8.6. ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Производная логарифмической функции

Сначала рассмотрим частный случай логарифмической функции:

$$y = \ln x$$

Используем схему нахождения производной:

Дадим аргументу *x* приращение *Δx* и найдем значение функции *y+Δy*:

$$y+\Delta y=\ln(x+\Delta x)$$

Находим приращение функции

$$\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=$$

По свойству логарифма:

$$=\ln\frac{x+\Delta x}{x}=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

Составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

Находим предел этого отношения:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) =$$

Сделаем замену:

$$\boxed{\frac{\Delta x}{x} = y\,;\, \Delta x = xy}$$

Тогда

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{xy} \ln(1+y) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+y)^{\frac{1}{y}} = \frac{1}{x} \lim_{y\to 0} \ln(1+y)^{\frac{1}{y}} =$$

В силу непрерывности логарифмической функции меняем местами знаки логарифма и предела:

$$= \frac{1}{x} \ln \underbrace{\left(\lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} \right)}_{e} = \frac{1}{x} \underbrace{\ln e}_{1} = \frac{1}{x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

производная натурального логарифма

Для сложной функции:

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

ПРИМЕР.

$$y = 3\ln x^2$$

$$y' = (3\ln x^2)' = 3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2 \cdot x = \frac{6}{x}$$

Найдем производную для общего случая логарифмической функции:

$$y = \log_a x$$

По свойству логарифма

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Тогда

$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\underbrace{(\ln x)'}_{1/x} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Отсюда окончательно имеем

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

производная логарифмической функ

Для сложной функции:

$$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$$

ПРИМЕР.

$$y = \log_5(x^2 + 3x)$$

$$y' = (\log_5(x^2 + 3x))' = \frac{1}{x^2 + 3x} \cdot \frac{1}{\ln 5} \cdot (2x + 3)$$

2. Производная показательной функции

Сначала рассмотрим частный случай показательной функции:

$$y = e^{x}$$

Логарифмируем обе части равенства по основанию *e*:

$$\ln y = \ln e^{x} = x \ln e = x$$

Дифференцируем обе части равенства по *x*:

$$(\ln y)' = x' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot y' = 1$$

Отсюда выражаем искомую производную:

$$y' = y$$

Т.к. $y = e^{x}$

то окончательно получаем: $y' = e^{x}$

$$(e^x)' = e^x$$

производная экспоненты

Для сложной функции:

$$(e^u)' = e^u \cdot u'$$

Кривая

$$y = e^x$$

(экспонента) обладает свойством: *<u>в каждой точке x ордината y равна угловому коэффициенту касательной к кривой в этой точке</u>*:

$$e^x = tg\alpha$$

ПРИМЕР.

$$y = x \cdot e^{5x}$$

$$y' = (x \cdot e^{5x})' = e^{5x} + x \cdot 5 \cdot e^{5x} = e^{5x}(1 + 5x)$$

Найдем производную для общего случая показательной функции:

$$y = a^x$$

$$y' = (a^x)' =$$

Т.к.

$$\boxed{a = e^{\ln a}}$$

$$\left((e^{\ln a})^x\right)' = (e^{x\ln a})' =$$

$$= \underbrace{e^{x\ln a}}_{a^x} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

производная показательной функции

Для сложной функции:

$$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

ПРИМЕР.

$$y = 7^{3x^3+x}$$

$$y' = (7^{3x^3+x})' = 7^{3x^3+x} \cdot \ln 7 \cdot \left(3x^3 + x\right)' =$$

$$= 7^{3x^3+x} \cdot \ln 7 \cdot (9x^2 + 1)$$

3. Производная степенной функции

$$y = x^n$$

Логарифмируем обе части равенства по основанию *e*:

$$\ln y = \ln x^n = n \ln x$$

Дифференцируем обе части равенства по *x*:

$$(\ln y)' = (n \ln x)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = n \cdot \frac{1}{x}$$

Отсюда выражаем искомую производную:

$$y' = y \cdot n \cdot \frac{1}{x}$$

Т.к.

$$y = x^n$$

то окончательно получаем:

$$y' = n \cdot x^n \cdot \frac{1}{x} = n \cdot x^{n-1}$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

производная степенной функции

Для сложной функции:

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

4. Производная степенно-показательной функции

$$y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$$

Логарифмируем обе части равенства по основанию *e*:

$$\ln y = \ln\left(f(x)\right)^{\varphi(x)} = \varphi(x)\cdot\ln f(x)$$

Дифференцируем обе части равенства по *x*, учитывая, что в правой части стоит произведение:

$$(\ln y)' = \left(\varphi(x)\cdot\ln f(x)\right)'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \varphi'(x)\cdot \ln f(x) + \left(\ln f(x)\right)'\cdot \varphi(x)$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \varphi'(x)\cdot \ln f(x) + \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\cdot \varphi(x)$$

$$y' = y\cdot\left(\varphi'(x)\cdot \ln f(x) + \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\cdot \varphi(x)\right)$$

Т.к. $$y=\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$$

то окончательно получаем:

$$y'=\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}\cdot\left(\varphi'(x)\cdot\ln f(x)+\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\cdot\varphi(x)\right)=$$

$$=\boxed{\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\cdot\ln f(x)+\left(f(x)\right)^{\varphi(x)-1}\cdot f'(x)\cdot\varphi(x)}$$

Чтобы продифференцировать степенно-показательную функцию, ее сначала нужно продифференцировать как показательную функцию, а затем как степенную и полученные результаты сложить.

ПРИМЕР.

$$y = x^x$$

$$y' = (x^x)' = x \cdot x^{n-1} + x^x \cdot \ln x = x^x(1 + \ln x)$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Производная логарифмической функции

$$(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'$$

называется <u>логарифмической производной</u>. Ее удобно использовать для дифференцирования функции, выражение которой существенно упрощается при логарифмирования.

ПРИМЕР.

$$y = \sqrt{\frac{(x+1)(x^2-2)}{3-x}}$$

Логарифмируем обе части равенства по основанию *e*:

$$\ln y = \ln\sqrt{\frac{(x+1)(x^2-2)}{3-x}} =$$

Используем свойства логарифма:

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(x+1)(x^2-2)}{3-x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) + \ln(x^2-2) - \ln(3-x)\right)$$

Дифференцируем обе части равенства по x:

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{2}\left(\ln(x+1)+\ln(x^2-2)-\ln(3-x)\right)\right)'$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2-2}+\frac{1}{3-x}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2-2}+\frac{1}{3-x}\right)\cdot\sqrt{\frac{(x+1)(x^2-2)}{3-x}}$$

5. Производные тригонометрических функций

$$y = \sin x$$

Используем схему нахождения производной:

Дадим аргументу *x* приращение *Δx* и найдем значение функции *y+Δy*:

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

Находим приращение функции

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$$

Распишем разность синусов:

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

Находим предел этого отношения:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}_{\cos x} =$$

Первый предел сводим к первому замечательному:

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x/2}}_{1} \cdot \cos x = \cos x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

производная синуса

Для сложной функции:

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

Аналогично можно найти производную функции

$$y = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

производная косинуса

Для сложной функции:

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

ПРИМЕР.

$$y = \frac{\sin 6x}{\cos(x^2+1)}$$

$$y' = \frac{(\sin 6x)' \cdot \cos(x^2+1) - \sin 6x \cdot (\cos(x^2+1))'}{(\cos(x^2+1))^2} =$$

$$= \frac{6\cos 6x \cdot \cos(x^2+1) + \sin 6x \cdot \sin(x^2+1) \cdot 2x}{(\cos(x^2+1))^2}$$

Найдем производную функции

$$y = tgx$$

$$y' = (tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' =$$

Находим производную дроби:

$$= \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{1}}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

производная тангенса

Для сложной функции:

$$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

Аналогично можно найти производную функции

$$y = ctgx$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

производная котангенса

Для сложной функции:

$$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

ПРИМЕР.

$$y = tg\left(\frac{1}{x^2 - 3x}\right)$$

$$y' = \left(tg\left(\frac{1}{x^2 - 3x}\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x^2 - 3x}\right)} \cdot \left(-\frac{2x - 3}{(x^2 - 3x)^2}\right)$$

6. Производные обратных тригонометрических функций

$$y = \arcsin x$$

Обратной к ней функцией будет $x = \sin y$

Используем правило дифференцирования обратной функции:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \quad \Rightarrow \quad y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$$

Теперь нужно выразить *y* через *x* с помощью основного тригонометрического соотношения:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \underbrace{\sin^2 y}_{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Эта производная не существует при $x = \pm 1$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

производная арксинуса

Для сложной функции:

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

Аналогично можно найти производную функций

$$y = \arccos x$$

$$y = arctgx$$

$$y = arcctgx$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

производная арккосинуса

Для сложной функции:

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

производная арктангенса

Для сложной функции:

$$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

производная арккотангенса

Для сложной функции:

$$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

ПРИМЕР.

$$y = \arccos(\ln x)$$

$$y' = (\arccos(\ln x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}} \cdot \frac{1}{x}$$

Таблица элементарных производных

Таблица производных основных элементарных функций

1. $C' = 0$;
2. $x' = 1$;
3. $(x^2)' = 2x$;
4. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;
5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$;

5* $(e^x)' = e^x$;

6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;

6*. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
10. $(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(arctg\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
14. $(arcctg\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ на отрезке $[1;4]$.

Решение.

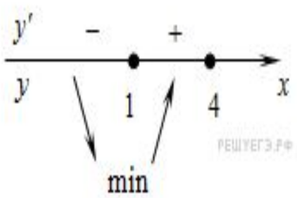
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 4x + 1.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 = 0, \\ 1 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \dfrac{1}{3}, \end{array} \right. \\ 1 \le x \le 4 \end{cases} \Rightarrow x = 1.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 1$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(1) = 1 - 2 + 1 + 3 = 3.$$

Ответ: 3.

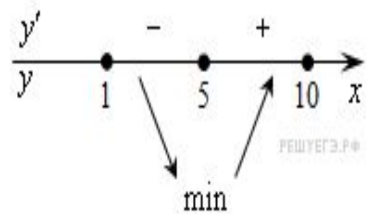
Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{x^2+25}{x}$ на отрезке $[1;10]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = \left(\frac{x^2+25}{x}\right)' = \left(x+\frac{25}{x}\right)' = 1-\frac{25}{x^2} = \frac{x^2-25}{x^2}.$$

Производная обращается в нуль в точках 5 и −5. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



Наименьшим значением функции на заданном отрезке будет ее значение в точке 5. Найдем его:

$$y(5) = \frac{25+25}{5} = 10.$$

Ответ: 10.

Найдите наименьшее значение функции $y=(x-8)e^{x-7}$ на отрезке $[6;8]$.

Решение.

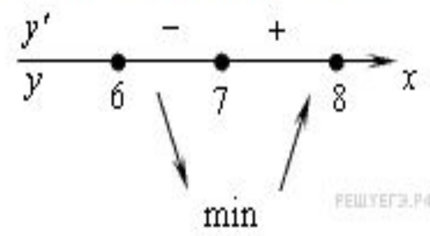
Найдем производную заданной функции:

$$y'=(x-8)'e^{x-7}+(x-8)(e^{x-7})'=e^{x-7}+(x-8)e^{x-7}=(x-7)e^{x-7}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} y'=0, \\ 6\le x\le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)e^{x-7}=0, \\ 6\le x\le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7=0, \\ 6\le x\le 8 \end{cases} \Leftrightarrow x=7.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Наименьшим значением заданной функции на отрезке $[6;8]$ будет $y(7)=-1$.

Ответ: −1.

Найдите точку максимума функции $y=(x-2)^2(x-4)+5$.

Решение.

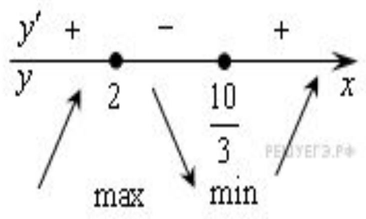
Найдем производную заданной функции:

$$y'=((x-2)^2)'(x-4)+(x-2)^2(x-4)'+(5)'=$$
$$=2(x-2)(x-4)+(x-2)^2=(x-2)\cdot(2(x-4)+(x-2))=(x-2)(3x-10).$$

Найдем нули производной:

$$(x-2)(3x-10)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=\dfrac{10}{3}. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x=2$.

Ответ: 2.

Найдите наименьшее значение функции $y = 4x - 4\ln(x+7) + 6$ на отрезке $[-6,5;0]$.

Решение.

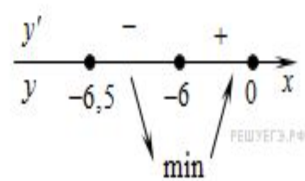
Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = 4 - \frac{4}{x+7}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 4 - \dfrac{4}{x+7} = 0, \\ -6,5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6, \\ -6,5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -6.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -6$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(-6) = -6 \cdot 4 - 4\ln 1 + 6 = -18.$$

Ответ: −18.

Найдите наименьшее значение функции $y = 3x - \ln(x+3)^3$ на отрезке $[-2{,}5;\ 0]$.

Решение.

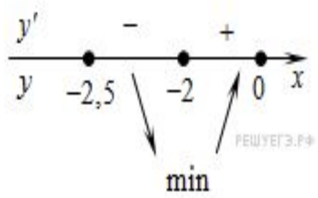
Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = 3 - \frac{3}{x+3}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 3 - \dfrac{3}{x+3} = 0, \\ -2{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+3} = 1, \\ -2{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ -2{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -2$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(-2) = -2 \cdot 3 - \ln 1 = -6.$$

Ответ: −6.