

*Новосибирский Государственный Архитектурно-Строительный
Университет (Сибстрин)*

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. КИНЕМАТИКА

ЛЕКЦИЯ 2. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ



Кафедра теоретической механики

План лекции

Тело будет следовать тому движению, которое складывается из стремлений отдельных его частей.

Леонардо Эйлер

Введение

Задание движения твердого тела

Поступательное движение

Вращательное движение

Простейшие механизмы

Заключение

На предыдущей лекции:

Кинематика точки

- задачи кинематики;
- способы задания движения: векторный, координатный, естественный;
- кинематические характеристики: траектории, скорости, ускорения.

Перейдем теперь к кинематике твердого тела.

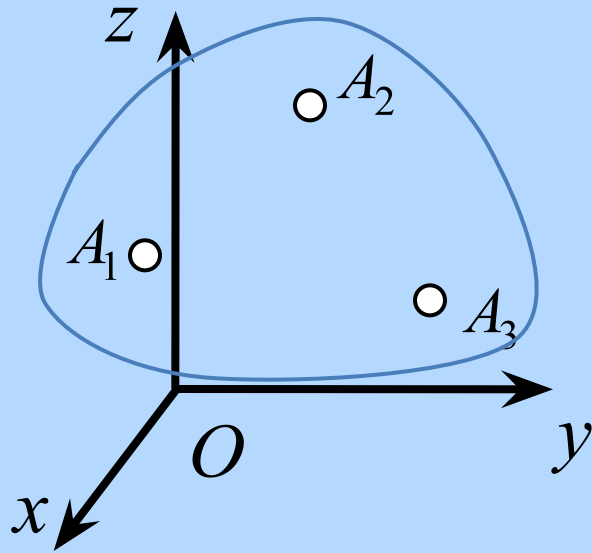
Двигаться будем – от простого к сложному!

Начнем с простейших случаев.

Цель лекции

*Изучение простейших случаев
движения твердых тел:
поступательного и вращательного.*

Задача движения твердого тела



Напомним: Твердое тело – расстояние между его точками остается постоянным (не гнется, не ломается!)

Вопрос: Сколько точек N нужно задать, чтобы определить его движение?

Ответ: $N=3$, причем точки не лежат на одной прямой

Задача движения твердого тела

$$A_k(x_k, y_k, z_k), \quad k = 1, 2, 3$$

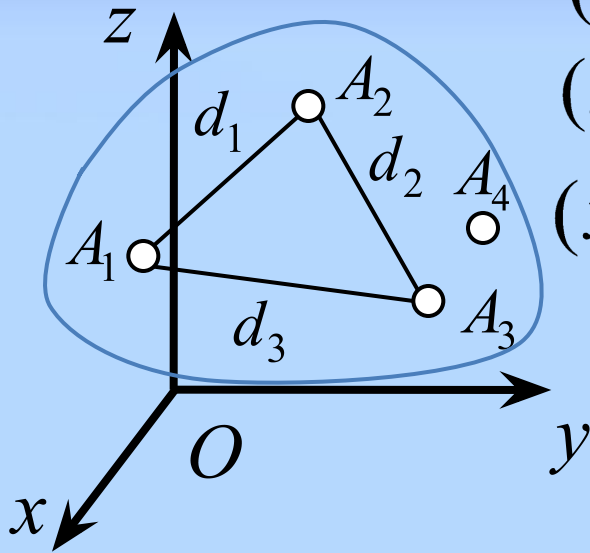
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = d_1^2$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = d_2^2$$

$$(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = d_3^2$$

$$d_k = \text{const} \Rightarrow$$

Шесть независимых координат.



Число независимых параметров, полностью определяющих движение системы называют числом степеней свободы.

У твердого тела шесть степеней свободы.

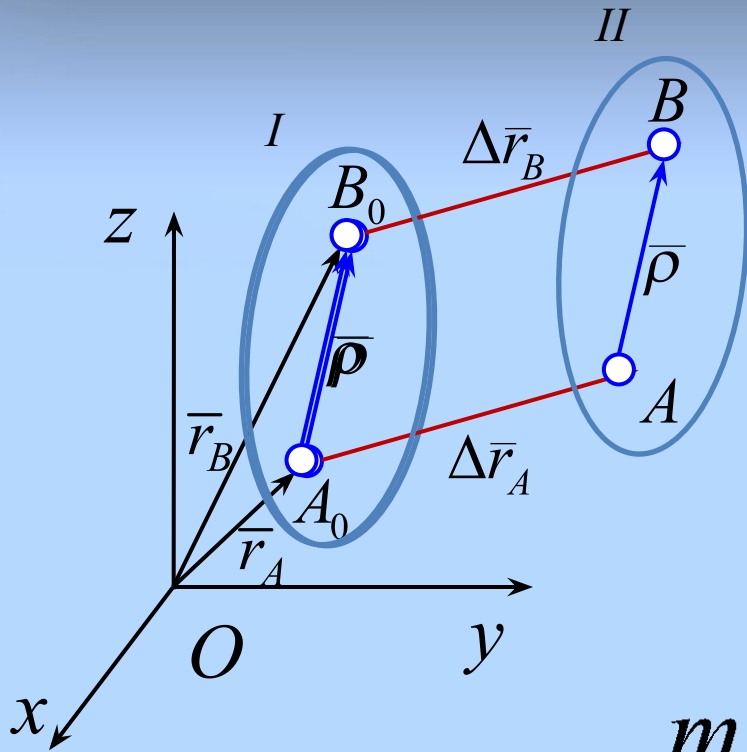
Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается в процессе движения параллельной самой себе.

Примеры: кузов машины, движущейся по прямой дороге; кабина колеса обозрения,...

Теорема. При поступательном движении твердого тела скорости и ускорения всех точек равны, а траектории при наложении совпадают.

Поступательное движение твердого тела



Доказательство.

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{\rho}$$

$$\bar{\rho} = \mathbf{const} \Rightarrow$$

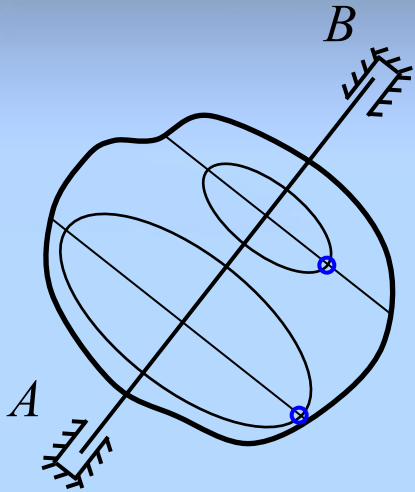
$$\bar{v}_A = \bar{v}_B; \quad \bar{a}_A = \bar{a}_B;$$

траектории – совпадают

при наложении

Изучение поступательного движения сводится таким образом к уже изученной кинематике точки.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси



Утверждение. При движении твердого тела с двумя неподвижными точками A и B все точки на прямой AB остаются неподвижными.

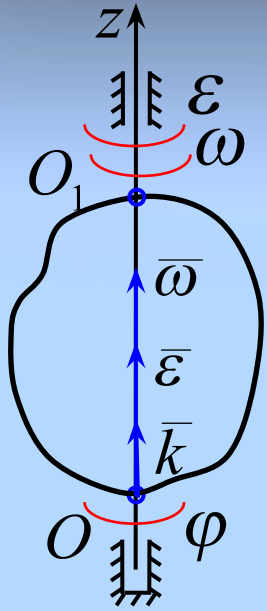
Доказательство.

Пусть $C \in [AB]$ при $t = 0$; $AC = const$; $BC = const$;
 $\Rightarrow AC + BC = const = AB \Rightarrow C \in [AB]$ при всех $t > 0$

Прямую AB называют **осью вращения**, а движение тела – **вращательным**.

Все точки тела описывают дуги окружностей с центрами на оси вращения.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси



Число степеней свободы = 1

$\phi = \phi(t)$ – *угол поворота тела*

$\omega = \dot{\phi}$ – *угловая скорость*

$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\phi}$ – *угловое ускорение*

Для удобства введем еще векторы

$$\omega = \omega \bar{k}; \quad \varepsilon = \varepsilon \bar{k}$$

$\phi > 0 \Leftrightarrow$ *вращение против часовой стрелки*

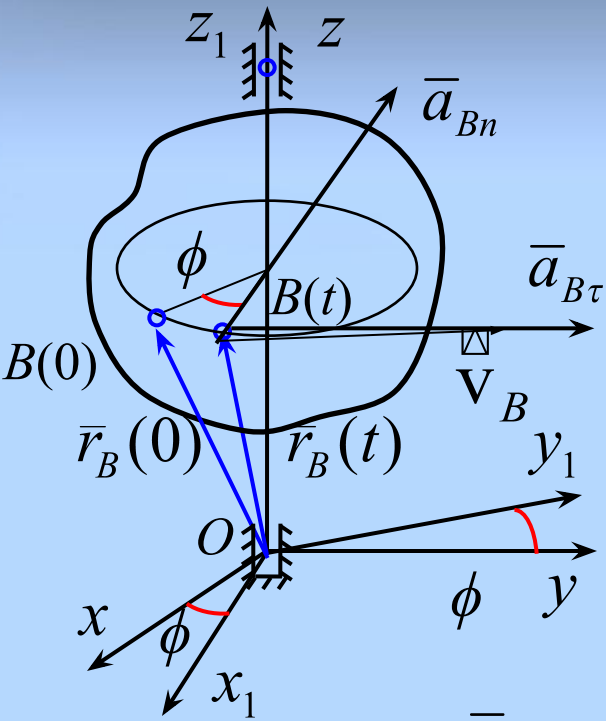
$$[\omega] = \text{рад} / \text{сек}; \quad [\varepsilon] = \text{рад} / \text{сек}^2$$

$\omega \cdot \varepsilon > 0 \Leftrightarrow$ – *ускоренное вращение*

$\omega \cdot \varepsilon < 0 \Leftrightarrow$ – *замедленное вращение*

$$\omega = 2\pi n / 60; \quad [n] = \text{об} / \text{мин}$$

Скорости и ускорения отдельных точек



$$\bar{r}_B = \bar{r}_B(t) = x_B(t) \bar{i} + y_B(t) \bar{j} + z_B(t) \bar{k},$$

$$x_B(t) = R_B \cos \varphi(t); \quad y_B(t) = R_B \sin \varphi(t)$$

$v_B = \omega R_B$ – скорость

$a_{B\tau} = \varepsilon R_B$ – касательное ускорение
(вращательное)

$a_{Bn} = \omega^2 R_B$ – нормальное ускорение
(центростремительное)

В векторном виде:

$$\bar{v}_B = \omega \times \bar{r}_B; \quad \bar{a}_{B\tau} = \varepsilon \times \bar{r}_B;$$

$$\bar{a}_{Bn} = \omega \times (\omega \times \bar{r}_B)$$

Скорости и ускорения отдельных точек

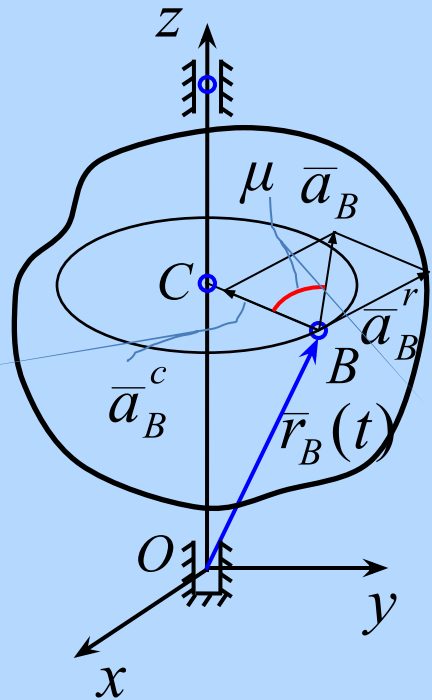
$$\bar{a}_B = \bar{a}_{B\tau} + \bar{a}_{Bn}$$

Модуль ускорения:

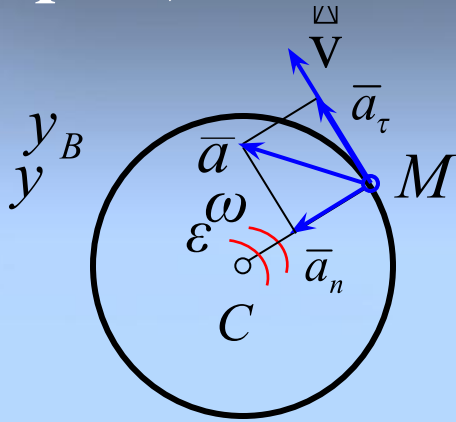
$$a_B = \sqrt{a_{B\tau}^2 + a_{Bn}^2} = R_B \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Угол μ между полным и центростремительным ускорением:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a_{B\tau}}{a_{Bn}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}; \quad \mu = \operatorname{const}$$



Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси



Пример 1. Маховик вращается по закону $\phi = t^3/3$. Определить скорость и ускорение точки, отстоящей от его оси на расстоянии 0.5 м, для $t_1 = 4$ с.

Решение.

$$\omega = \dot{\phi} = t^2, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 2t, \quad \omega(4) = 16 \text{ (с}^{-1}\text{)}, \quad \varepsilon(4) = 8 \text{ (с}^{-2}\text{)}.$$

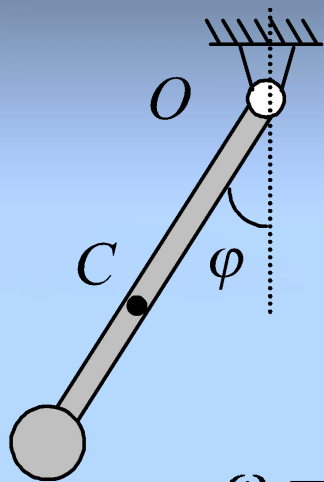
$$v(4) = \omega R = 16 \cdot 0.5 = 8 \text{ (м/с)},$$

$$a_\tau(4) = \varepsilon R = 8 \cdot 0.5 = 4 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

$$a_n(4) = \omega^2 R = (16)^2 \cdot 0.5 = 128 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_\tau^2} = 120.06 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси



Пример 2. Маятник колеблется по закону $\varphi = \varphi_0 \cos(at)$. Найти скорость и ускорение его центра тяжести С, если $OC=b$. **Решение.**

$$\omega = \dot{\varphi} = -a\varphi_0 \sin(at); \quad \varepsilon = \dot{\omega} = -a^2\varphi_0 \cos(at)$$

$$v = \omega \cdot OC = -ab\varphi_0 \sin(at);$$

$$a_\tau = \varepsilon \cdot OC = -a^2b\varphi_0 \cos(at);$$

$$a_n = \omega^2 \cdot OC = a^2b\varphi_0 \sin^2(at);$$

$$\text{При } \varphi = 0: \quad |v| = v_{\max} = ab\varphi_0; \quad a_\tau = 0; \quad a_n = a^2b\varphi_0;$$

$$\text{При } \varphi = \varphi_0: \quad v = 0; \quad |a_\tau| = a_{\tau \max} = a^2b\varphi_0; \quad a_n = 0;$$

Простейшие передаточные механизмы

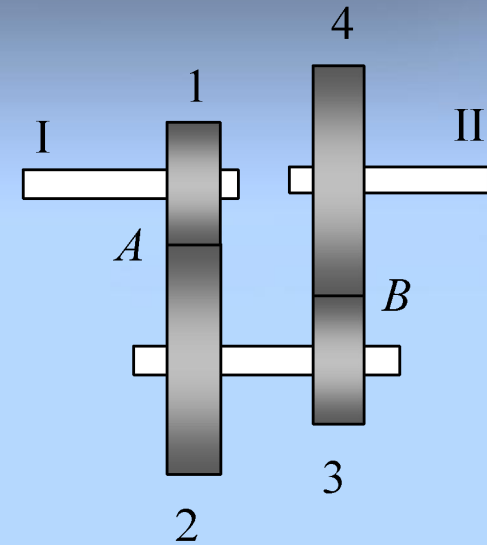
Движение от одного тела к другим можно передавать с помощью **передаточных механизмов** (зубчатых, фрикционных,...).

Если все тела совершают простейшие движения, то и механизм называют **простейшим**.

Примеры: редуктор вала, часовой механизм,...

Во всех механизмах проскальзывания между соприкасающимися телами (звеньями механизма) **нет**.

Это позволяет по известному движению ведущего звена определить движение остальных звеньев.

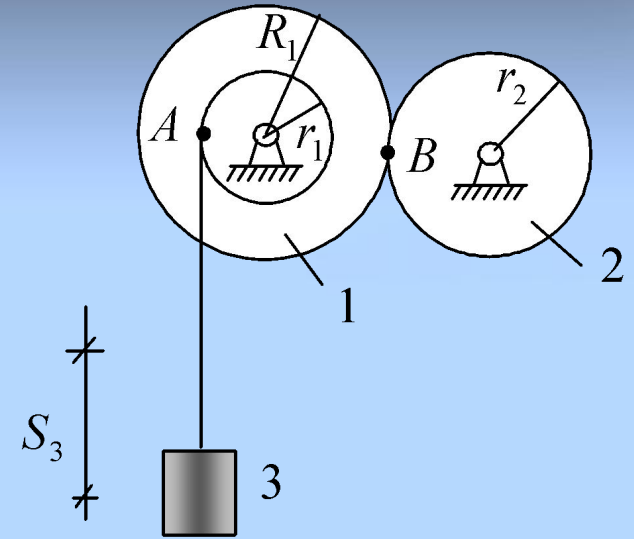


Простейшие передаточные механизмы

Пример. По заданному движению груза 3, $S_3 = at^2 / 2$

Определить угловую скорость и угловое ускорение колеса 2.

Решение.



$$v_3 = \dot{S}_3 = at; \quad v_A = v_3 = \omega_1 r_1;$$

$$v_B = \omega_1 R_1 = \omega_2 r_2 \Rightarrow \omega_2 = (R_1 / r_2) \omega_1 = R_1 at / r_1 r_2;$$

$$\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = R_1 a / r_1 r_2$$

Заключение

1. Рассмотрены простейшие движения твердого тела – **поступательное и вращательное.**
2. При поступательном движении **скорости и ускорения всех точек одинаковы, а траектории при наложении совпадают.**
3. **Вращательное движение** твердого тела полностью определяется **углом поворота** этого тела относительно неподвижной оси вращения.
4. Определены **формулы для вычисления скорости и ускорения отдельных точек при вращательном движении.**
5. Рассмотрены **примеры расчета кинематики отдельных звеньев простейших передаточных механизмов.**

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение твердого тела называется поступательным?
2. Как связаны между собой скорости точек твердого тела при поступательном движении?
3. Как связаны между собой ускорения точек твердого тела при поступательном движении?
4. Какие траектории называются конгруэнтными?
5. Какое движение твердого тела называется вращательным?
6. Сколько степеней свободы имеет тело при вращательном движении?
7. Напишите закон вращательного движения тела.

Вопросы для самоконтроля

8. Дайте определение угловой скорости твердого тела.
9. Дайте определение углового ускорения твердого тела.
0. Одинаковы или нет скорости точек твердого тела, совершающего вращательное движение?
1. Одинаковы или нет ускорения точек твердого тела, совершающего вращательное движение?

Тема следующей лекции

Плоское движение твердого тела.

Спасибо за внимание!

