

# ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

## ЛЕКЦИЯ 9

### 2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)



## **2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)**

**2.8. Выпуклые конусы.**



**2.9. Выпуклые конусы и частичная упорядоченность.**



**2.10. Многокритериальная оптимизация.**



## 2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

**2.8. Выпуклые конусы.** Выпуклый конус – один из основных объектов изучения теории экстремальных задач.

**Определение 13.** Множество  $K \subset R^n$  называется конусом, если из  $u \in K$  и  $\lambda \geq 0$  следует, что  $\lambda u \in K$ .

Если множество  $K$  выпукло, то конус называется выпуклым, если замкнуто – замкнутым, если открыто – открытым.

**Пример 10.** Множества

$$K_1 = \{u \in R^n \mid \langle a, u \rangle = 0\}, \quad K_2 = \{u \in R^n \mid \langle a, u \rangle \leq 0\},$$

$$K_3 = \{u \in R^n \mid \langle a, u \rangle < 0\}, \quad K_4 = \{u \in R^n \mid u \geq 0\}$$

являются выпуклыми конусами, при этом множества  $K_1, K_2, K_4$  замкнутые,

а множество  $K_3$  – открытое.

Здесь и далее запись  $u \geq (\leq, >, <) 0$  означает, что каждая координата вектора  $u$   $(\leq, >, <) 0$ .

**Пример 11.** Угол на плоскости раствора, меньшего чем  $\pi$  является выпуклым конусом.

**Упражнение 1.** Доказать, что пересечение выпуклых конусов является выпуклым конусом.

**Решение.**

Ранее было установлено, что пересечение выпуклых множеств выпукло. Докажем, что пересечение конусов—конус.

Пусть  $K \subset R^n$  и  $L \subset R^n$  конусы. Полагаем  $M = K \cap L$ . Требуется доказать, что  $M$ — конус. Пусть  $u \in M$  и  $\lambda > 0$ . Имеем

$$u \in K, u \in L \Rightarrow \lambda u \in K, \lambda u \in L \Rightarrow \lambda u \in K \cap L = M$$

Утверждение доказано.

В частности, пересечение множеств типа  $K_2 = \{u \in R^n \mid \langle a, u \rangle \leq 0\}$ , называют многогранным углом.

Приведем некоторые свойства выпуклых конусов.

**Теорема 19.** Пусть  $K \subset R^n$  выпуклый конус. Если  $u_1, \dots, u_m \in K$ ,  $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$ , то  $\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i \in K$ .

**Доказательство.** Положим  $\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i$  и будем считать, что  $\lambda \neq 0$ . Очевидно,

что

$$\beta_i = \frac{\lambda_i}{\lambda} \geq 0, i = 1, \dots, m$$

~~$\lambda$~~

и

$$\sum_{i=1}^m \beta_i = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1.$$

Тогда в силу выпуклости множества  $K$  справедливо включение

$$\sum_{i=1}^m \left( \frac{\lambda_i}{\lambda} \right) u_i =$$

$= \sum_{i=1}^m \beta_i u_i \in K$ . С другой стороны по определению конуса имеем

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = \lambda \cdot \left[ \sum_{i=1}^m \left( \frac{\lambda_i}{\lambda} \right) u_i \right] = \lambda \cdot \left[ \sum_{i=1}^m \beta_i u_i \right] \in K.$$

Теорема доказана.

Приведем важный пример конуса.

**Упражнение 1.** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Доказать, что множество

$$\text{con}U = \{u = av \mid v \in U, a > 0\}$$

(конусная оболочка) является конусом.

**Решение.**

Пусть  $u \in \text{con}U$ . Тогда  $u = av$ , где  $a > 0, v \in U$ . Для всех  $l > 0$  имеем

$$lu = (al) \overset{>0}{\in} v \in \text{con}U.$$

Таким образом,  $\text{con}U$  - конус.

**Теорема 20.** Если множество  $U \subset \mathbb{R}^n$  выпукло, то  $\text{con}U$  - выпуклый конус, причем если  $v \in \text{int}U, a > 0$ , то  $u = av \in \text{int}(\text{con}U)$ .

**Доказательство.** Возьмем произвольные точки  $u_1, u_2 \in \text{con}U$ . Тогда

$$u_1 = a_1 v_1, u_2 = a_2 v_2, v_1, v_2 \in U, a_1, a_2 > 0.$$

Покажем, что для любых  $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$  выполнено включение

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 \in \text{con}U.$$

Из условия  $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$  следует  $\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 > 0$ .

Тогда

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 = (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2) \cdot \left[ \frac{\alpha_1 \lambda_1}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2} v_1 + \frac{\alpha_2 \lambda_2}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2} v_2 \right].$$

Из выпуклости  $U$  и равенства  $\frac{\alpha_1 \lambda_1}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2} + \frac{\alpha_2 \lambda_2}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2} = 1$  выводим

$$\frac{\alpha_1 \lambda_1}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2} v_1 + \frac{\alpha_2 \lambda_2}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2} v_2 \in U \Rightarrow \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in \text{con}U.$$

Выпуклость множества  $\text{con}U$  доказана.

Далее пусть  $u = a v$ ,  $a > 0$ ,  $v \in \text{int}U$ . Для малых  $e > 0$  имеем

$$\begin{aligned} u + O(0, a e) &= \{a v\} + O(0, a e) = a \{v\} + O(0, e) \stackrel{>0}{=} a U = \\ &= \left\{ u = a w \mid w \in U \right\} \cup \left\{ u = b w \mid b > 0, w \in U \right\} = \text{con}U \ni \\ &u \in \text{int}(\text{con}U). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**2.9. Выпуклые конусы и частичная упорядоченность.** Используя понятие выпуклого конуса в пространстве  $R^n$  можно ввести частичный порядок его элементов, т.е. ввести отношение «больше».

**Определение 14.** Пусть  $K \subset R^n$  – выпуклый конус. Будем говорить, что  $u \in R^n$  не меньше (строго больше)  $v \in R^n$ , если  $u - v \in K$  ( $u - v \in \text{int } K$ ). В этом случае будем писать  $u \overset{K}{\geq} v$  ( $u \overset{K}{>} v$ ).

Когда ясно, о каком конусе идет речь, писать будем просто " $\geq$ ", " $>$ ".

Принимаем также, что отношение  $u \overset{K}{\geq} v$  ( $u \overset{K}{>} v$ ) эквивалентно отношению  $v \overset{K}{\leq} u$  ( $v \overset{K}{<} u$ ). Заметим, что если  $u \in K$  ( $u \in \text{int } K$ ), то  $u \overset{K}{\geq} 0$  ( $u \overset{K}{>} 0$ ).

Перечислим и докажем ряд свойств введенного отношения, присущие обычным неравенствам.

**Теоремы 18.** Пусть  $K \subset R^n$  выпуклый конус. Если  $u_1, \dots, u_m \in K$ ,

$\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$ , то  $\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i \in K$ .



1. Из  $u \geq v$  следует, что  $\alpha u \geq \alpha v$  при  $\alpha \geq 0$ .

Неравенство  $u \geq v$  означает, что  $u - v \in K \Rightarrow \alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v \in K \Rightarrow \alpha u \geq \alpha v$ .

2. Если  $u_1 \geq v_1$  и  $u_2 \geq v_2$ , то  $u_1 + u_2 \geq v_1 + v_2$ .

Справедливы включения  $u_1 - v_1 \in K, u_2 - v_2 \in K$ . В силу **теоремы 18** имеем

$$\underbrace{(u_1 - v_1)}_{\in K} + \underbrace{(u_2 - v_2)}_{\in K} \in K \Rightarrow u_1 - v_1 + u_2 - v_2 = (u_1 + u_2) - (v_1 + v_2) \in K \Rightarrow$$

$$u_1 + u_2 \geq v_1 + v_2.$$

3. Если  $u \geq v, v \geq w$ , то  $u \geq w$ .

Из включений  $(u - v), (v - w) \in K$  в силу **теоремы 18** выводим

$$\underbrace{(u - v)}_{\in K} + \underbrace{(v - w)}_{\in K} \in K \Rightarrow (u - v) + (v - w) = u - w \in K \Rightarrow u \geq w.$$

В случае, когда конус  $K$  замкнутый, справедливо еще одно свойство

4. Если  $\{u_k\} \rightarrow u_0, \{v_k\} \rightarrow v_0, u_k \geq v_k, k = 1, 2, \dots$ , то  $u_0 \geq v_0$ .

Для всех номеров  $k = 1, 2, \dots$  справедливо включение  $\overset{\rightarrow u_0}{u_k} - \overset{\rightarrow v_0}{v_k} \in K$ . Переходя в нем

к пределу при  $k \rightarrow \infty$  в силу замкнутости конуса  $K$  получим  $u_0 - v_0 \in K \Rightarrow u_0 \geq v_0$ .

**Упражнение.** Какую упорядоченность вводит конус

$$K = \{u \in R^1 \mid u \geq 0\}$$

в пространстве  $R^1$  — множестве действительных чисел, а конус

$$K_n = \{u = (u^1, \dots, u^n) \in R^n \mid u^i \geq 0, i = 1, \dots, n\} -$$

в пространстве  $R^n$  — множестве  $n$  — мерных векторов.

**Решение.** Конус  $K = \{u \in R^1 \mid u \geq 0\}$  вводит естественную упорядоченность

на множестве действительных чисел.

Конус  $K_n = \{u = (u^1, \dots, u^n) \in R^n \mid u^i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$  частично упорядочивает

$n$  — мерные вектора по признаку: вектор  $u$  больше либо равен вектора  $v$ ,

если каждая координата вектора  $u$  больше либо равна соответствующей координаты вектора  $v$ .

**2.10. Многокритериальная оптимизация.** Пусть  $F_i : \Sigma \rightarrow R^1, i = 1, \dots, n$

набор из  $n$  функций, определенных на множестве  $\Sigma$  произвольной природы.

Задача состоит в том, чтобы выбором элемента  $\sigma \in \Sigma$  минимизировать каждую из этих функций. Такую задачу обычно называют задачей оптимизации с векторным критерием. В общем случае эта задача, очевидно, решения не имеет. Однако можно искать оптимум в смысле частичной упорядоченности значений векторного критерия, задаваемой некоторым выпуклым конусом.

Рассмотрим задачу векторной оптимизации  $F_i(u) \in \min, u \in U \subset R^n, i = 1, \dots, r$ , где  $U$  - компактное множество, а  $F_i \in C(U)$ . В пространстве  $R^r$  - значений критериев введем частичную упорядоченность. Будем говорить, что точка

$$F^{(1)} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ \vdots \\ F_i^{(1)} \\ \vdots \\ F_r^{(1)} \end{pmatrix} \text{ меньше точки } F^{(2)} = \begin{pmatrix} F_1^{(2)} \\ \vdots \\ F_i^{(2)} \\ \vdots \\ F_r^{(2)} \end{pmatrix} \text{ если } F_j^{(1)} \leq F_j^{(2)}$$

для всех  $j \in \{1, \dots, r\}$  и существует номер  $i \in \{1, \dots, r\}$ , что  $F_i^{(1)} < F_i^{(2)}$ .

**Упражнение 1.** Построить выпуклый конус  $K_F$ , который будет определять

введенную частичную упорядоченность.

**Решение.**  $K_F = \left\{ \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_r \end{pmatrix} \in R^r \mid F_i \geq 0, \forall j \in \{1, \dots, r\} : F_j > 0 \right\}$ .

Докажем, что конус  $K_F$  выпуклый. Пусть

$$F^{(1)}, F^{(2)} \in K_F, \quad F^{(1)} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ \vdots \\ F_i^{(1)} \\ \vdots \\ F_j^{(1)} \\ \vdots \\ F_r^{(1)} \end{pmatrix}, \quad F^{(2)} = \begin{pmatrix} F_1^{(2)} \\ \vdots \\ F_i^{(2)} \\ \vdots \\ F_j^{(2)} \\ \vdots \\ F_r^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0, 1]$$

Тогда

$$\begin{array}{c}
 F_1^{(1)} + (1-l)F_1^{(2)} \geq 0 \\
 \vdots \\
 F_i^{(1)} + (1-l)F_i^{(2)} > 0 \\
 \vdots \\
 F_j^{(1)} + (1-l)F_j^{(2)} > 0 \\
 \vdots \\
 F_r^{(1)} + (1-l)F_r^{(2)} \geq 0
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 L \\
 \\
 L \\
 \\
 L \\
 \\
 L \\
 \\
 L
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 0 \\
 \\
 0 \\
 \\
 0 \\
 \\
 0 \\
 \\
 0
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 K_F$$

**Определение 15.** Точка  $u_*$ , оптимальная в смысле конуса  $K_F$  называется оптимальной по Парето, т. е. не существует такой точки  $u \hat{=} U$ , для которой выполнялось бы  $F_i(u) \leq F_i(u_*) \quad i = 1, \dots, k$  и  $\exists j \hat{=} \{1, \dots, k\} : F_j(u) < F_j(u_*)$ .

Множество оптимальных по Парето точек обычно содержит более одной точки.

Полагаем

$$F(u, l_1, \dots, l_r) = \mathop{\text{arg}}_{i=1}^r \sum_{i=1}^r l_i F_i(u), \quad u \hat{=} U, l_i > 0, i = 1, \dots, r.$$

**Теорема 21.** Пусть точка  $u_* \hat{\in} U$  такова, что

$$F(u_*) = \min_{u \hat{\in} U} F(u, l_1, \dots, l_r), \quad l_i > 0, i = 1, \dots, r. \quad (1)$$

Тогда точка  $u_*$  - оптимальна по Парето.

**Доказательство.** От противного приходим к существованию точки  $u_{**} \hat{\in} U$

для которой

$$F_i(u_{**}) \leq F_i(u_*), \quad i = 1, \dots, r,$$

$$\exists j \in \{1, \dots, r\} : F_j(u_{**}) < F_j(u_*).$$

Тогда

$$F(u_{**}, l_1, \dots, l_r) =$$

$$= l_1 F_1(u_{**}) + l_j F_j(u_{**}) + l_r F_r(u_{**}) <$$

$$< l_1 F_1(u_*) + l_j F_j(u_*) + l_r F_r(u_*) = F(u_*, l_1, \dots, l_r) \text{ P}$$

$$F(u_{**}, l_1, \dots, l_r) < F(u_*, l_1, \dots, l_r).$$

Последнее неравенство противоречит (1). Теорема доказана.

**Упражнение 2.** Найти все точки Парето в задачи векторной оптимизации

$$F_1(u) = (u - 1)^2 \text{ @ min, } u \hat{=} U = [0, 3]$$

$$F_2(u) = (u - 3)^2 \text{ @ min,}$$

**Решение.** Полагаем

$$F(u, l_1, l_2) = l_1(u - 1)^2 + l_2(u - 3)^2 \text{ @ min, } u \hat{=} R^1, l_1, l_2 > 0$$

$$F'(u) = 2l_1(u - 1) + 2l_2(u - 3) = 0 \text{ } \Leftrightarrow (l_1 + l_2)u - l_1 - 3l_2 = 0 \text{ } \Leftrightarrow$$

$$u_* = \frac{l_1 + 3l_2}{l_1 + l_2}.$$

Покажем, что  $u_* \hat{=} (0, 3)$ . Неравенство  $u_* > 0$  очевидно. Проверим неравенство  $u_* < 3$ . Имеем

$$\frac{l_1 + 3l_2}{l_1 + l_2} < 3 \text{ } \Leftrightarrow \overset{>0}{l_1} + 3l_2 < \overset{>0}{3l_1} + 3l_2 \text{ } \Leftrightarrow 1 < 3$$

Таким образом, точка  $u_*$  является внутренней точкой множества  $U$ . При этом

$F''(u) = 2l_1 + 2l_2 > 0$ . Тогда  $u_*$  - точка минимума функции  $F$  и она

оптимальна по Парето. Построим область всех таких точек.







