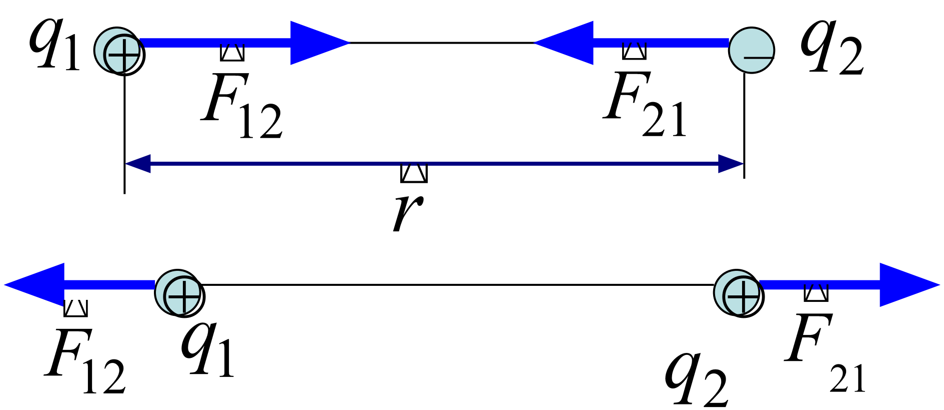
Электростатика

Закон Кулона. Напряженность поля точечного заряда.

Сила взаимодействия двух точечных зарядов



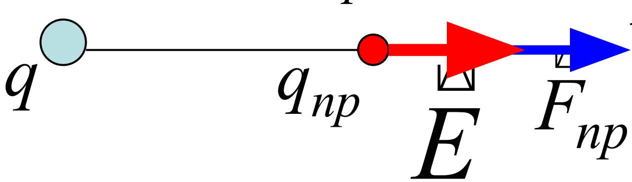
Закон Кулона

$$\boxed{F = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}}$$

$$\boxed{\vec E = \frac{\vec F_{пр}}{q_{пр}}}$$

Напряженность электростатического поля

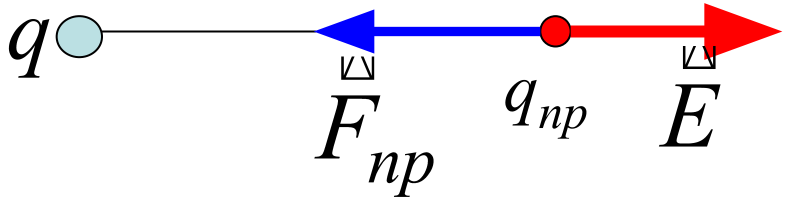
$1) q > 0, q_{пр} > 0$ $\quad \vec E \uparrow\uparrow \vec F_{пр}$



$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|q|\cdot|q_{пр}|}{r^2}\frac{1}{|q_{пр}|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|q|}{r^2}$$

$2)\, q > 0, q_{пр} < 0$

$\vec{E} \uparrow\downarrow \vec{F}_{пр}$

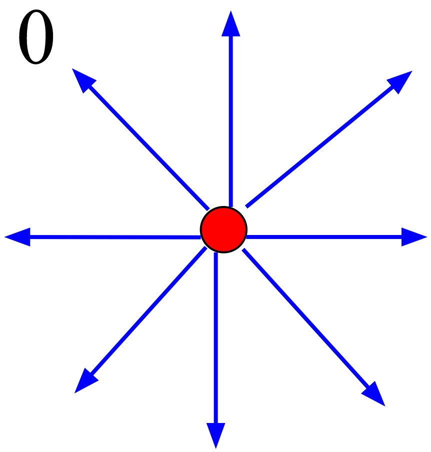


Напряженность поля точечного заряда

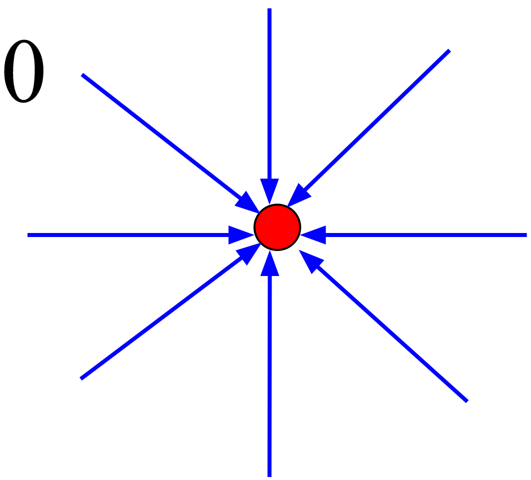
$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q|}{r^2}}$$

Силовые линии некоторых полей

$q > 0$



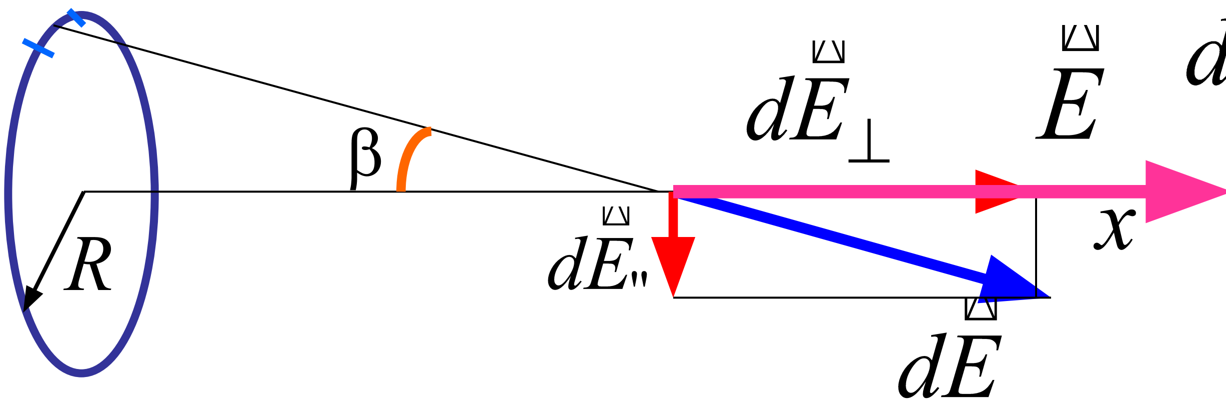
$q < 0$



Принцип суперпозиции электрических полей

$$\vec{E}_p = \frac{\vec{F}_p}{q_{пр}} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n}{q_{пр}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

Напряженность электростатического поля на оси кольца



$$d\vec{E} = d\vec{E}_\parallel + d\vec{E}_\perp$$

$$dE_\parallel = dE \sin\beta$$

$$dE_\perp = dE \cos\beta$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int d\vec{E}_\parallel + \int d\vec{E}_\perp$$

Из соображений симметрии $\quad \vec{E}_\parallel = \int dE \sin\beta = 0$

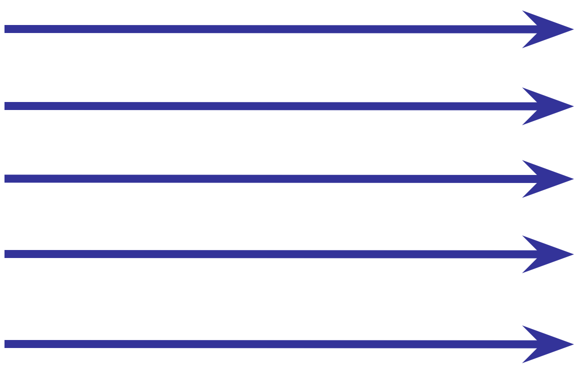
$$E = \int dE_\perp = \int dE \cos\beta = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\cos\beta$$

Из геометрических соображений $\quad r^2 = R^2 + x^2, \cos\beta = \dfrac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{R^2+x^2}\,\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{qx}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

В центре кругового витка $x=0$ $\quad E = 0$

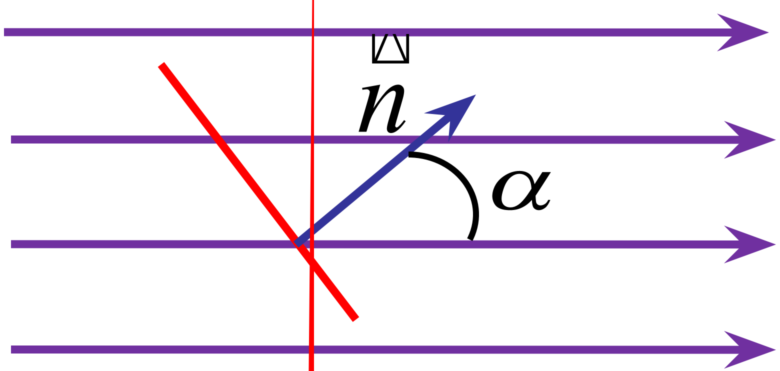
Однородное электрическое поле



$$\boxed{\vec{E} = const}$$

Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса.

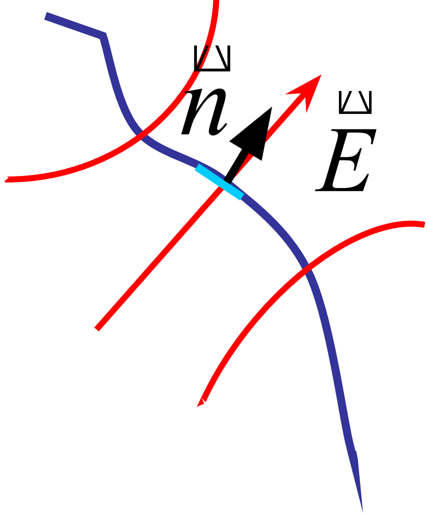
Поток вектора напряженности



$$\Phi_e = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot S = ES\cos\alpha$$

$$\alpha = (\vec{E}, \vec{n})$$

Элементарный поток вектора напряженности

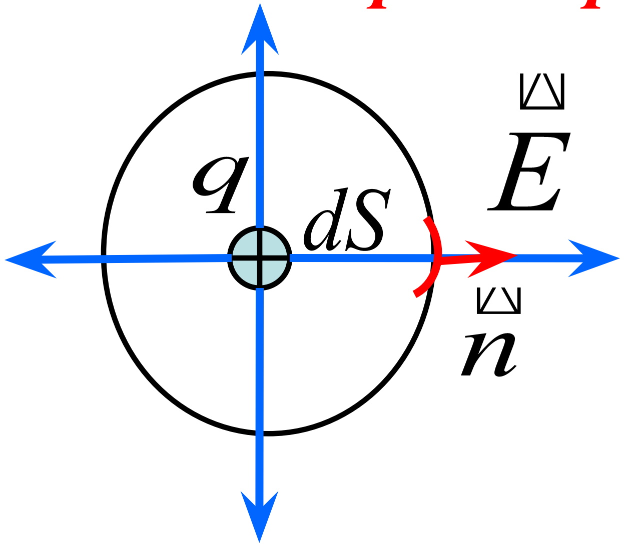


$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = EdS\cos\alpha$$

Полный поток

$$\Phi_e = \int_S d\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \int_S EdS\cos\alpha$$

Поток вектора напряженности поля точечного заряда



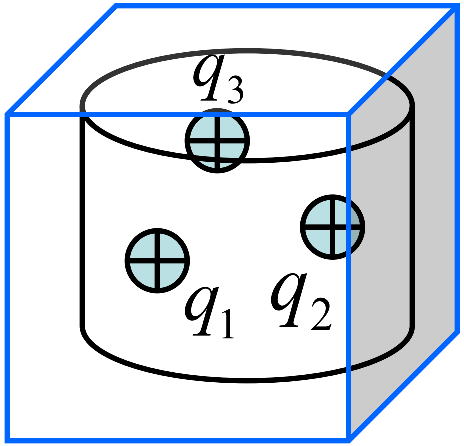
$$\Phi_e = \int_S EdS\cos\alpha = \int_S EdS$$

$$\alpha = 0$$

На поверхности сферы

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2} = const$$

Тогда $\Phi_e = E\int_S dS = ES = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$



$$\Phi_{e1} = \Phi_{e2} = \ldots = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Если поле создано системой зарядов

$$\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \int_S (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n)\vec{n}\, dS$$

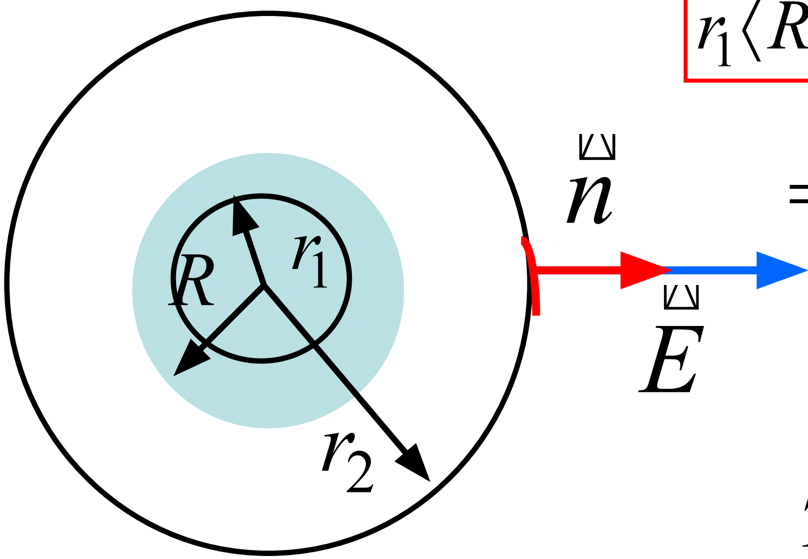
$$= \Phi_{e1} + \Phi_{e2} + \ldots + \Phi_{en}$$

Теорема Гаусса

$$\boxed{\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}}$$

Расчет напряженности электрических полей

Напряженность электрического поля равномерно заряженной сферы



$\boxed{r_1 < R}$ $\quad \Phi_e = \oint_S d\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS$

$\vec{n}$ $\quad = \oint_S EdS\cos\alpha = E\oint_S dS = E4\pi r^2$

$\vec{E}$

$$\Phi_e = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} = 0$$

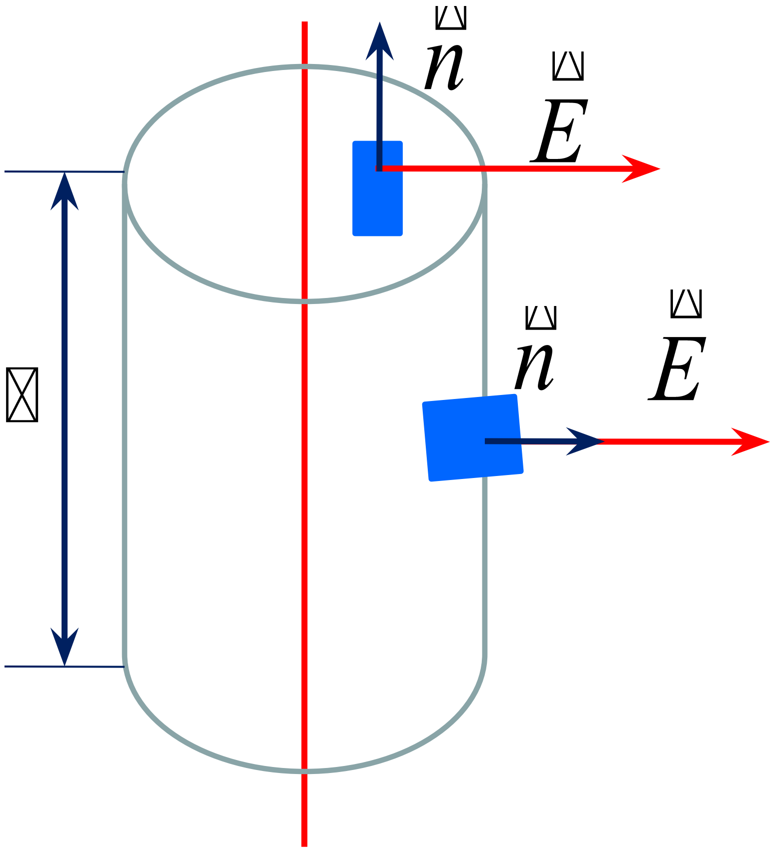
Тогда $E4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E = 0$

$\boxed{r_2 > R}$ $\quad \Phi_e = \oint_S d\Phi_e = \oint_S EdS\cos\alpha = E4\pi r^2$

$$\Phi_e = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}}$$

Напряженность поля равномерно заряженной нити



$$\tau = \frac{dq}{d\ell} = \frac{q}{\ell}$$

$$\Phi_e = \int\limits_S d\Phi_e = \int\limits_S EdS\cos\alpha$$

$$= \int\limits_{S_1} EdS\cos\alpha_1 + 2\int\limits_{S_2} EdS\cos\alpha_2$$

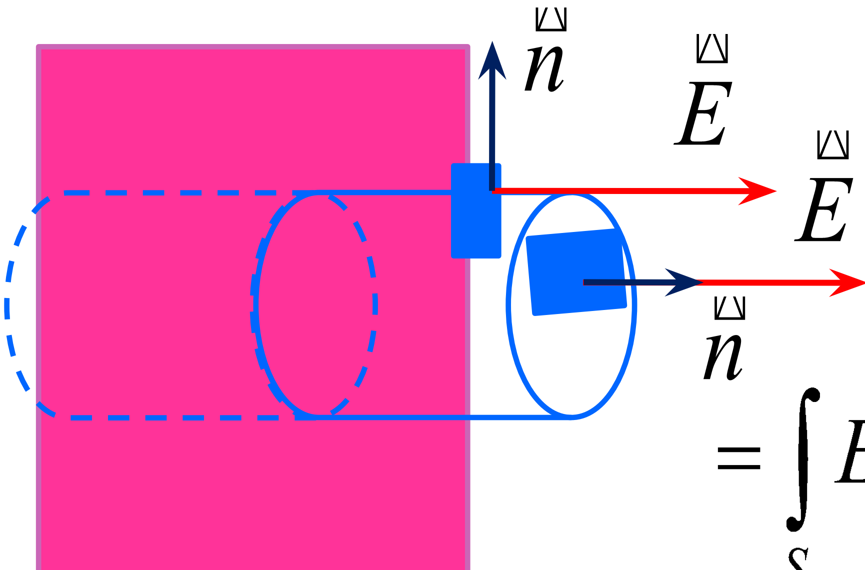
$$= E\int\limits_{s_1} dS = ES_1 = E2\pi r\ell$$

$$\Phi_e = \frac{\sum\limits_i q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\tau\ell}{\varepsilon_0}$$

$$E2\pi r\ell = \frac{\tau\ell}{\varepsilon_0} \quad \boxed{\Rightarrow E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

Напряженность поля равномерно заряженной плоскости

$$\sigma = \frac{dq}{dS} = \frac{q}{S}$$



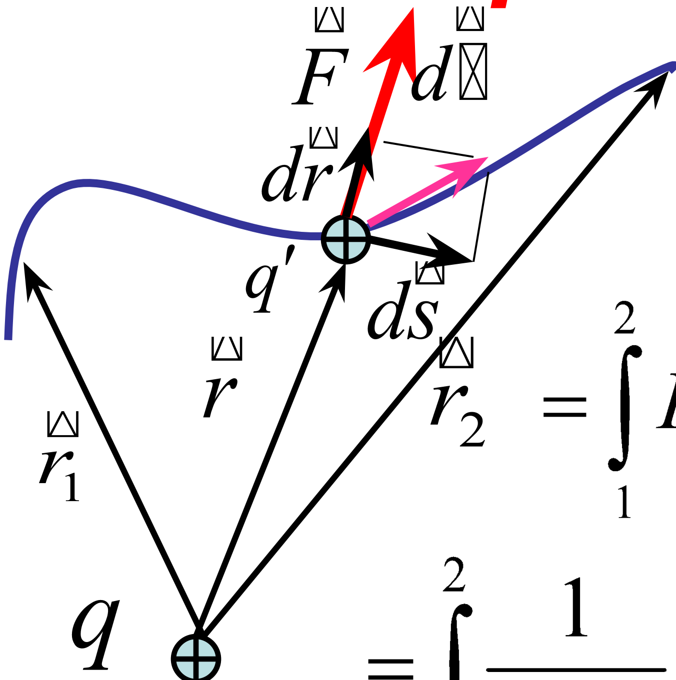
$$\Phi_e = \int_s E dS \cos\alpha =$$

$$= \int_{S_1} E dS \cos\alpha_1 + 2\int_{S_2} E dS \cos\alpha_2 =$$

$$= 2E\int_{S_2} dS = 2ES_2$$

$$\Phi_e = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S_2}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \frac{\sigma S_2}{\varepsilon_0} = 2ES_2 \boxed{\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Потенциальная энергия в электрическом поле.



$q>0, q'>0$

$$A_{12}=\int_1^2 \vec F\cdot d\vec\ell=$$

$$d\vec\ell=d\vec r+d\vec s$$

$$=\int_1^2 \vec F\cdot d\vec r+\int_1^2 \vec F\cdot d\vec s=\int_1^2 F\cdot dr=$$

$$=\int_1^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q||q'|}{r^2}dr=\frac{|q||q'|}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_1}^{r_2}=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r_1}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r_2}$$

Работа равна изменению потенциальной энергии

$$A = -\Delta W = W_1 - W_2$$

Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов

$$\boxed{W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r}}$$

Потенциал электрического поля

$$\varphi = \frac{W_{np}}{q_{np}} \quad \boxed{\Rightarrow W = q\varphi}$$

Потенциал поля точечного заряда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r}\frac{1}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Потенциал поля системы зарядов

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = \sum_i \varphi_i$$

Работа сил электрического поля

$$A_{12} = q\varphi_1 - q\varphi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\Delta\varphi$$

Разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

Потенциал точки поля

$$\varphi_1 = \frac{A_{1\infty}}{q}$$

СВЯЗЬ НАПРЯЖЕННОСТИ И ПОТЕНЦИАЛА

Работа сил электрического поля

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$dA = -qd\varphi \Rightarrow q\vec{E} \cdot d\vec{l} = -qd\varphi \Rightarrow \boxed{d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

$$d\varphi = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

Полный дифференциал

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

$$E_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, E_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, E_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

В векторной форме

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = -grad\varphi$$

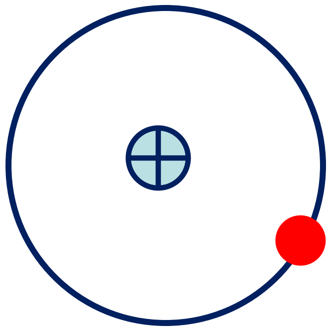
$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

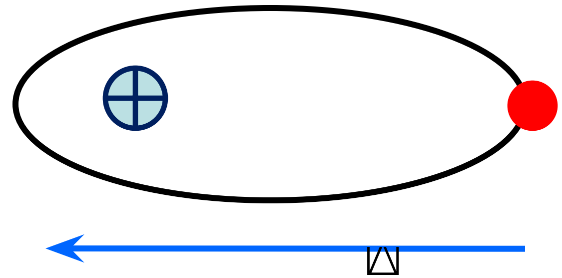
Для замкнутого контура

$$\boxed{\oint \vec{E}d\vec{l} = 0}$$

Поляризация диэлектриков

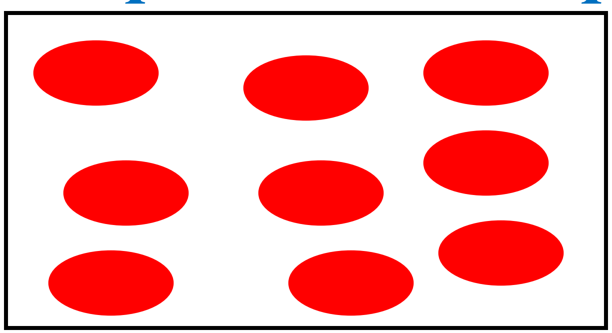
Неполярные диэлектрики

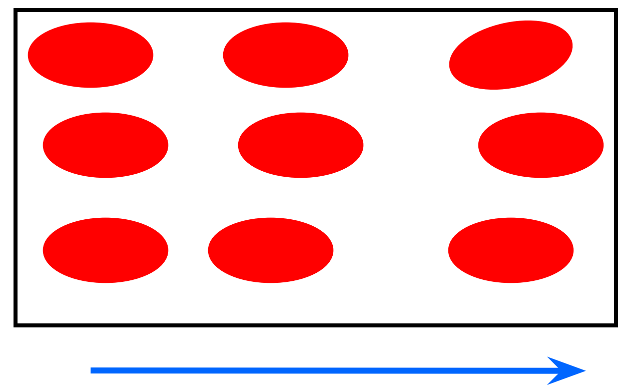




$\vec{E}$

Полярные диэлектрики



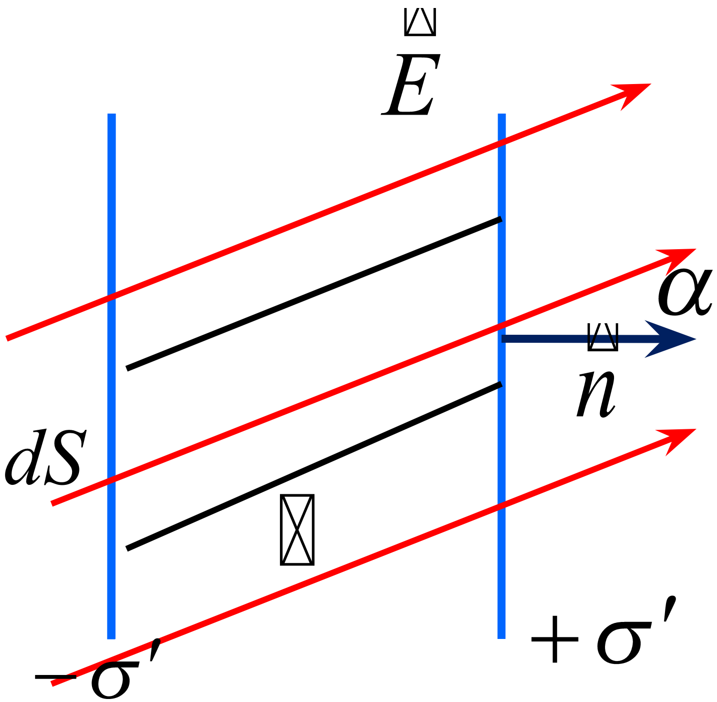


Поляризованность

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E}$$

Теорема Гаусса в диэлектриках



$$dV = l \cdot dS \cdot \cos\alpha, \alpha = (\vec{E}, \vec{n})$$

$$p = \sum_i p_i = P \cdot dV = P \cdot l \cdot dS \cos\alpha$$

$$q_+ = \sigma'_+ \cdot ds, q_- = \sigma'_- \cdot ds \Rightarrow$$

$$p = q \cdot l = \sigma' \cdot ds \cdot l$$

$$\sigma' \cdot ds \cdot l = P \cdot l \cdot ds \cos\alpha \Rightarrow \sigma' = P \cdot \cos\alpha = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

$$dq' = \sigma' \cdot ds = P \cdot \cos\alpha \cdot ds = \vec{P} \cdot \vec{n} \cdot ds$$

$$q' = \sum_i dq'_i = -\sum_i \vec{P} \cdot \vec{n} \cdot ds_i = -\int_s \vec{P} \cdot \vec{n} \cdot ds$$

Электрическое смещение.

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\cdot ds = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} \qquad q_i = q_{i0} + q_i'$$

$$\varepsilon_0\cdot\oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\cdot ds = \sum_i q_i = \sum_i (q_{i0} + q_i') = \sum_i q_{i0} + \sum_i q_i'$$

$$\Rightarrow \oint_S \varepsilon_0\cdot\vec{E}\cdot\vec{n}\cdot ds = \sum_i q_{i0} - \oint_S \vec{P}\cdot\vec{n}\cdot ds$$

$$\oint_S \varepsilon_0\cdot\vec{E}\cdot\vec{n}\cdot ds + \oint_S \vec{P}\cdot\vec{n}\cdot ds = \oint_S (\vec{P} + \varepsilon_0\vec{E})\vec{n}\cdot ds = \sum_i q_{i0}$$

$$\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0\vec{E} = \kappa\cdot\varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\vec{E} = (1+\kappa)\vec{E} = \varepsilon\cdot\varepsilon_0\vec{E}$$

Теорема Гаусса в диэлектрике $\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}ds = \sum_i q_{i0}$

Электроемкость. Конденсаторы.

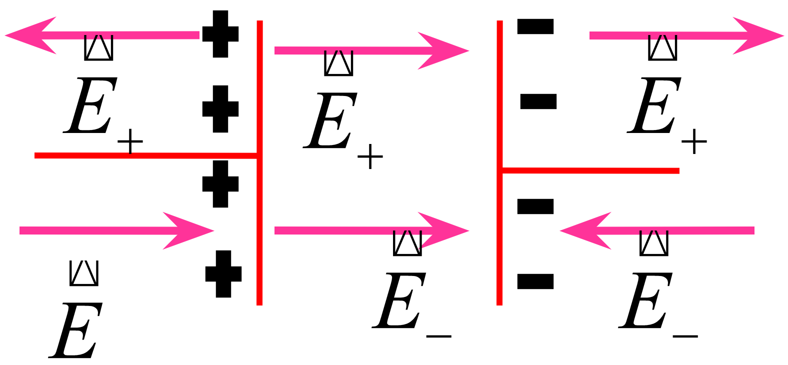
Электроемкость проводника

$$\boxed{C = q/\varphi}$$

Конденсатора

$$\boxed{C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}}$$

Плоский конденсатор



По принципу суперпозиции

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

вне $E_1 = E_+ - E_- = 0$

внутри $E_2 = E_+ + E_-$

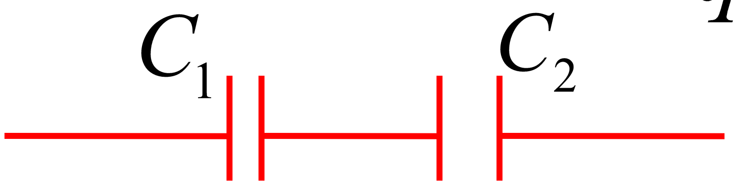
$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = E \cdot d = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot d = \frac{q \cdot d}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$$

Емкость конденсатора

$$\boxed{C = \frac{q}{U} = \frac{q\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{q \cdot d} = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{d}}$$

Соединение конденсаторов

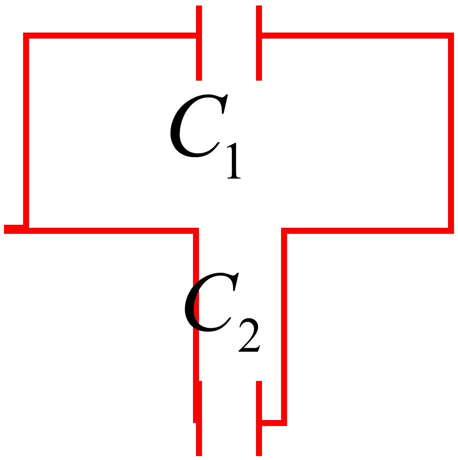
Последовательное



$$q_1 = q_2 = q \qquad U_1 + U_2 = U$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Параллельное



$$U_1 = U_2 = U \qquad q = q_1 + q_2$$

$$C = C_1 + C_2$$

Энергия электрического поля

Энергия системы зарядов

$$W = \frac{1}{2}\sum_{j}\sum_{i \neq j} w_{ij}$$

Энергия взаимодействия двух зарядов

$$W_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_j}{r_{ij}}$$

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_{ij}}{r_{ij}}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i}$$

Энергия заряженного проводника

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i} dq_i \varphi_i$$

$$\varphi_i = \varphi = \text{const}$$

$$W = \frac{1}{2}\varphi \sum_{i} dq_i = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

Энергия заряженного конденсатора

$$W=\frac{1}{2}\left(\sum_i q_i\varphi_1+\sum_i(-q_i)\varphi_2\right)=\frac{1}{2}(q\varphi_1-q\varphi_2)=\frac{1}{2}q(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{1}{2}qU$$

$$\boxed{W=\frac{qU}{2}=\frac{q^2}{2C}=\frac{CU^2}{2}}$$

Энергия электрического поля

$$W=\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon\varepsilon_0 s}{d}U^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon\varepsilon_0 s}{d}(Ed)^2=\frac{1}{2}\cdot\varepsilon\varepsilon_0E^2(sd)$$

$$\boxed{W=\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}E^2V}$$

Объемная плотность энергии

$$\omega=\frac{W}{V}=\frac{dW}{dV}$$

В однородном поле

$$\omega=\frac{\varepsilon\varepsilon_0E^2V}{2V}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0E^2}{2}=\frac{ED}{2}=\frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

В диэлектрике

$$\omega=\frac{\vec{E}\vec{D}}{2}=\frac{\vec{E}(\vec{P}+\varepsilon_0\vec{E})}{2}=\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2}+\frac{\vec{E}\vec{P}}{2}$$