум** означает *min* или *max* удаления точек от плоскостей проекций;
- принадлежащие **очерковым образующим** заданных поверхностей и определяющие **видимость** линии  $l$ .

Далее строится набор промежуточных (регулярных) точек, необходимых для плавного соединения точек линии  $l$ . При этом используется следующий алгоритм:

1. Строят поверхность-посредник  $\Sigma$ , которая должна пересекать заданные поверхности по простейшим линиям каркаса (прямым или окружностям).

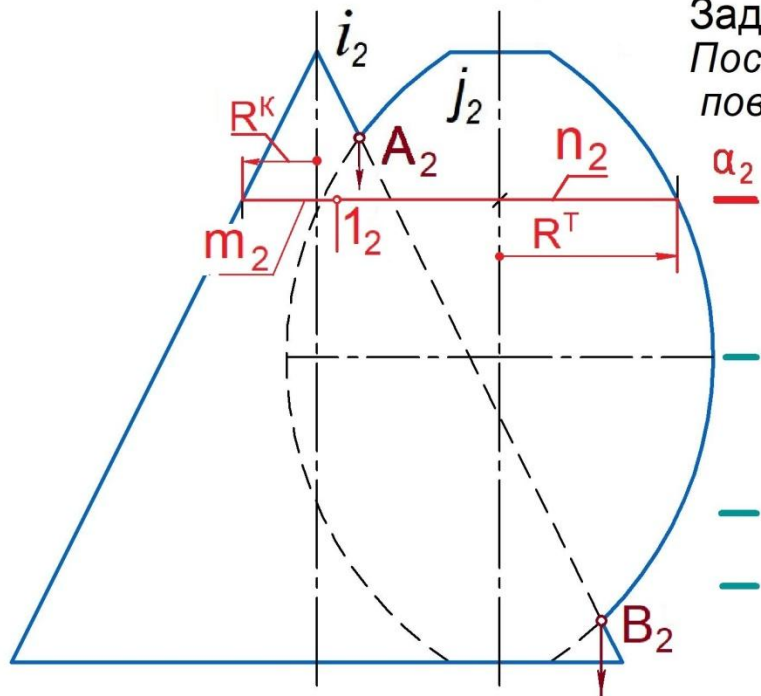
2. Строят линию  $m$  пересечения поверхностей  $\Phi$  и  $\Sigma$ :  $m = \Phi \cap \Sigma$ .
3. Строят линию  $n$  пересечения поверхностей  $\Omega$  и  $\Sigma$ :  $n = \Omega \cap \Sigma$ .
4. Строят точки  $1, 2, \dots$  пересечения линий  $m$  и  $n$ :  $(1, 2, \dots) = m \cap n$ .  
Эти точки принадлежат искомой линии  $l$ .
5. Изменяют положение или размеры поверхности-посредника  $\Sigma$  и повторяют п. п. 2 ... 5 алгоритма.
6. Построив необходимое количество промежуточных точек, последовательно соединяют все точки плавной лекальной кривой с учетом их видимости.

В зависимости от вида поверхности-посредника  $\Sigma$  различают два метода решения задачи на пересечение поверхностей:

- 1) метод **вспомогательных плоскостей**, если посредник  $\Sigma$  – это плоскость;
- 2) метод **вспомогательных сфер**, если посредник  $\Sigma$  – это сфера.

### Задача 42.

Построить проекции линии пересечения поверхностей методом вспомогательных плоскостей



В рассматриваемом случае пересекаются две поверхности вращения: конус и тор, - оси  $i$  и  $j$  которых параллельны. Обе оси  $\perp \Pi_1$ , поэтому в качестве посредников следует применять плоскости, параллельные  $\Pi_1$ .

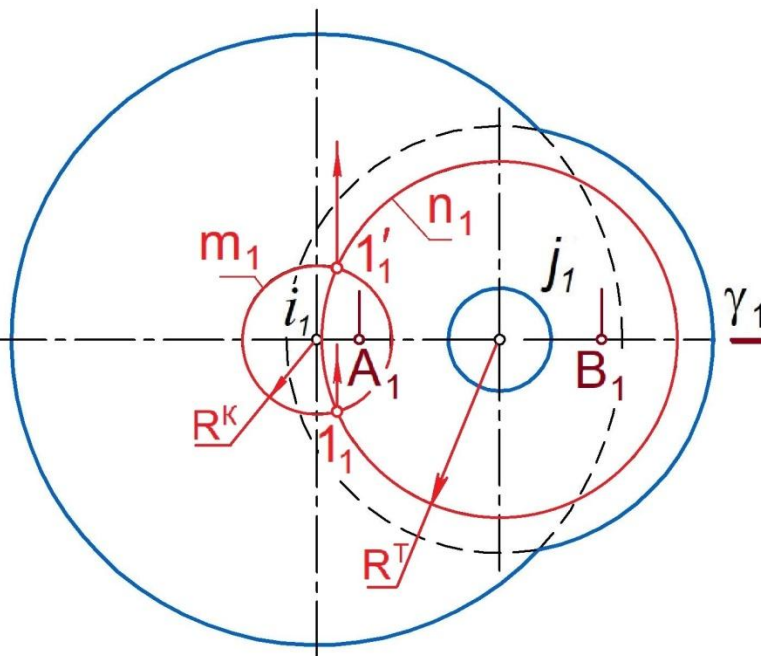
Алгоритм построения:

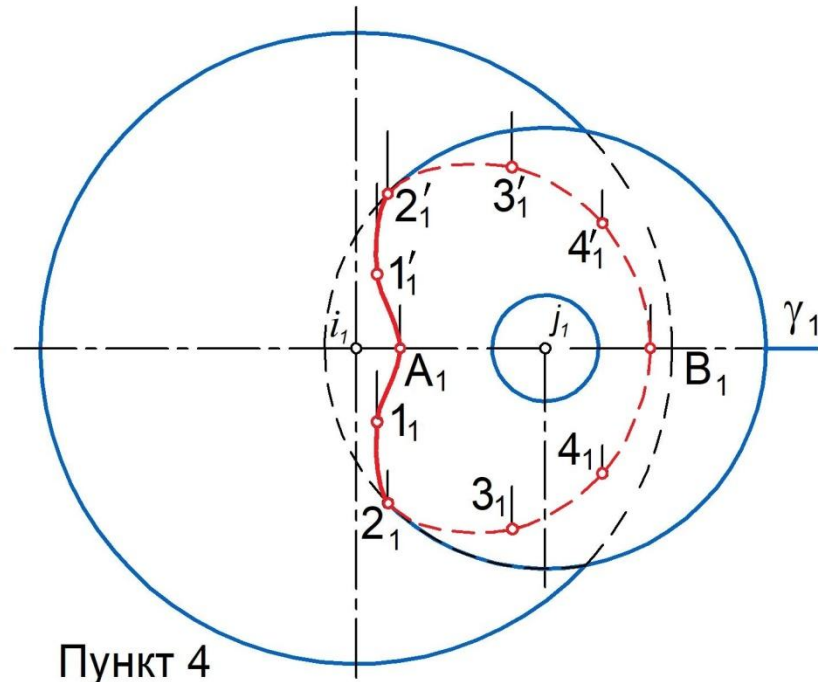
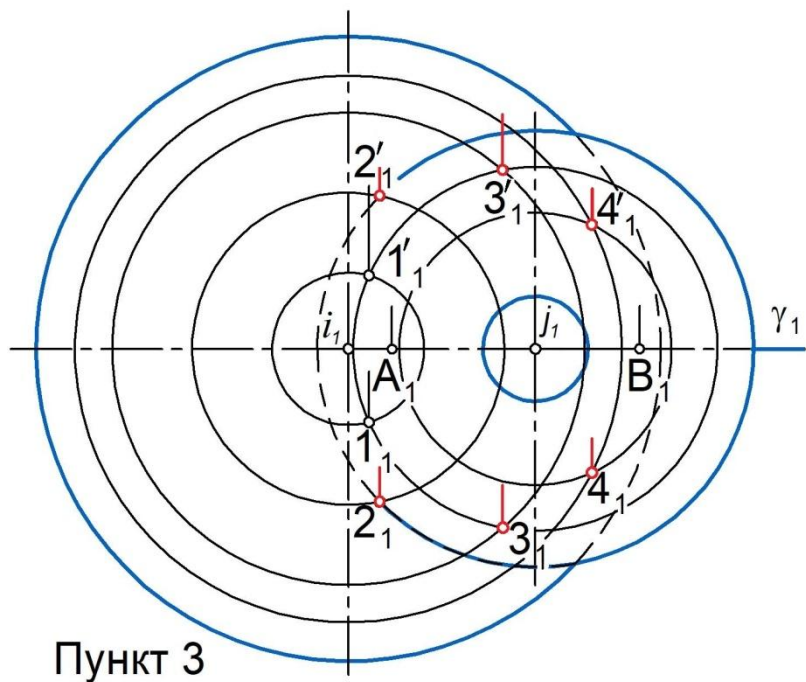
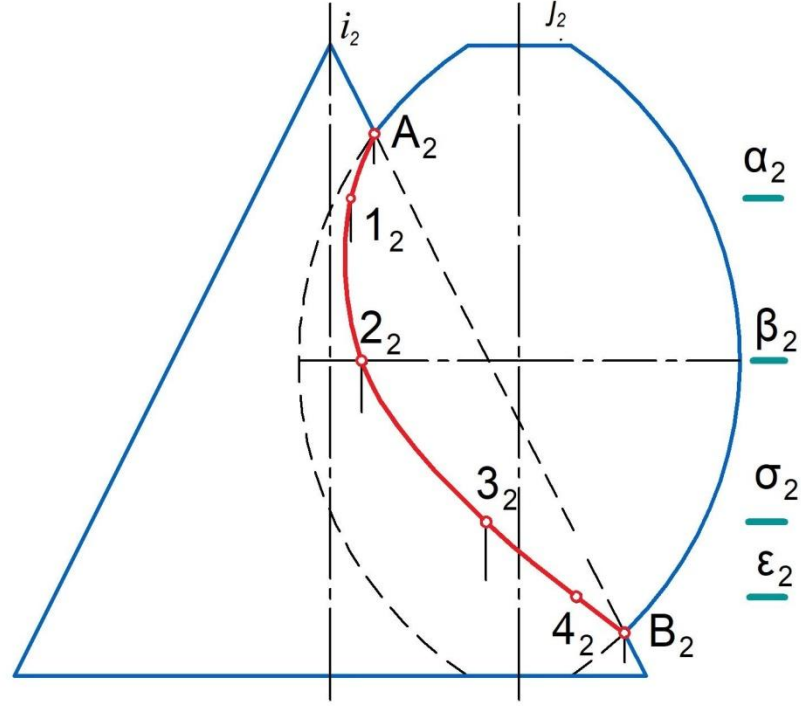
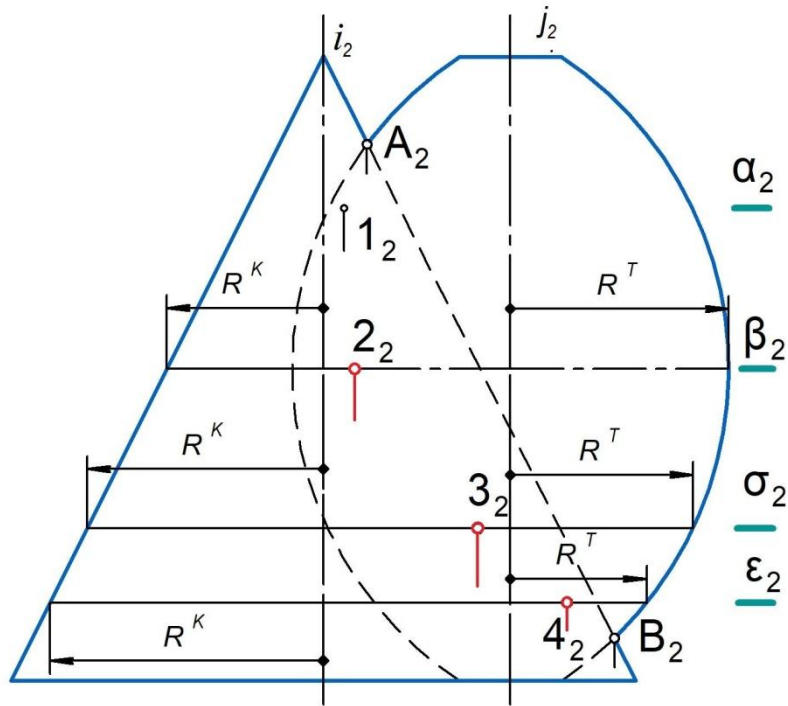
1. Отмечаем экстремальные точки  $A$  и  $B$  в пересечении фронтальных линий очерков. Указанные точки располагаются в общей плоскости симметрии  $\gamma \parallel \Pi_2$ .

2. Строим первую плоскость-посредник  $\alpha$ , которая пересекает конус по окружности  $m$  с радиусом  $R^K$ , а тор - по окружности  $n$  с радиусом  $R^T$ . Построив обе окружности на  $\Pi_1$ , находим в их пересечении точки  $1, 1'$ , принадлежащие линии пересечения фигур.

3. Выполнив аналогичные построения с другими посредниками (см. следующий слайд), получаем необходимый набор точек.

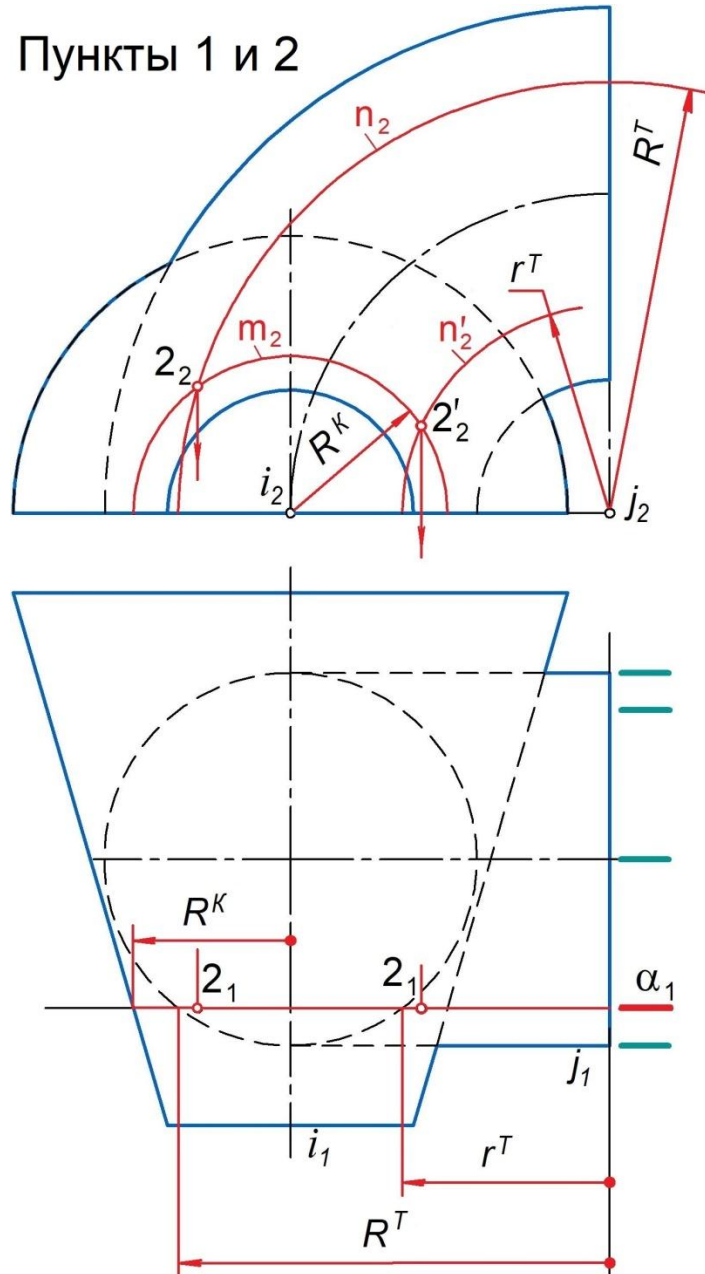
4. Соединяем построенные точки лекальными кривыми с учетом их видимости.





# Задача 42, б

Пункты 1 и 2



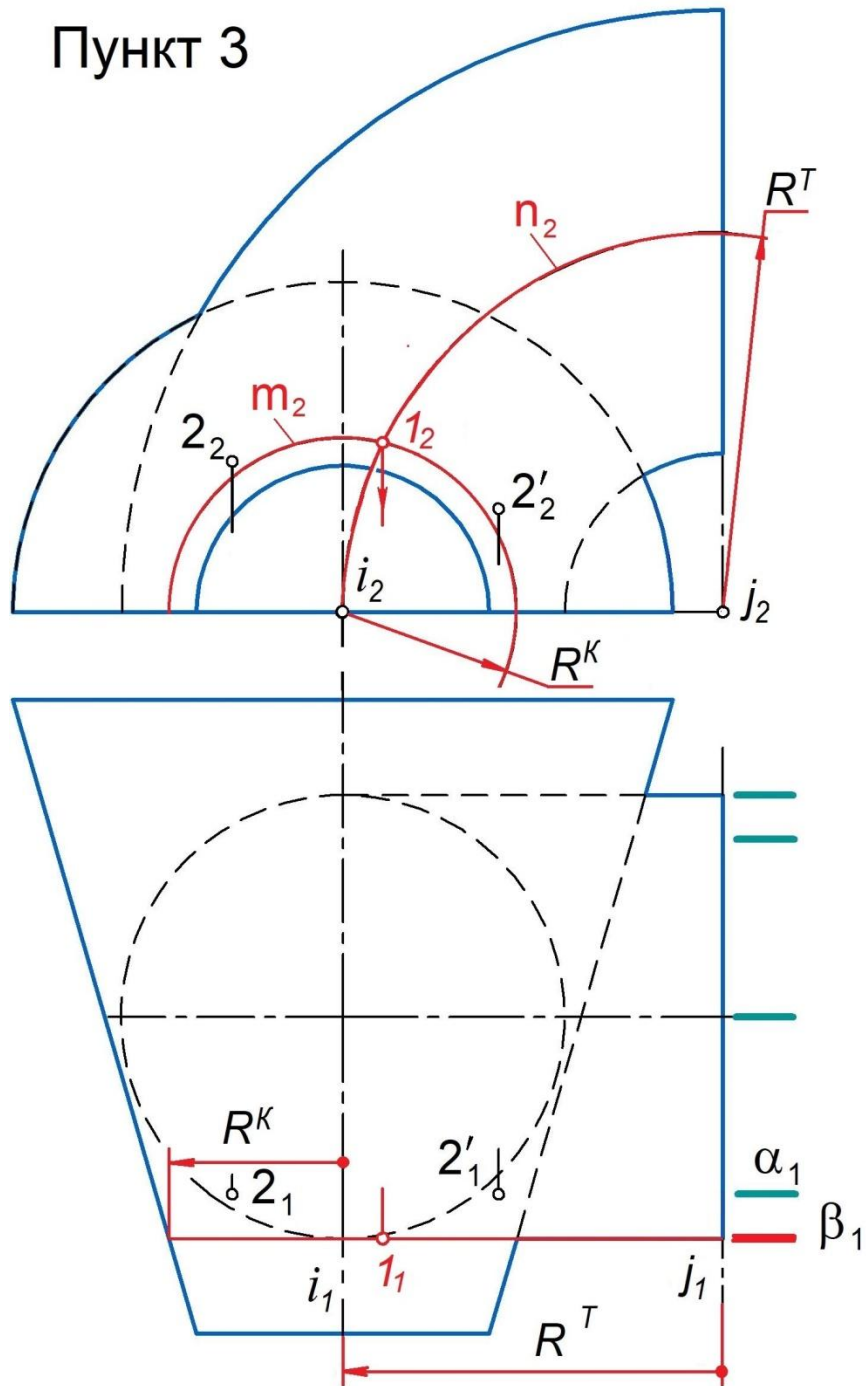
В рассматриваемой задаче пересекаются усеченный полуко- нус и 1/4 часть открытого тора ("бублика"), оси  $i$  и  $j$  которых параллельны. Эти оси перпендикулярны  $\Pi_2$  и поэтому в качест- ве посредников следует применять плоскости  $\parallel \Pi_2$ .

Такие плоскости рассекают конус по окружности  $m$ , а тор - по двум окружностям  $n$  и  $n'$ . При касании тора секущей плос- костью образуется единственная окружность касания  $n$ .

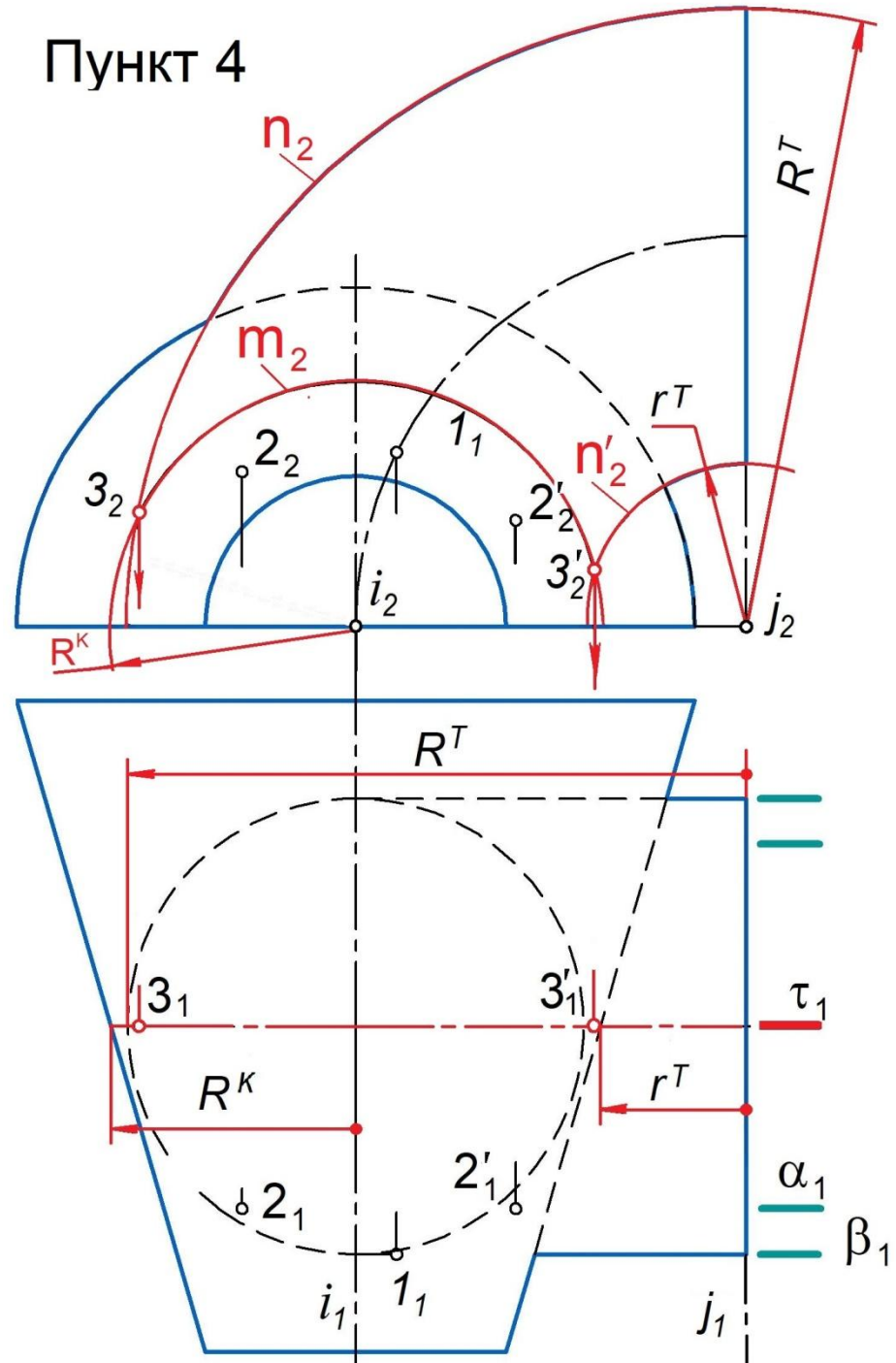
Алгоритм построения.

1. На  $\Pi_1$  строим плоскость-посредник  $\alpha$ , в которой при пере- сечении с конусом образуется полуокружность  $m$  с радиу- сом  $R^k$ , а с тором - две дуги  $n$  и  $n'$  с радиусами  $R^T$  и  $r^T$ .
2. Построив эти дуги на  $\Pi_2$ , находим в их пересечении точки  $2$  и  $2'$ , принадлежащие линии пересечения заданных фигур.
3. При использовании плоскости  $\beta$ , касающейся тора, на нем образуется единственная дуга  $n$  (см. следующий слайд), на которой определяется точка  $1$ . Для удобства восприятия последующих построений точек предыдущие построения удалены.
4. На последующих слайдах показаны построения оставшихся точек.
5. Построенные точки последовательно соединяются замкнутыми лекальными кривыми с учетом их видимости.

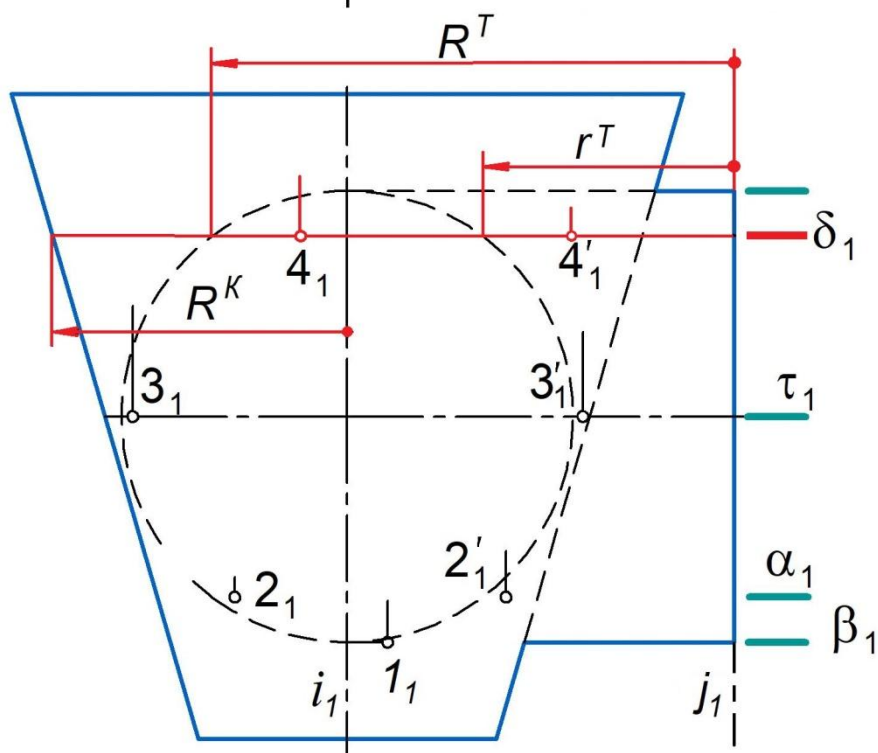
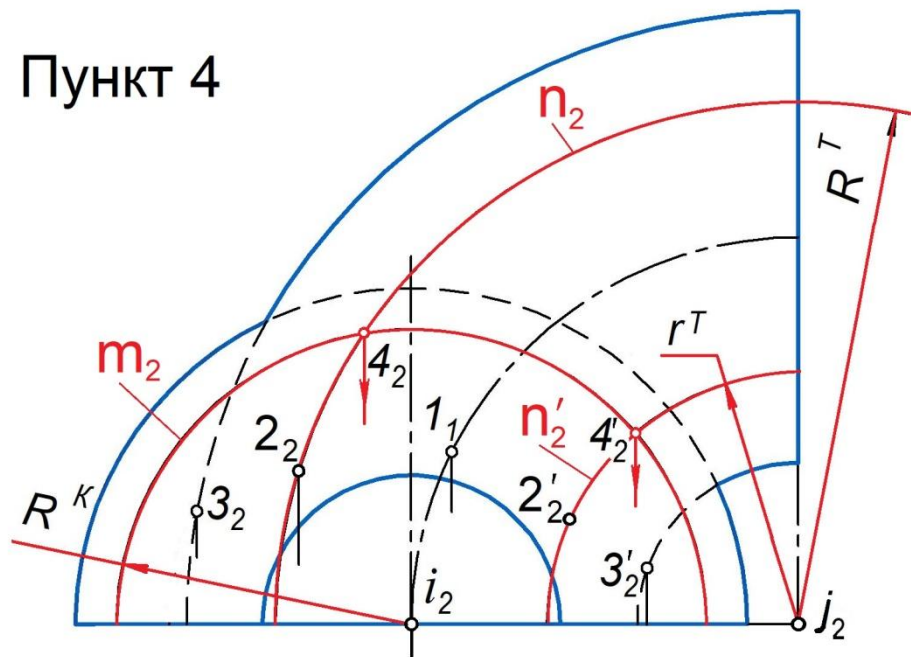
### Пункт 3



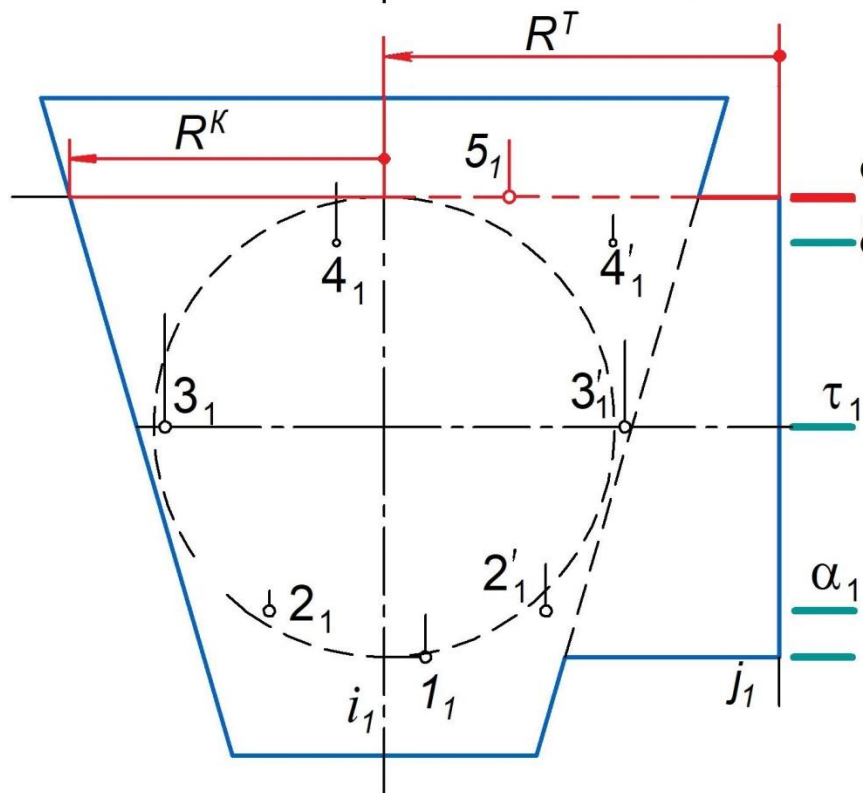
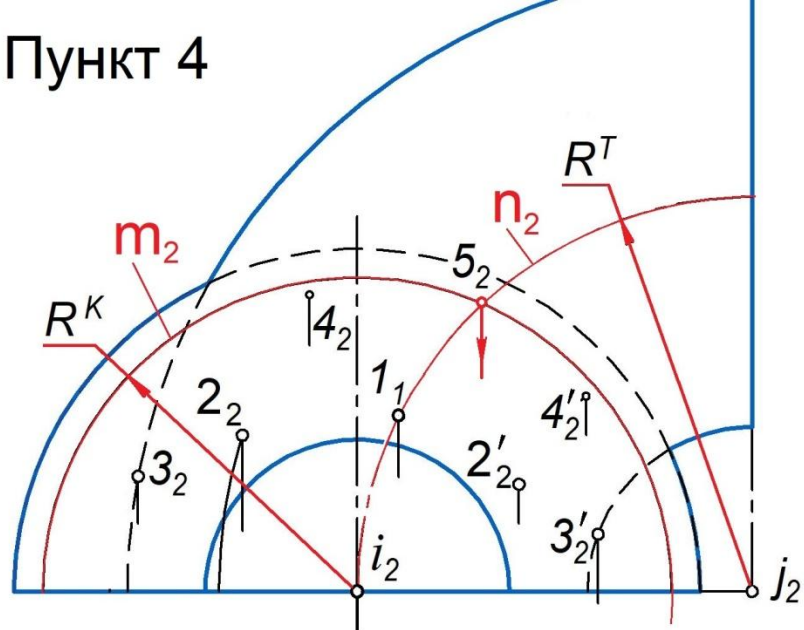
### Пункт 4



# Пункт 4



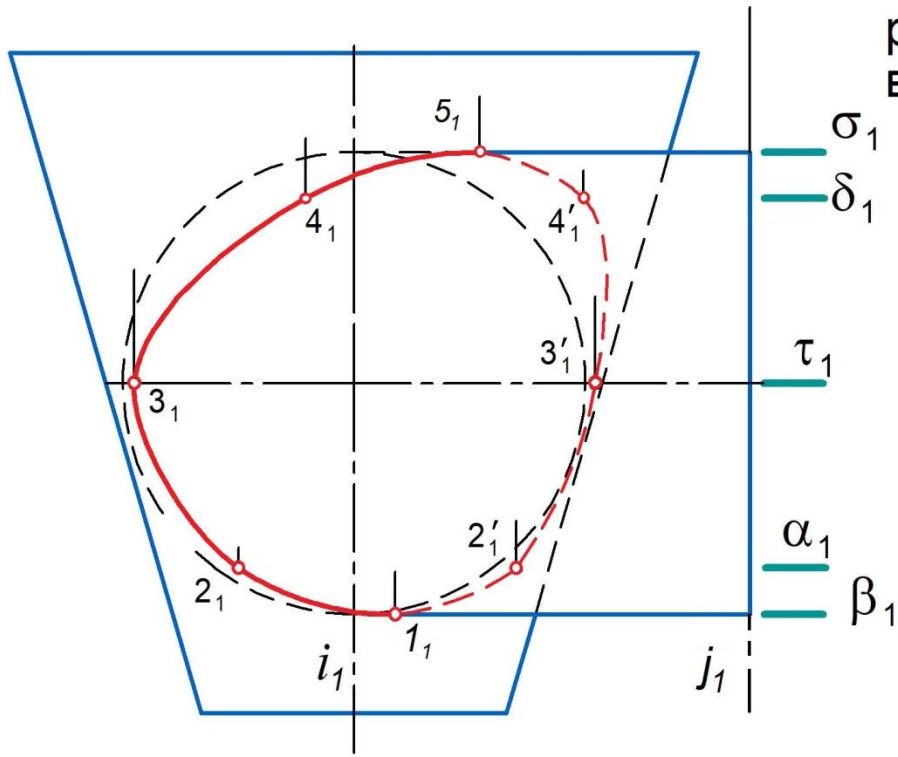
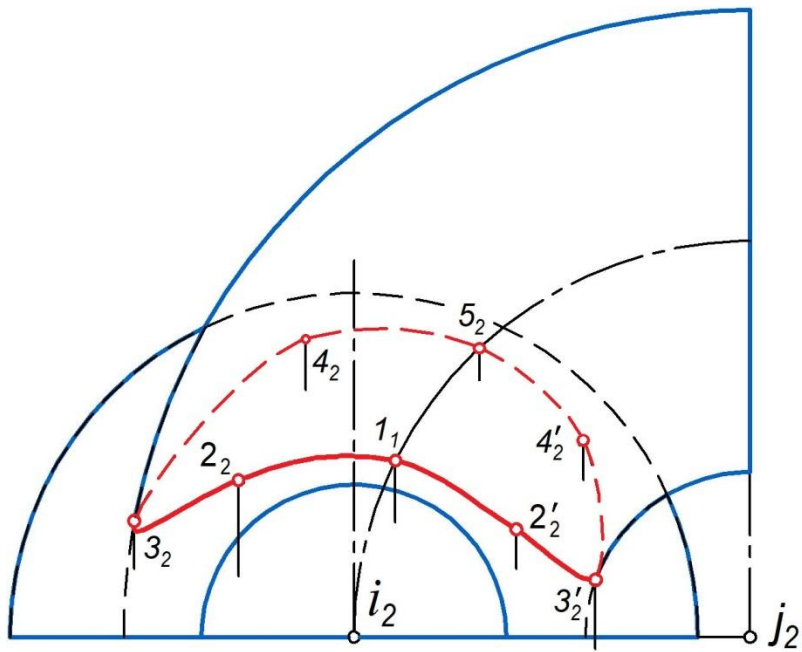
# Пункт 4



## Пункт 5

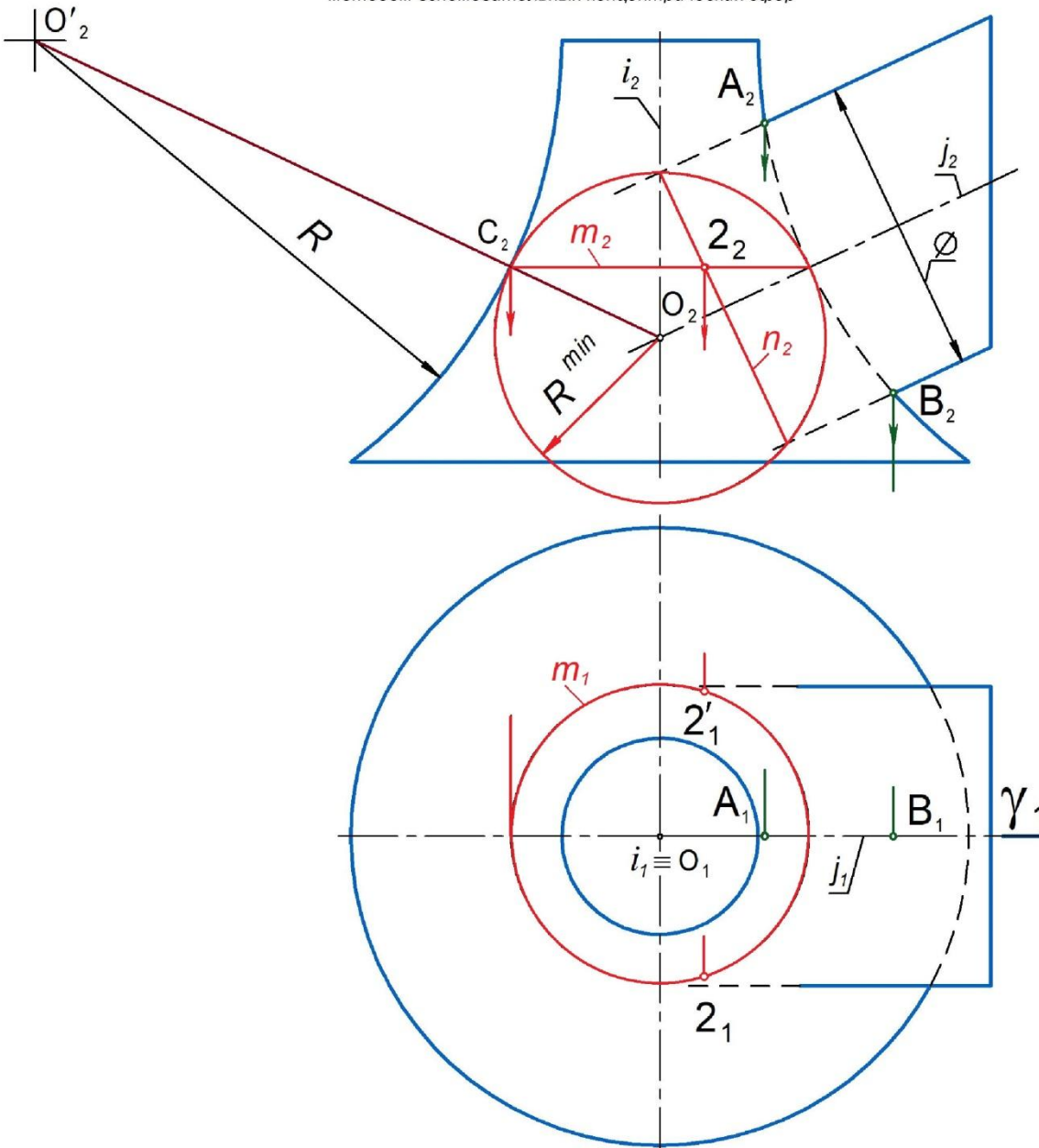
Точки 3 и 3' находятся на фронтальных очерковых образующих тора, являющихся границами видимости тора на  $\Pi_2$ .

Точки 1 и 5 находятся на крайних окружностях тора, параллельных  $\Pi_2$ . Эти окружности являются границами видимости тора на  $\Pi_1$ . Все точки тора, расположенные выше этих линий, видимы, а ниже - невидимы.





Задача 43  
 Построить проекции линии пересечения поверхностей  
 методом вспомогательных концентрических сфер



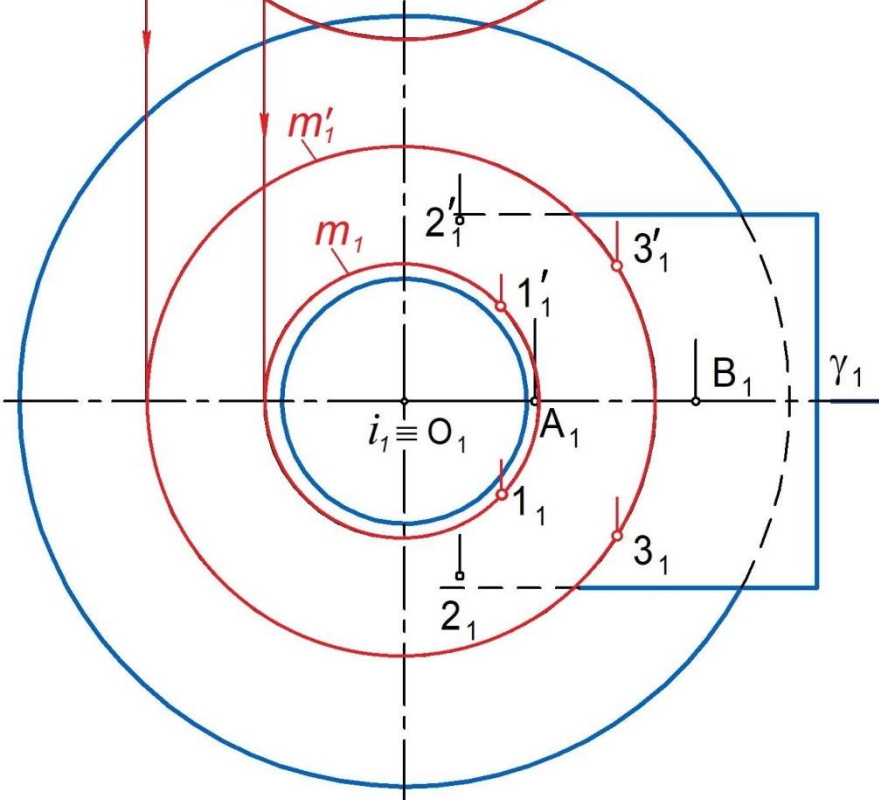
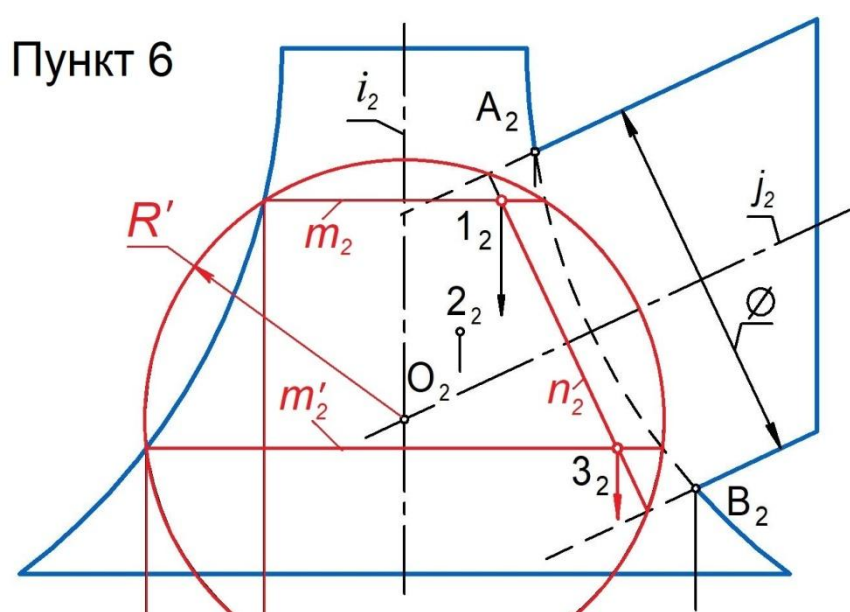
Для применения метода концентрических сфер необходимо, чтобы:

1. Пересекались две поверхности вращения (имеем тор и цилиндр вращения).
2. Оси поверхностей пересекались (имеем  $i \cap j = O$ ).
3. Общая плоскость симметрии поверхностей  $\gamma$ , образованная осями, была параллельна одной из плоскостей проекций (имеем  $\gamma (i \cap j) \parallel \Pi_2$ ).

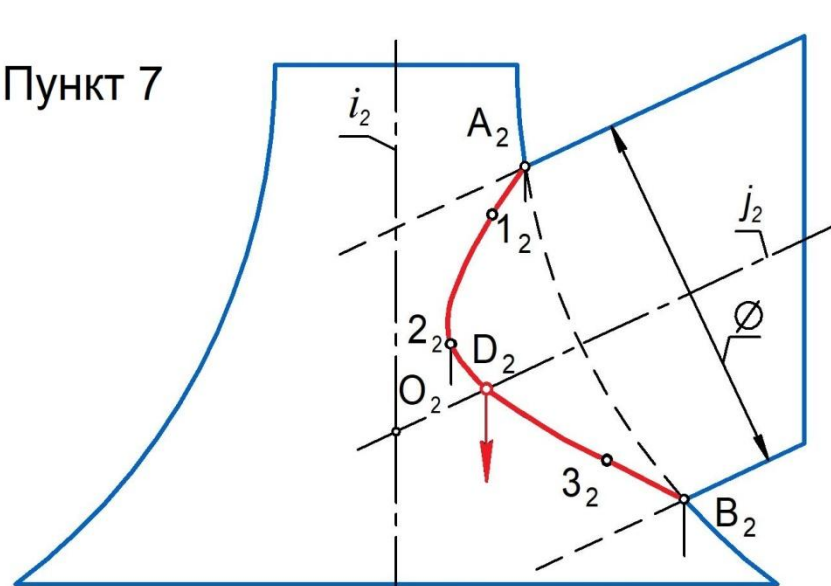
Алгоритм построения:

1. В плоскости  $\gamma$  находим экстремальные точки А и В.
2. На  $\Pi_2$  из точки О строим сферу  $R^{min}$ , которая должна касаться одной из поверхностей и пересекать другую. Для определения радиуса этой сферы соединим точки О, О' и в пересечении с левым очерком сферы найдем точку С, определяющую этот радиус.
3. Строим линию  $m$  касания сферы и тора.
4. Строим линию  $n$  пересечения сферы и цилиндра.
5. В пересечении линий  $m$  и  $n$  находим точку 2, принадлежащую линии пересечения поверхностей.  
 Строим на  $\Pi_1$  горизонтальные проекции двух точек 2 и 2'.
6. Строим новую сферу  $R' = R^{min} + \Delta R$ , повторяем пункты 3, 4, 5 алгоритма и получаем новые промежуточные точки (см. следующий слайд). Для лучшего восприятия последующих построений предыдущие построения удалены.
7. Построив необходимое количество промежуточных точек, соединяем все точки плавными лекальными кривыми с учетом их видимости. При этом определяем точки D и D', принадлежащие горизонтальному очерку цилиндра, которые определяют границы видимости линии пересечения поверхностей на  $\Pi_1$ .

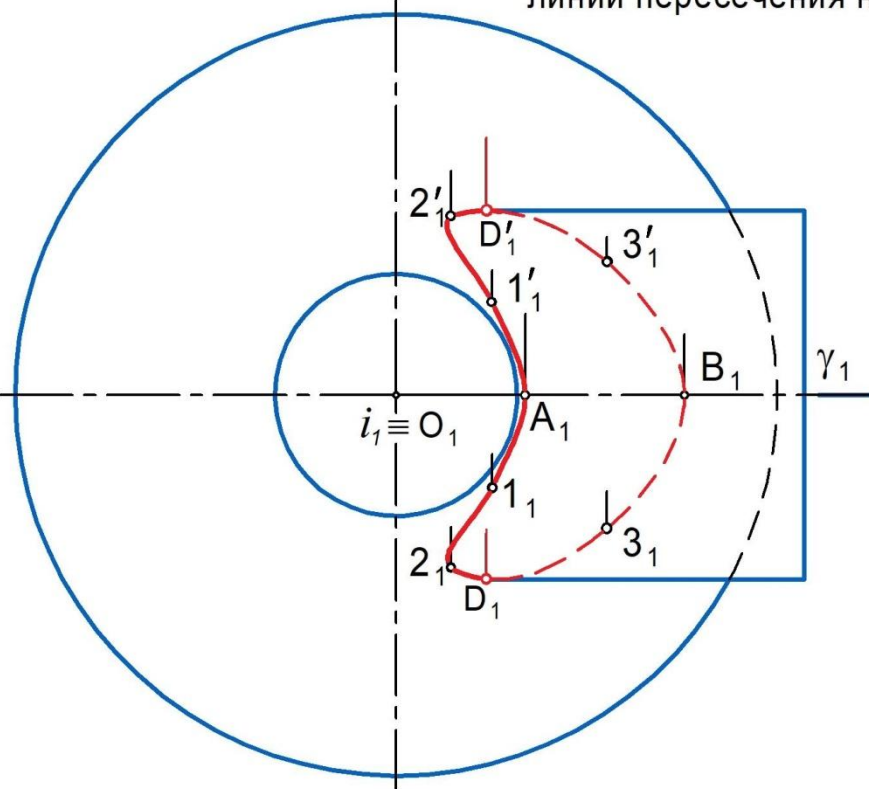
Пункт 6



Пункт 7



Точки D, D' - границы видимости линии пересечения на  $\Pi_1$ .



### Задача 43, б

В рассматриваемой задаче пересекаются тор и усеченный конус.

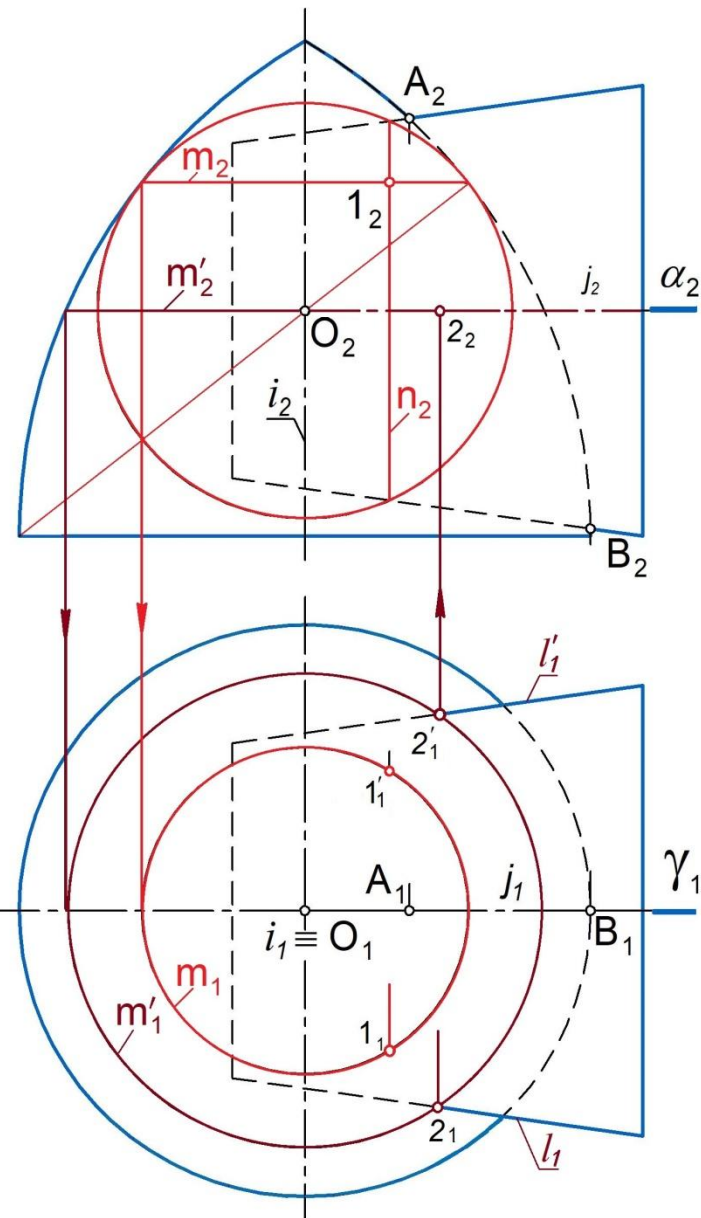
Общая плоскость симметрии поверхностей  $\gamma$ , образованная пересекающимися осями параллельна  $\Pi_2$   
 $\gamma (i \cap j) \parallel \Pi_2$ .

Алгоритм построения:

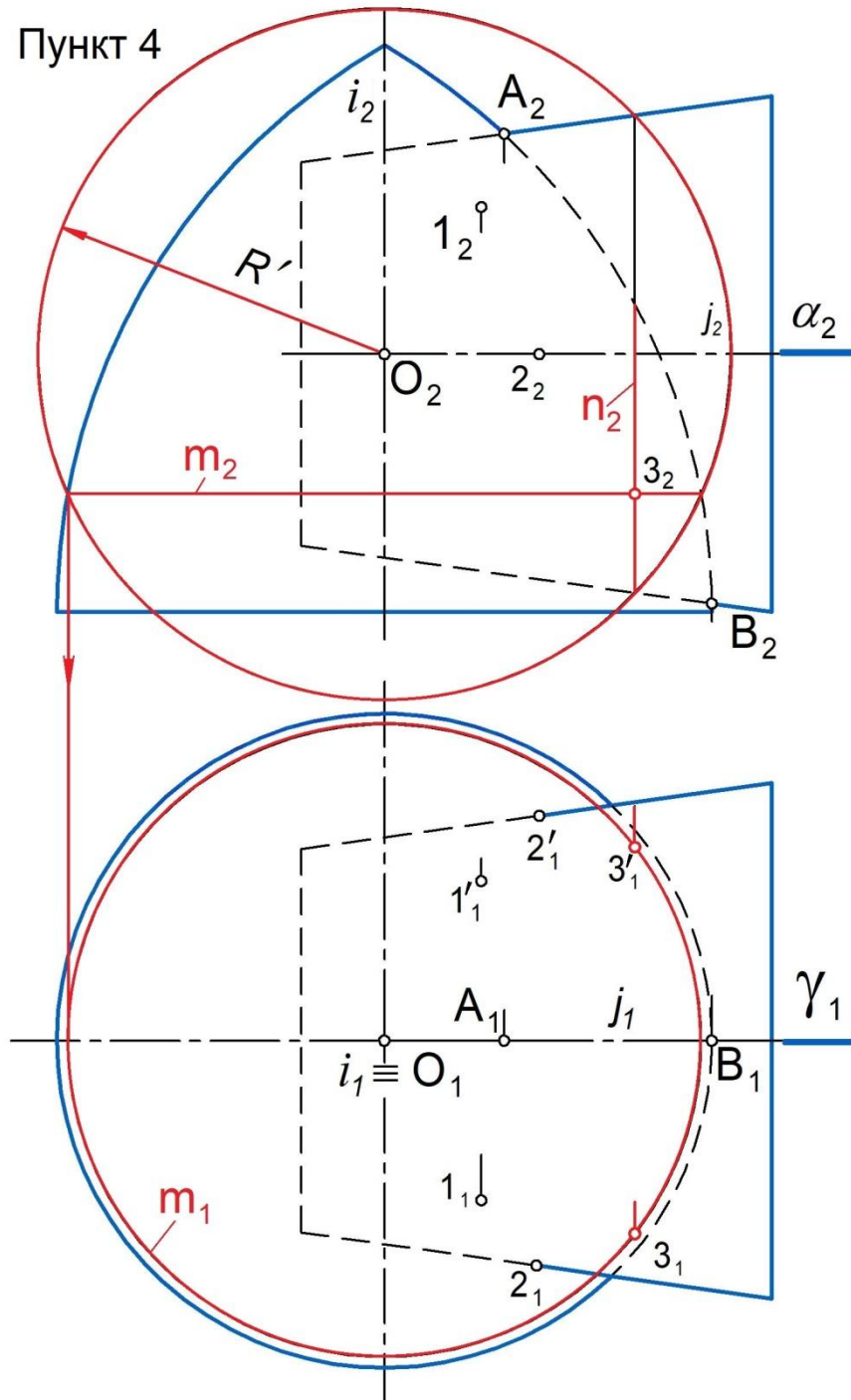
1. В плоскости  $\gamma$  находим экстремальные точки А и В.
2. На  $\Pi_2$  через ось  $j$  конуса проведем горизонтальную плоскость  $\alpha$ , которая пересекает конус по линиям  $l$  и  $l'$  горизонтального очерка, а тор - по окружности  $m'$ . В пересечении указанных линий на  $\Pi_1$  находим точки 2 и 2' - границы видимости линии пересечения поверхностей на  $\Pi_1$ .
3. На  $\Pi_2$  из точки О строим сферу  $R^{\min}$ , которая касается тора по окружности  $m$  и пересекает конус по окружности  $n$ . В пересечении указанных линии находим точки 1 (1'), принадлежащие линии пересечения поверхностей.
4. Строим новую сферу  $R' = R^{\min} + \Delta R$  (см. седующий слайд), которая пересекает тор по окружности  $m$ , а конус - по окружности  $n$ . В пересечении указанных линии находим точки 3 и 3', принадлежащие линии пересечения поверхностей.

Для лучшего восприятия последующих построений предыдущие построения удалены.

5. Построив необходимое количество промежуточных точек, соединяем все точки плавными лекальными кривыми с учетом их видимости.



Пункт 4



Пункт 5

